

Elementy Teorii Kategorii

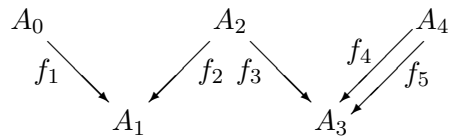
Zadania Semestralne

Marek Zawadowski

26 stycznia 2016

Poniżej jest lista zadań semestralnych, które należy rozwiązać i oddać w formie pisemnej. Niektóre zadania mają kilka podpunktów o podobnej tematyce ale zróżnicowanej skali trudności. W takim przypadku **przysługuje Państwu możliwość wyboru**, który podpunkt zdecydują się Państwo rozwiązać. W sumie należy zrobić 8 zadań.

1. Przedstaw granicę diagramu



przy pomocy produktów i ekwalizatorów.

2. Pokaż, że jeżeli funktor $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ ma lewy sprzężony to jest reprezentowalny.
3. Niech $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ i $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ będzie parą funktorów sprzężonych $F \dashv G$ z jednością $\eta : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$ i kojednością $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$. Niech $Fix(\mathcal{A})$ będzie podkategorią pełną $\mathcal{A}$ do której należą te obiekty $a \in \mathcal{A}$, dla których jedność $\eta_a : a \rightarrow GF(a)$ jest izomorfizmem. Niech $Fix(\mathcal{B})$ będzie podkategorią pełną $\mathcal{B}$ do której należą te obiekty $b \in \mathcal{B}$, dla których kojedność $\varepsilon_b : FG(b) \rightarrow b$ jest izomorfizmem. Pokaż, że powyższe sprzężenie obcina się do równoważności kategorii $Fix(\mathcal{A})$ i $Fix(\mathcal{B})$.
4. *Związki Galois.* Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie relacją binarną, $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ i $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(Y), \subseteq)^{op}$ częściowymi porządkami. Relacja r indukuje dwa funktory

$$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \quad G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

takie, że dla $X_0 \subset X$ oraz $Y_0 \subset Y$ mamy

$$F(X_0) = \{y \in Y \mid X_0 \times \{y\} \subseteq R\}, \quad G(Y_0) = \{x \in X \mid \{x\} \times Y_0 \subseteq R\}.$$

- (a) Pokaż, że $F \dashv G$.
- (b) Pokaż, że funktory F i G ustalają bijekcję zbiorów

$$Fix(\mathcal{P}(X)) = \{X_0 \in \mathcal{P}(X) : X_0 = GF(X_0)\},$$

$$Fix(\mathcal{P}(Y)) = \{Y_0 \in \mathcal{P}(Y) : Y_0 = FG(Y_0)\}.$$

- (c) Niech $R \subset \mathbf{R}^2 \times H$ będzie relacją należenia pomiędzy punktami na płaszczyźnie a półpłaszczyznami. Opisz zbiory $Fix(\mathcal{P}(\mathbf{R}^2))$ i $Fix(\mathcal{P}(H)) = \{X \subseteq H : \}$. $\mathbf{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych.

5. Opisz produkty i koprodukty (binarne) w kategorii
 - (a) grup abelowych Ab ;
 - (b) pierścieni przemennych $CRng$. Wskazówka: Sprawdź, że koprodukty to iloczyny tensorowe nad pierścieniem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.
6. Podaj charakteryzację mono- i epimorfizmów w kategorii grup abelowych przez ekwalizatory i koekwalizatory.
7. Pokaż, że funktor zapominania
 - (a) $U_1 : Rng \rightarrow Ab$, zapominający o mnożeniu z kategorii pierścieni do kategorii grup abelowych
 - (b) $U_2 : Rng \rightarrow Mon$, zapominający o dodawaniu z kategorii pierścieni do kategorii monoidów
 - (c) $U_3 : Cat \rightarrow Graf$, zapominający o mnożeniu i identycznościach z kategorii małych kategorii do kategorii grafów

ma lewy sprzężony.

Przez graf rozumiemy parę zbiorów E i V oraz parę funkcji $d, c : E \rightarrow V$ przyporządkowujących krawędziom z E ich końce w zbiorze wierzchołków V . Morfizmy, to pary funkcji przyporządkowujące krawędzie krawędziom, wierzchołki wierzchołkom i zachowujące dziedziny oraz przeciwdziedziny. Czyli graf jest kategorią równoważną z kategorią Set^C , gdzie C jest kategorią

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

Funktor U_3 kategorii małej (C_1, C_0, d, c, i, m) przyporządkowuje jej 'graf podkładowy' (C_1, C_0, d, c) .

8. Funktor zapominania

$$\mathcal{O} : Cat \rightarrow Set$$

z kategorii małych kategorii do kategorii zbiorów ma oba funktory sprzężone $L, R : Set \rightarrow Cat$ ($L \dashv \mathcal{O} \dashv R$). Opisz te funktory. Czy któryś z funktorów L, R ma jeszcze jeden sprzężony?

9. Dla jakich zbiorów X funktor

- (a) $X \times (-) : Set \rightarrow Set$ ma lewy sprzężony.
- (b) $(-)^X : Set \rightarrow Set$ ma prawy sprzężony.

10. Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami ze skończonymi granicami.

- (a) Załóżmy, że funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ zachowuje pulbeki. Pokaż, że wówczas funktor

$$\bar{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_{/F(1)}$$

taki, że

$$d \mapsto F(!) : F(d) \rightarrow F(1)$$

zachowuje wszystkie skończone granice.

(b) Pokaż, że dla dowolnego obiektu c kategorii $\mathcal{C}$ funktor zapominania

$$\bar{F} : \mathcal{C}_{/c} \rightarrow \mathcal{C}$$

taki, że

$$f : d \rightarrow c \mapsto d$$

kreuje pulbeki i ekwalizatory.

(c) Wywnioskuj z powyższego, że jeśli $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ zachowuje pulbeki to zachowuje też ekwalizatory.