

# Elementy Teorii Kategorii

## Zadania Semestralne

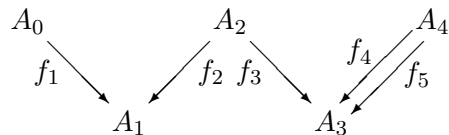
Marek Zawadowski

11 stycznia 2018

(21.01.2018 korekta: zadanie 4 (b) i (c) )

Poniżej jest lista zadań semestralnych, które należy rozwiązać i oddać w formie pisemnej. Niektóre zadania mają kilka podpunktów o podobnej tematyce ale zróżnicowanej skali trudności. W takim przypadku **przysługuje Państwu możliwość wyboru**, który podpunkt zdecydują się Państwo rozwiązać. W sumie należy zrobić 8 zadań.

1. Przedstaw granicę diagramu



przy pomocy produktów i ekwalizatorów.

2. Niech  $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$  funktor z kategorii lokalnie małej.
  - (a) Pokaż, że jeżeli funktor  $G$  ma lewy sprzężony to jest reprezentowalny.
  - (b) Pokaż, że jeżeli  $\mathcal{A}$  ma granice, to  $G$  jest reprezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy  $G$  zachowuje granice oraz spełnia warunek zbioru rozwiązującego: istnieje zbiór  $I$  oraz rodzina  $I$ -indeksowana  $\{a_i\}_{i \in I}$  obiektów  $\mathcal{A}$  taka, że dla dowolnego obiektu  $a \in \mathcal{A}$  i elementu  $x \in G(a)$  istnieje  $i \in I$ , morfizm  $h: a_i \rightarrow a$  oraz  $y \in G(a_i)$  2 takie, że  $G(h)(y) = x$ .
3. Niech  $\{A_i\}_{i \in I}$  będzie rodziną zbiorów. Definiujemy funktor

$$A: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$$

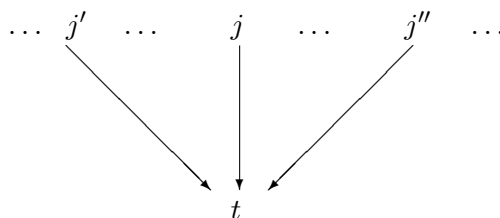
wzorem

$$A(X) = \prod_{i \in I} X^{A_i}, \quad A(f) = f \circ h \in Y^{A_i}$$

dla zbioru  $X$  i funkcji  $f: X \rightarrow Y$  oraz  $h \in X^{A_i}$ .

- (a) Pokaż, że funktor  $A$  zachowuje szerokie pulbeki.
- (b) Przy jakich założeniach o rodzinie zbiorów  $\{A_i\}_{i \in I}$ , funktor  $A$  zachowuje wystkie granice.

*Szeroki pulbek* to granica po kategorii małej  $J$  postaci



to znaczy,  $J$  ma obiekt końcowy  $t$ , oraz pełna podkategoria rozpięta na pozostałych obiektach jest dyskretna.

4. Każde z pojęć: funktor sprzężony, granica (kogranica), funktor reprezentowalny, morfizmu uniwersalny można sprowadzić do szczególnego przypadku każdego innego z nich. Poniżej jest kilka przykładów. Niech  $J$  kategoria mała, a  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  kategorie lokalnie małe.

- (a) Pokaż, że funktor  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  jest reprezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje morfizm uniwersalny z 1 do  $G$ .
- (b) Pokaż, że funktor  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  jest reprezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy funktor z kategorii elementów  $\int_{\mathcal{C}} F \rightarrow 1$  ma prawy sprzężony.
- (c) Pokaż, że funktor  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  jest reprezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy kategoria elementów  $\int_{\mathcal{C}} F$  ma obiekt końcowy.
- (d) Pokaż, że istnieje morfizm uniwersalny z obiektu  $c \in \mathcal{C}$  do funktora  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  wtedy i tylko wtedy gdy funktor

$$\mathcal{C}(c, G(-)) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$$

jest reprezentowalny.

- (e) Pokaż, że istnieje morfizm uniwersalny z obiektu  $c \in \mathcal{C}$  do funktora  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  wtedy i tylko wtedy gdy kategoria  $c \downarrow G$  ma obiekt początkowy.
  - (f) Pokaż, że funktor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  ma lewy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego obiektu  $c \in \mathcal{C}$  istnieje morfizm uniwersalny z  $c$  do  $G$ .
  - (g) Niech  $T : J \rightarrow \mathcal{C}$  funktor. Definiujemy funktor  $\mathbf{Cone}_T : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  tak, że  $\mathbf{Cone}_T(X)$  jest zbiorem stożków nad  $T$  o wierzchołku  $X$ . Pokaż, że  $T$  ma granicę wtedy i tylko wtedy gdy funktor  $\mathbf{Cone}_T$  jest reprezentowalny.
5. Opisz produkty i koprodukty (binarne) w kategorii
- (a) grup abelowych  $Ab$ ;
  - (b) pierścieni przemiennych  $CRng$ . Wskazówka: Sprawdź, że koprodukty to iloczyny tensorowe nad pierścieniem liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$ .
6. Podaj charakteryzację mono- i epimorfizmów w kategorii grup abelowych przez ekwalizatory i koekwalizatory.
7. Pokaż, że funktor zapominania
- (a)  $U_1 : Mod_k \rightarrow Ab$ , zapominający o działaniu pierścienia z kategorii modułów nad pierścieniem przemiennym  $k$  do kategorii grup abelowych ma lewy sprzężony;
  - (b)  $U_2 : Rng \rightarrow Mon$ , zapominający o dodawaniu z kategorii pierścieni do kategorii monoidów ma lewy sprzężony;

- (c)  $U_3 : Gpd \rightarrow Cat$ , włożenia z kategorii małych grupoidów do kategorii kategorii małych ma oba sprzężone. Jak można opisać granice w  $Gpd$  w terminach granic w  $Cat$ ?

8. Funktor zapominania

$$\mathcal{O} : Top \rightarrow Set$$

z kategorii przestrzeni topologicznych do kategorii zbiorów ma oba funktory sprzężone  $L, R : Set \rightarrow Cat$  ( $L \dashv \mathcal{O} \dashv R$ ). Opisz te funktory. Czy któryś z funktorów  $L, R$  ma jeszcze jeden sprzężony?

9. Niech  $\mathcal{C}$  i  $\mathcal{D}$  będą kategoriami ze skończonymi granicami.

- (a) Załóżmy, że funktor  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  zachowuje pulbeki. Pokaż, że wówczas funktor

$$\bar{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_{/F(1)}$$

taki, że

$$d \mapsto F(!) : F(d) \rightarrow F(1)$$

zachowuje wszystkie skończone granice.

- (b) Pokaż, że dla dowolnego obiektu  $c$  kategorii  $\mathcal{C}$  funktor zapominania

$$\bar{F} : \mathcal{C}_{/c} \rightarrow \mathcal{C}$$

taki, że

$$f : d \rightarrow c \mapsto d$$

kreuje pulbeki i ekwalizatory.

- (c) Wywnioskuj z powyższego, że jeśli  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  zachowuje pulbeki to zachowuje też ekwalizatory.