

Elementy Teorii Kategorii

Zadania Semestralne

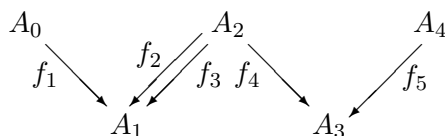
Semestr Jesienny 2009-2010

Marek Zawadowski

12 stycznia 2010

Poniżej jest lista dziesięciu zadań, z których należy wybrać dziewięć, rozwiązać i oddać w formie pisemnej.

- Niech $\mathcal{C}$ kategoria z produktami binarnymi, A obiekt $\mathcal{C}$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne
 - przekątna $A \rightarrow A \times A$ jest izomorfizmem;
 - rzutowania $\pi_1, \pi_2 : A \times A \rightarrow A$ są równe;
 - morfizm $A \rightarrow 1$ jest monomorfizmem.
- Przedstaw granicę diagramu



przy pomocy produktów i ekwalizatorów.

- Związki Galois.* Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie relacją binarną, $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ i $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(Y), \subseteq)^{op}$ częściowymi porządkami. Relacja r indukuje dwa funktory

$$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \quad G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

takie, że dla $X_0 \subset X$ oraz $Y_0 \subset Y$ mamy

$$F(X_0) = \{y \in Y \mid X_0 \times \{y\} \subseteq R\}, \quad G(Y_0) = \{x \in X \mid \{x\} \times Y_0 \subseteq R\}.$$

- Pokaż, że $F \dashv G$.
- Pokaż, że funktory F i G ustalają bijekcję zbiorów

$$\text{Fix}(\mathcal{P}(X)) = \{X_0 \in \mathcal{P}(X) : X_0 = GF(X_0)\},$$

$$\text{Fix}(\mathcal{P}(Y)) = \{Y_0 \in \mathcal{P}(Y) : Y_0 = FG(Y_0)\}.$$

- Niech $R \subset \mathbf{R}^2 \times H$ będzie relacją należenia pomiędzy punktami na płaszczyźnie a półpłaszczyznami. Opisz zbiory $\text{Fix}(\mathcal{P}(\mathbf{R}^2))$ i $\text{Fix}(\mathcal{P}(H)) = \{X \subseteq H : \cdot\}$. $\mathbf{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych.
- Dany jest diagram przemienny w kategorii Set

$$\begin{array}{ccccccc}
& \dots & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & a_n & \xrightarrow{\alpha_n} & a_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \dots \longrightarrow a_\omega \\
& & & \uparrow \pi_{a_n} & & \uparrow \pi_{a_{n+1}} & & \uparrow \pi_{a_\omega} \\
& \dots & \xrightarrow{\gamma_{n-1}} & c_n & \xrightarrow{\gamma_n} & c_{n+1} & \xrightarrow{\gamma_{n+1}} \dots \longrightarrow c_\omega \\
& & & \downarrow \pi_{b_n} & & \downarrow \pi_{b_{n+1}} & & \downarrow \pi_{b_\omega} \\
& \dots & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & b_n & \xrightarrow{\beta_n} & b_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} \dots \longrightarrow b_\omega
\end{array}$$

którym wiersze są kostożkami kogranicznymi a kolumny są produktami binarnymi dla $n \in \omega$. Pokaż, że wtedy diagram

$$a_\omega \xleftarrow{\pi_{a_\omega}} c_\omega \xrightarrow{\pi_{b_\omega}} b_\omega$$

też jest produktem binarnym.

5. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią ze skończonymi granicami, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ funktorem zachowującym pulbeki. Pokaż, że F jest koproduktem w kategorii $\mathbf{Cat}(\mathcal{A}, \mathbf{Set})$ funktorów zachowujących skończone granice.
6. Niech k ciało oraz A i B to przemienne k -algebry wolne na pewnych zbiorach. Pokaż, że $A \otimes B$ również jest wolną k -algebra.
7. Udowodnij twierdzenia o izomorfizmie dla grup, korzystając wyłącznie z własności uniwersalnej rzutowania $G \rightarrow G/H$.
8. Niech $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ oraz $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ będą funktorami, $\alpha : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$ oraz $\beta : FG \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ naturalne izomorfizmy. Pokaż, że F i G są funktorami sprzężonymi. Czy można przyjąć, że α jest jednością tego sprzężenia?
9. Udowodnij, że kategoria algebr Kleislego $\mathcal{K}(T)$ jest obiektem początkowym w kategorii sprzężeń wyznaczających monadę (T, η, μ) .
10. Opisz monadę (T, η, μ) na kategorii zbiorów $\mathbf{Set}$, dla której kategoria T -algebr Eilenberga-Moore'a $\mathcal{EM}(T)$ jest równoważna z kategorią monoidów przemennych $\mathbf{CMon}$. Udowodnij równoważność kategorii $\mathcal{EM}(T)$ i $\mathbf{CMon}$.