

Elementy Teorii Kategorii

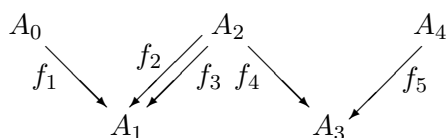
Zadania Semestralne Semestr Wiosenny 2012

Marek Zawadowski

15 maj 2012

Poniżej jest lista dziesięciu zadań, z których należy wybrać dziewięć, rozwiązać i oddać w formie pisemnej. Zadania 8 i 10 jest liczone podwójnie.

1. Przedstaw granicę diagramu



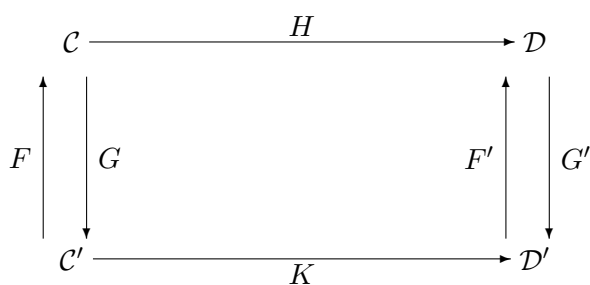
przy pomocy produktów i ekwalizatorów.

2. Funktor zapominania

$$\mathcal{O} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$$

z kategorii małych kategorii do kategorii zbiorów ma oba funktory sprzężone $L, R : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Cat}$ ($L \dashv \mathcal{O} \dashv R$). Opisz te funktory. Czy któryś z funktorów L, R ma jeszcze jeden sprzężony?

3. Niech $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, $G' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$ oraz $F' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funktory takie, że $F \dashv G$ oraz $F' \dashv G'$. Ponadto $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ i $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ są dowolnymi funktorami. To znaczy mamy (niekoniecznie przemienny) diagram kategorii i funktorów



Pokaż, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy naturalnymi transformacjami

$$\sigma : F' \circ K \rightarrow H \circ F$$

oraz

$$\tau : K \circ G \rightarrow G' \circ H$$

4. Dany jest diagram (seryjnie) przemienny w kategorii $\mathbf{Set}$,

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & a_n & \xrightarrow{\alpha_n} & a_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & \dots \longrightarrow a_\omega \\
& & \downarrow e_n & & \downarrow e_{n+1} & & \downarrow e_\omega \\
\dots & \xrightarrow{\gamma_{n-1}} & c_n & \xrightarrow{\gamma_n} & c_{n+1} & \xrightarrow{\gamma_{n+1}} & \dots \longrightarrow c_\omega \\
& & \downarrow f_n & \downarrow g_n & \downarrow f_{n+1} & \downarrow g_{n+1} & \downarrow f_\omega \\
& & b_n & \xrightarrow{\beta_n} & b_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & \dots \longrightarrow b_\omega
\end{array}$$

w którym wiersze są kostożkami kogranicznymi a kolumny są ekwalizatorami dla $n \in \omega$. Pokaż, że wtedy diagram

$$a_\omega \xrightarrow{e_\omega} b_\omega \begin{array}{c} \xrightarrow{f_\omega} \\ \xrightarrow{g_\omega} \end{array} c_\omega$$

też jest ekwalizatorem.

5. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią z obiektem końcowym, $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ funktorem. Pokaż, że F jest koproduktem w $\text{Cat}(\mathcal{A}, \text{Set})$ funktorów z $\mathcal{A}$ w Set zachowujących obiekt końcowy.
6. Niech $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ oraz $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ będą funktorami, $\alpha : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$ oraz $\beta : FG \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ naturalnymi izomorfizmami. Pokaż, że F i G są funktorami sprzężonymi. Czy można przyjąć, że α jest jednością tego sprzężenia?
7. Niech

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$$

będą parą funktorów, $\mathcal{C}$ kategorią zupełną. Załóżmy, że G kreuje granice. Pokaż, że wtedy F zachowuje granice wtedy i tylko wtedy gdy $G \circ F$ zachowuje granice.

8. Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami ze skończonymi granicami.

- (a) Załóżmy, że funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ zachowuje pulbeki. Pokaż, że wówczas funktor

$$\bar{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_{/F(1)}$$

taki, że

$$d \mapsto F(!) : F(d) \rightarrow F(1)$$

zachowuje wszystkie skończone granice.

- (b) Pokaż, że dla dowolnego obiektu c kategorii $\mathcal{C}$ funktor zapominania

$$\bar{F} : \mathcal{C}_{/c} \rightarrow \mathcal{C}$$

taki, że

$$f : d \rightarrow c \mapsto d$$

kreuje pulbeki i ekwalizatory.

- (c) Wywnioskuj z powyższego, że jeśli $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ zachowuje pulbeki to zachowuje też ekwalizatory.

9. Pokaż, że kategoria grup (wewnętrznych) w kategorii grup jest równoważna z kategoria grup abelowych.

10. Funktory $\mathcal{P}, \mathcal{P}_{<\omega} : Set \rightarrow Set$ są funktorami zbioru podzbiorów i zbioru skończonych podzbiorów, odpowiednio. To znaczy, że dla zbioru X , $\mathcal{P}(X)$ jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru X a $\mathcal{P}_{<\omega}(X)$ jest zbiorem podzbiorów skończonych zbioru X . Na morfizmach te funktory są zdefiniowane przez funkcje obrazu. Na obu funktorach można zdefiniować monady. Jedność dla $\mathcal{P}$ jest włożeniem elementów zbioru na singletony, tzn.

$$\eta_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$x \mapsto \{x\}$$

a mnożenie w monadzie $\mathcal{P}$ to suma (zbioru zbiorów)

$$\bigcup : \mathcal{P}\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}$$

Jedność i mnożenie dla $\mathcal{P}_{<\omega}$ są obcięciami jedności i mnożenia dla $\mathcal{P}$. Sprawdź, że $\mathcal{P}$ jest monadą. Opisz algebry dla obu monad jako algebry równościowe (o operacjach niekoniecznie skończonej arności).