Elementy Teorii Kategorii

Marek Zawadowski

29 listopada 2019

Spis treści

1 Wprowadzenie

1.1 Rys historyczny

Trudno jest dokładnie ustalić kiedy się w praktyce matematycznej pojawiły kategorie i funktory. Można argumentować, że było to już w starożytnej Grecji. W każdym razie stało się to na pewno przed początkiem wieku XX. Naturalne transformacje pojawiły się na początku lat czterdziestych ubiegłego stulecia. Natomiast za początek Teorii Kategorii, jako osobnej dyscypliny matematycznej uważa się zgodnie jedno wydarzenie: publikację w roku 1945 pracy S. Eilenberga i S. MacLanea, 'General theory of natural equivalences', Transactions of AMS.

Potrzeba zdefiniowania wszystkich trzech wyżej wspomnianych pojęć powstała tak późno gdyż o konkretnych kategoriach można było mówić bez definiowania co to jest kategoria[1]. Nawet, jak się okazało, można było definiować konkretne funktory pomiędzy kategoriami nie tłumacząc ani czym są abstrakcyjne kategorie i ani czym są abstrakcyjne funktory. To się jednak zmieniło gdy trzeba było opisać czym są naturalne transformacje pomiędzy funktorami. Do tego oczywiście trzeba było opisać co to są funktory działające z kategorii do kategorii... a do tego trzeba było zdefiniować co to są kategorie. Wszystkie te trzy pojęcia zostały zdefiniowane we wspomnianej pracy[2] z 1945 roku.

Nie od razu użyteczność Teorii Kategorii została w pełni doceniona. Przez pierwsze kilkanaście lat nie powstało zbyt wiele prac dotyczących tej teorii. Oprócz wspomnianych twórców teorii na wyróżnienie za wkład we wczesnym okresie jej istnienia zasługuje Ch. Eresmann, A. Grothendieck a zwłaszcza D. Kan, który w pracy z 1958 roku wprowadził pojęcie funktorów sprzężonych, jedno z najbardziej fundamentalnych pojęć w całej Teorii Kategorii. W latach sześćdziesiątych rozwój tej teorii nabrał dużej dynamiki co zaowocowało w 1971 roku monografią 'Categories for the

[1] E.Galois używał pojęcia grupy w latach dwudziestych XIX wieku choć abstrakcyjne pojęcie grupy jest mniej więcej o 100 lat młodsze.

[2] Mówiac dokładniej w pracy tej oprócz kategorii i funktorów zostały zdefiniowane tylko naturalne izomorfizmy. S. Eilenberg komentując dlaczego nie wprowdził już wtedy dowolnych naturalnych transformacji powiedział: 'one generalization at a time'.

Working Mathematician' S.MacLane'a, do dziś będąca najlepszym wprowadzeniem do Teorii Kategorii.

1.2 O kategoriach

Kategorie i funktory pojawiły się by opisać z sposób sformalizowany proces przechodzenia od struktur pewnego typu do struktur innego typu.

Na kategorie można też patrzeć jak na matematyczne struktury uogólniające monoidy (kategorie z jednym obiektem) z jednej strony i częściowe (pra)porządki (kategorie w których pomiędzy dwoma obiektami istnieje co najwyżej jeden morfizm) z drugiej. To może pomóc w zrozumieniu pojęć kategoryjnych na prostszych przykładach, jak również fakty dotyczące monoidów i częściowych porządków maja nierzadko interesujące uogólnienia kategoryjne.

Ale ja bardziej wolę patrzeć na kategorie jak na pewną subtelną formalizację *struktury matematycznej* na właściwym poziomie ogólności. Samego pojęcia struktury nie sposób zdefiniować gdyż jest ono zbyt ogólne[3] ale spróbuję w kilku zdaniach opisać co mam na myśli.

Rozważymy kategorie której obiektami są grupy a morfizmami funkcje pomiędzy uniwersami grup. Takie przekształcenia grup ignorują całą istniejącą w naszych obiektach strukturę. To powoduje, że ta struktura właściwie przestaje mieć jakiekolwiek znaczenie. Na przykład grupa liczb całkowitych w takiej kategorii jest izomorficzna z grupą liczb wymiernych i każdą inna grupą przeliczalną. W konsekwencji mamy do czynienia bardziej ze zbiorami niż z grupami. W tym przypadku jest dość dobrze widać, że by badać grupy sensowniej jest to robić w kategorii grup i homomorfizmów.

Z drugiej strony, jeśli rozważymy kraty zupełne to wybór morfizmów nie jest już taki oczywisty. Krata zupełna jest to zbiór częściowo uporządkowany w którym istnieją wszystkie kresy. Otóż jeśli nawet ograniczymy się w definicji tylko do kresów dolnych (czy górnych) to i tak krata będzie posiadała wszystkie kresy[4]. W szczególności mamy więcej operacji niż może byśmy chcieli... Ale mamy też morfizmy i te wcale nie muszą zachowywać wszystkich kresów. Możemy rozważać kategorię w której morfizmy zachowują wszystkie kresy $\bigwedge$ i $\bigvee$ ale też taką w której morfizmy zachowują tylko $\bigvee$ lub tylko $\bigwedge$, a nawet taką, w której morfizmy zachowują tylko $\bigvee$ i $\wedge$[5]. W kategoriach patrzymy na obiekty od zewnątrz (strukturalnie), to znaczy badamy jak dany obiekt zachowuje się w stosunku do innych obiektów 'tego typu' porównując obiekty przy pomocy morfizmów zachowujących strukturę a nie od wewnątrz (analitycznie) każdy obiekt osobno. W tym sensie można myśleć, że struktura (obiektów danej kategorii) to jest to co zachowują morfizmy.

[3]Dużo trudniej jest podać 'definicję' struktury niż przykład struktury, który nie spełnia tej definicji.

[4]Jeśli krata L posiada kresy dolne $\bigwedge$ i X jest podzbiorem uniwersum L, to kres górny X można zdefiniować następująco $\bigvee X = \bigwedge\{l \in L | \forall_{x \in X} x \leq l\}$.

[5]Jeśli ograniczyć jeszcze kraty do takich w których te operacje $\bigvee$ i $\wedge$ są ze sobą rozdzielne to otrzymujemy w ten sposób kategorię lokali, kategorię dualną do kategorii przestrzeni topologicznych bezpunktowych.

2 Kategorie, funktory i transformacje naturalne

2.1 Kategorie

Kategoria $\mathcal{C}$ składa się z rodziny *obiektów* $Ob(\mathcal{C})$, rodziny *morfizmów* $Mor(C)$. Ponadto

- każdy morfizm f ma *dziedzinę* $dom(f)$ i *przeciwdziedzinę* $cod(f)$; piszemy $f : X \to Y$ lub $X \xrightarrow{f} Y$ gdy $X = dom(f)$ oraz $Y = cod(f)$;
- jeśli f i g są dwoma morfizmami takimi, że $cod(f) = dom(g)$, to określone jest *złożenie* f i g, które zapisujemy $g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & Z \end{tikzcd}$$

- dla każdego obiektu X określony jest morfizm *identycznościowy*, oznaczany id_X (lub 1_X);
- operacje te spełniają następujące aksjomaty; dla $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, $f, g, h \in Mor(\mathcal{C})$
    1. $dom(1_X) = X = cod(1_X)$;
    2. $dom(g \circ f) = dom(f)$, $cod(g \circ f) = cod(d)$, gdy $cod(f) = dom(g)$;
    3. $1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$, gdy $f : X \to Y$;
    4. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, gdy $cod(f) = dom(g)$ i $cod(g) = dom(h)$.

Notacja złożenia morfizmów. Jeśli $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$ to $g \circ f : X \to Z$ oznacza złożenie f z g, jeśli ktoś woli to może też pisać takie złożenie w *porządku aplikacyjnym*, ze średnikiem: $f; g : X \to Z$. Czyli piszemy jak kto chce ale piszemy jak piszemy!

Jeśli $\mathcal{C}$ jest kategorią to przez $\mathcal{C}(X, Y)$ (lub $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $Hom(X, Y)$) oznaczamy rodzinę morfizmów z X do Y, t.zn.

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f \in Mor(\mathcal{C}) : dom(f) = X,\ cod(f) = Y\}.$$

Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy *lokalnie małą* jeśli dla dowolnych obiektów $X, Y \in \mathcal{C}$, rodzina $\mathcal{C}(X, Y)$ jest 'małym' zbiorem. Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy *małą* jeśli zarówno rodzina obiektów $Ob(\mathcal{C})$ jak i rodzina morfizmów $Mor(C)$ są zbiorami.

Uwaga. Powyższa definicja kategorii nie odnosi się w ogóle do zbiorów by uczynić teorię kategorii niezależna od teorii mnogości. Jednak przykłady jak najbardziej odnoszą się do teorii mnogości choć nie zawsze w taki sposób w jaki ona by sobie tego życzyła. Rozważanie kategorii które nie są małe wymaga uwagi. Na przykład kategoria wszystkich funktorów pomiędzy takimi kategoriami wygląda podejrzanie z punktu widzenia teorii mnogości, ponieważ 'obiekt' który otrzymujemy może się okazać 'zbyt duży'. Tymi sprawami nie trzeba sobie zbytnio zaprzątać głowy ale jeśli ktoś chce stać na twardych fundamentach to może myśleć jak następuje. Pracujemy w teorii ZFC z aksjomatem mówiącym że istnieją dwie liczby mocno nieosiągalne $\theta_1 < \theta_2$. Jeśli V jest modelem tej teorii to $R_{\theta_1} \subset R_{\theta_2} \subset V$ są wtedy modelami dla ZFC. Małe zbiory to zbiory w R_{θ_1}. Kategorie małe to kategorie których rodziny obiektów i morfizmów są małymi zbiorami. Kategorie lokalnie małe to kategorie to kategorie w R_{θ_2} jeśli rozważamy coś na kształt kategorii funktorów pomiędzy takimi kategoriami to i tak to coś należy do V. Nigdy nic więcej nie będzie nam potrzebne.

Przykłady kategorii

1. $\mathbf{0}$ - kategoria pusta. W tej kategorii nie ma obiektów ani morfizmów.
2. $\mathbf{1}$ - kategoria z jednym obiektem i jednym morfizmem (identycznością) $1_0 : 0 \to 0$.
3. $\mathbf{2}$ - kategoria z dwoma obiektami 0 i 1 i jednym morfizmem nieidentycznościowym $0 \to 1$.
4. Set - kategoria zbiorów i funkcji. Tu jak i podczas całego wykładu zakładamy, że każda funkcja ma ustaloną dziedzinę i przeciwdziedzinę.
5. Set_{fin} - kategoria zbiorów skończonych i funkcji.
6. Gr - kategoria grup i homomorfizmów.
7. $G - Set$ kategoria akcji grupy G na zbiorach i przekształceń ekwiwariantnych.
8. $Alg(T)$ - kategoria algebr teorii równościowej T i homomorfizmów algebr. Ten przykład jest uogólnieniem poprzedniego jako, że teoria grup jest teorią równościowa. Jeśli pojęcie teorii równościowej nie jest znane czytelnikowi to nie szkodzi. To pojęcie będzie wytłumaczone później, jak również pojęcie kategorii algebr równościowych w dowolnej kategorii z produktami skończonymi.
9. Monoid - kategoria z jednym obiektem. Jeśli $M = (M, e, \circ)$ jest monoidem to możemy patrzeć na M jako na kategorię z jednym obiektem $*$ i rodziną morfizmów M. Wtedy złożenie jest zawsze określone i jest mnożeniem $\circ$ w monoidzie oraz $1_* = e$.
10. Grupa - kategoria z jednym obiektem, podobnie jak w poprzednim przykładzie, w której każdy morfizm jest izomorfizmem.
11. Praporządek: kategoria w której istnieje co najwyżej jeden morfizm pomiędzy dwoma obiektami. Dokładniej praporządek $(P, \leq)$ jest to zbiór P z relacja zwrotną i przechodnią $\leq$.
12. Top - kategoria przestrzeni topologicznych i funkcji ciągłych.
13. $Toph$ - kategoria przestrzeni topologicznych i klas homotopii funkcji ciągłych.

Operacje na kategoriach

1. Kategoria dualna $\mathcal{C}^{op}$ do kategorii $\mathcal{C}$. Jeśli zamienimy operacje dom i cod (odpowiada to odwróceniu strzałek w diagramach) to tak otrzymane operacje również spełniają aksjomaty kategorii. Tak otrzymana kategoria nazywa się kategorią dualną.
2. Produkt kategorii $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ jest to kategoria której obiektami są pary obiektów $\langle C, D \rangle$ takie, że $C \in \mathcal{C}$ oraz $D \in \mathcal{D}$. Morfizm $\langle f, g \rangle : \langle C, D \rangle \longrightarrow \langle C', D' \rangle$ jest to para morfizmów $f : C \to C'$ w $\mathcal{C}$ i $f : D \to D'$ w $\mathcal{D}$. Identyczności i złożenia w $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ są zdefiniowane w oczywisty sposób po współrzędnych.

3. Niech X będzie obiektem kategorii $\mathcal{C}$. Kategoria $\mathcal{C}/C$ *płat kategorii* $\mathcal{C}$ nad C? (slice category) ma jako obiekty morfizmy o przeciwdziedzinie C. Morfizmem w $\mathcal{C}/C$ z $f : A \to C$ do $g : B \to C$ jest morfizm $h : A \to B$ w $\mathcal{C}$ taki, że $g \circ h = f$. Graficznie, na diagramie, możemy to przestawić tak:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

   Mówimy, że ten *diagram jest przemienny* gdy $g \circ h = f$.

Morfizmy specjalne w kategoriach

Morfizm $f : X \to Y$ w kategorii $\mathcal{C}$ jest *epimorfizmem* (*epi*) jeśli dla dowolnych morfizmów $g, h : Y \to Z$ jeśli $g \circ f = h \circ f$ to $g = h$.

Morfizm $f : X \to Y$ w kategorii $\mathcal{C}$ jest *monomorfizmem* (*mono*) jeśli dla dowolnych morfizmów $g, h : Z \to X$ jeśli $f \circ g = f \circ h$ to $g = h$.

Morfizm $f : X \to Y$ w kategorii $\mathcal{C}$ jest *izomorfizmem* (*izo*) jeśli istnieje morfizm $g : Y \to X$ taki, że $g \circ f = id_X$ oraz $f \circ g = id_Y$. Jeśli istnieje izomorfizm $f : X \to Y$ w kategorii $\mathcal{C}$ to mówimy, że X i Y są *izomorficzne* i oznaczamy $X \cong Y$.

Morfizm $f : X \to Y$ w kategorii $\mathcal{C}$ jest *retrakcją* (*split epi*) jeśli istnieje morfizm $g : Y \to X$ taki, że $f \circ g = id_Y$.

Morfizm $f : X \to Y$ w kategorii $\mathcal{C}$ jest *koretrakcją* (*split mono*) jeśli istnieje morfizm $g : Y \to X$ taki, że $g \circ f = id_X$.

Ćwiczenia

1. Podaj charakteryzację monomorfizmów i epimorfizmów w kategorii Set.

2. Pokaż, że w Set każdy morfizm który jest mono i epi jest też izo.

3. Niech $f : X \to Y$ będzie morfizmem w kategorii $\mathcal{C}$. Pokaż, że

   (a) Jeśli f jest split epi i mono to jest izo.

   (b) Jeśli f jest split mono i epi to jest izo.

4. Niech $f : X \to X$ będzie epimorfizmem w kategorii $\mathcal{C}$ takim, że $f \circ f = f$. Pokaż, że $f = 1_X$.

5. Podaj przykład morfizmu w kategorii monoidów Mon i kategorii pierścieni Rng, który jest monomorfizmem i epimorfizmem ale nie jest izomorfizmem.

6. Pokaż, że złożenie dwóch epimorfizmów (monomorfizmów, izomorfizmów) jest epimorfizmem (monomorfizmem, izomorfizmem).

7. Pokaż, że jeśli złożenie morfizmów $g \circ f$ jest epi to g też jest epi.

8. Pokaż, że jeśli złożenie morfizmów $g \circ f$ jest mono to f też jest mono.

2.2 Funktory

Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ z kategorii $\mathcal{C}$ do kategorii $\mathcal{D}$ jest to przyporządkowanie obiektom kategorii $\mathcal{C}$ obiektów kategorii $\mathcal{D}$ i morfizmom kategorii $\mathcal{C}$ morfizmów kategorii $\mathcal{D}$, w taki sposób, że zachowane są dziedziny, przeciwdziedziny, złożenia i identyczności, czyli dla $X, f, g \in \mathcal{C}$

1. $F(dom(f)) = dom(F(f))$, $F(cod(f)) = cod(F(f))$;
2. $F(1_X) = 1_{F(X)}$;
3. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Ostatnia równości oczywiście nie miała by sensu gdyby nie założyć, że $dom(g) = cod(f)$. Tego typu założenia będziemy na ogół przyjmować milcząco.

Przykłady funktorów

1. Funktor identycznościowy $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.
2. $X \in \mathcal{C}$, $\lceil X \rceil : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor stały równy;
3. $Set_{fin} \hookrightarrow Set$ funktor włożenia;
4. $U : Alg(T) \to Set$ funktor zapominania;
5. $U : Top \to Set$ funktor zapominania;
6. $\pi_1 : Top_* \to Gr$ funktor grupy podstawowej;
7. $\mathcal{F} : Set \to Gr$ funktor grupy wolnej.
8. *Funktory reprezentowalne.* Obiekt X kategorii lokalnie małej $\mathcal{C}$ wyznacza dwa funktory:
   (a) $\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow Set$
   Każdy funktor naturalnie izomorficzny z takim funktorem nazywamy *(kowariantnym) funktorem reprezentowalnym*
   (b) $\mathcal{C}(-, X) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Set$
   Każdy funktor naturalnie izomorficzny z takim funktorem nazywamy *(kontrawariantnym) funktorem reprezentowalnym*
9. $\mathcal{C}(-, =) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow Set$ funktor hom;
10. $\pi_i : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktory rzutowania, dla $i = 0, 1$;
11. $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ funktor diagonalny;
12. Funktory na kategorii zbiorów:
   (a) $X \times - : Set \longrightarrow Set$ funktor mnożenia kartezjańskiego przez zbiór X;
   (b) $- \times - : Set \times Set \longrightarrow Set$ funktor mnożenia kartezjańskiego;
   (c) $- + - : Set \times Set \longrightarrow Set$ funktor sumy rozłącznej;
   (d) $(-)^X : Set \longrightarrow Set$ funktor podnoszenia do potęgi X;
   (e) $X^{(-)} : Set^{op} \longrightarrow Set$ funktor wykładniczy o podstawie X;

(f) $\mathcal{P} : Set^{op} \longrightarrow Set$ funktor potęgowy ($\mathcal{P}(X)$ jest zbiorem podzbiorów zbioru X);

$$\mathcal{P}(f : X \to Y) = f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

(g) Natomiast przyporządkowanie $X \mapsto X^X$ nie da się rozszerzyć do funktora z Set w Set.

13. Funktor przestrzeni sprzężonej:

$$(-)^* : Vect_K^{op} \longrightarrow Vect_K$$

$$V \mapsto Hom(V, K)$$

Funktory specjalne

Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest *wierny* jeśli dla dowolnej pary obiektów X, Y w $\mathcal{C}$ funkcja $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(F(X), F(Y))$ indukowana przez F jest injekcją. F jest *pełny* jeśli ta funkcja jest surjekcją. F jest *pełny na izomorfizmach* jeśli ta funkcja jest surjekcją gdy jej dziedzinę i przeciwdziedzinę obetniemy do izomorfizmów.

Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest *właściwie surjektywny* jeśli dla dowolnego obiektu Y w $\mathcal{D}$ istnieje obiekt X w $\mathcal{C}$ oraz izomorfizm $f : f(X) \to Y$.

Przykłady

1. Funktor grupy podstawowej $\pi_1 : Top_* \to Gr$ nie jest wierny bo każde dwa homotopijne przekształcenia indukują ten sam homomorfizm grup podstawowych. Nie jest też wierny ale jest właściwie surjektywny.

2. Funktor grupy wolnej $\mathcal{F} : Set \to Gr$ jest wierny ponieważ różne funkcje pomiędzy zbiorami indukują różne homomorfizmy grup wolnych. Funktor $\mathcal{F}$ nie jest ani pełny, jako że nie każdy homomorfizm grup przekształca zbiór wybranych generatorów grupy na zbiór wybranych generatorów, ani właściwie surjektywny, jako że nie każda grupa jest izomorficzna z grupą wolną.

3. Funktor zanurzenia kategorii grup abelowych w kategorię wszystkich grup $Ab \to Gr$ jest wierny i pełny ale nie jest właściwie surjektywny.

4. Funktor zapominania $Ab \to Set_{\neq\emptyset}$ jest wierny i właściwie surjektywny ale nie jest pełny.

5. Funktor zapminania $Latt \to Poset$ z kategorii krat do kategorii porządków częściowych jest wierny i pełny na izomorfizmach ale nie jest pełny ani właściwie surjektywny.

   Kategoria krat ma jako obiekty, kraty a jako morfizmy, morfizmy krat. Kratę można definiować jako algebrę dla teorii równościowej lub prościej jako częściowy porządek który ma kresy górne i dolne zbiorów skończonych (w tym zbioru pustego). Morfizmy krat zachowują skończone kresy. Jest to więcej niż tylko zachowywanie częściowego porządku ale jeśli morfizm zachowujący częściowy porządek jest izomorfizmem to musi też zachowywać kresy. Przyczyna tego zjawiska leży w tym, że nawet jesli kresy są czymś szczególnym w częściowym porządku to w terminach samego porzadku można wyrazić, że coś jest kresem jakiegoś zbioru. W tym sensie krata jest częściowym porządkiem z dodatkową własnością (istnienie skończonych kresów) a nie częściowym porządkiem z dodatkową strukturą.

6. Niech $\mathbf{B}$ będzie kategoria której obiektami są zbiory $(n] = \{1, \ldots, n\}$ dla $n \in \omega$ a morfizmami bijekcje. Set_{fin} jest kategorią zbirów skończonych. Wtedy funktor zanurzenia $\mathbf{B} \to Set_{fin}$ jest wierny, pełny na izomorfizmach i właściwie surjektywny ale nie jest pełny.

Mówimy, że funktor F *zachowuje* własność W gdy jeśli obiekt lub morfizm lub ... ma własność W to jego obraz przy F też ma własność W.

Mówimy, że funktor F *odbija* własność W gdy jeśli obraz przy F obiektu lub morfizmu lub ... ma własność W to obiekt lub morfizm lub ... też ma własność W.

Mówimy, że funktor F jest *konserwatywny* jeśli odbija izomorfizmy.

Ćwiczenia

1. Pokaż, że funktor zapominania $U : Top \to Set$ jest wierny ale nie jest pełny.
2. Pokaż, że funktor rzutowania $\pi_0 : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest wierny wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{C}$ jest praporządkiem.
3. Pokaż, że każdy funktor zachowuje izomorfizmy, split epi i split mono.
4. Pokaż, że każdy wierny funktor odbija epimorfizmy i monomorfizmy.
5. Pokaż, że jeśli funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest wierny i pełny oraz X, Y są obiektami w $\mathcal{C}$ takimi, że $F(X) \cong F(Y)$ to $X \cong Y$. Pokaż, że funktor wierny i pełny odbija izomorfizmy.

2.3 Transformacje naturalne

Jeśli $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sa funktorami to *transformacja naturalna* $\tau : F \to G$ jest rodzina morfizmów w $\mathcal{D}$ indeksowana obiektami $\mathcal{C}$, $\{\tau_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in Ob\mathcal{C}}$ taka, że diagram

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

jest przemienny, dla dowolnego morfizmu $f : X \to Y$ w $\mathcal{C}$.

Przykłady transformacji naturalnych

1. $id_F : F \to F$ transformacja identycznościowa;
2. jeśli $f : X \to Y$ jest morfizmem w $\mathcal{C}$, to

$$\mathcal{C}(-, f) : \mathcal{C}(-, X) \to \mathcal{C}(-, Y)$$

$$\mathcal{C}(f, -) : \mathcal{C}(Y, -) \to \mathcal{C}(X, -)$$

są transformacjami naturalnymi pomiędzy funktorami reprezentowalnymi;

3. $f : X \to Y$ funkcja. Wtedy f indukuje transformację naturalną pomiędzy funktorami $X \times (-) : Set \to Set$ i $Y \times (-) : Set \to Set$;

4. Niech $\overrightarrow{\mathcal{P}} : Set \to Set$ będzie kowariantnym funktorem potęgowym,tzn

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}(f : X \to Y) = \exists_f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$$

gdzie $\exists_f$ jest funkcją obrazu. Wtedy mamy transformację naturalną $\mu : \overrightarrow{\mathcal{P}}\overrightarrow{\mathcal{P}} \to \overrightarrow{\mathcal{P}}$ taką, że $\mu_X(A) = \bigcup A$ dla $X \in Set$ oraz $A \in \mathcal{P}\mathcal{P}(X)$ (μ_X sumuje rodziny podzbiorów zbioru X);

5. $\{-\} : 1_{Set} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}$ taką, że $\{-\}_X(x) = \{x\}$ dla $X \in Set$ oraz $x \in X$ jest transformacją naturalną ($\{-\}_X$ wkłada elementy zbioru X do $\mathcal{P}(X)$ jako singletony);

6. Włożenie przestrzeni wektorowej w przestrzeń podwójnie sprzężoną:

$$\tau : Id_{Vect_K} \longrightarrow (-)^{**} : Vect_K \longrightarrow Vect_K$$

$$\tau_V : V \longrightarrow V^{**} = Hom(Hom(V, K), K)$$
$$\tau_V(x) : Hom(V, K) \to K)$$
$$\tau_V(x)(f) = f(x)$$

Jeśli $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są kategoriami to transformacje naturalne pomiędzy funktorami o dziedzinie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ przeciwdziedzinie $\mathcal{D}$ można składać i tworzą one *kategorię funktorów* (i transformacji naturalnych), oznaczaną $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$. $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}(F, G)$ oznacza zbiór (klasę) transformacji z F do G. Izomorfizmy w tej kategorii nazywamy *naturalnymi izomorfizmami.*

Funktor $F : \mathcal{C} \to Set$ ($G : \mathcal{C}^{op} \to Set$) jest *reprezentowalny* jeśli istnieje obiekt $C \in \mathcal{C}$ oraz naturalny izomorfizm $\tau : \mathcal{C}(C, -) \to F$ ($\tau : \mathcal{C}(-, C) \to G$). Parę (C, τ) nazywamy *reprezentacją funktora* F (G).

Przykłady funktorów reprezentowalnych

1. Funktor $\mathcal{P} : Set^{op} \longrightarrow Set$ jest reprezentowany przez obiekt $2 = \{0, 1\}$. Dla zbioru X, składowa $\tau_X : 2^X \to \mathcal{P}(X)$, naturalnego morfizmu $\tau : 2^{(-)} \to \mathcal{P}$ przyporządkowuje funkcjom charakterystycznym podzbiorów, przeciwobrazy 1, tzn $\tau_X(f) = f^{-1}(1)$ dla $f \in 2^X$.

2. Funktor produktu $Set \longrightarrow Set$ t.że $X \mapsto X \times X$ jest reprezentowany przez 2 (ale jako funktor kowariantny).

3. Funktor zapominania $|-| : Gr \longrightarrow Set$ jest reprezentowany przez grupę liczb całkowitych Z, tzn. przez grupę wolną o jednym generatorze.

Ćwiczenia

1. Niech $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą funktorami a $\tau : F \to G$ transformacją naturalną taką, że $\tau_C : F(C) \to G(C)$ jest izomorfizmem dla wszystkich $C \in \mathcal{C}$. Pokaż, że τ jest naturalnym izomorfizmem.

2. Pokaż, że funktory $2^{(-)}, \mathcal{P} : Set^{op} \to Set$ są naturalnie izomorficzne. Wywnioskuj stąd, że $\mathcal{P}$ jest reprezentowalny.

3. Pokaż, że funktor zapominania z kategorii grup Gr w kategorię zbiorów Set jest reprezentowalny.

4. Niech N będzie kategorią, której obiektami są liczby naturalne, a morfizm pomiędzy dwoma obiektami m i n z N istnieje gdy $m \leq n$.

   (a) Dla $n \in N$ opisz funktor reprezentowalny $N(n, -) : N \to Set$.

   (b) Dla dowolnego funktora $F : N \to Set$ i $n \in N$ opisz transformacje z $N(n, -)$ w F.

   (c) Dla $n \in N$ opisz funktor reprezentowalny $N(-, n) : N^{op} \to Set$.

   (d) Dla dowolnego funktora $G : N^{op} \to Set$ i $n \in N$ opisz transformacje z $N(-, n)$ w G.

5. Niech G będzie grupą (tzn. kategorią z jednym obiektem $*$ w której każdy morfizm jest izomorfizmem). Pokaż, że funktor $F : G \to Set$ odpowiada działaniu grupy G na zbiorze $F(*)$. Opisz transformacje naturalne z $G(*, -)$ do dowolnego $F : G \to Set$.

2.4 Równoważność kategorii

Jak już mówiliśmy, często nie ma sensu pytanie: 'czy dwa obiekty kategorii są równe?' ale raczej: 'czy są izomorficzne?'. Szczególnie jeśli są one otrzymane w wyniku różnych konstrukcji. Na przykład, produkty kartezjańskie zbiorów $A \times (B \times C)$ i $(A \times B) \times C$ są różne ale oczywiście w wielu sytuacjach chcemy je utożsamiać ponieważ są one w (naturalny) sposób izomorficzne. Innymi słowy wszystkie 'rozsądne' własności, które ma jeden z obiektów ma też i drugi.

Pojęcie funktora daje nam automatycznie pojęcie *izomorfizmu kategorii*. Mianowicie, jeśli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są kategoriami a $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ takimi, że

$$F \circ G = id_{\mathcal{B}} \quad \text{oraz} \quad G \circ F = id_{\mathcal{A}}$$

to kategorie $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są izomorficzne. Jednak pojęcie izomorfizmu kategorii jest nieco za silne. Na przykład, kategoria grup skończonych Gr_{fin} jest 'w zasadzie' tą samą kategorią co kategoria grup, których nośnikami są liczby naturalne Gr^{ω}_{fin}. Te kategorie oczywiście nie są równe ale też nie są nawet izomorficzne! By móc utożsamiać takie kategorie potrzebne jest słabsze pojęcie niż izomorfizm kategorii. Takim pojęciem jest *równoważność kategorii*. Mówimy, że kategorie $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są *równoważne* jeśli istnieją funktory $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ oraz naturalne izomorfizmy

$$\tau : id_{\mathcal{B}} \to F \circ G \quad \text{oraz} \quad \sigma : id_{\mathcal{A}} \to G \circ F$$

Ćwiczenia

1. Pokaż, że kategorie Gr_{fin} i Gr^{ω}_{fin} są równoważne.

2. Kategoria $\mathcal{A}$ jest *szkieletowa* o ile dla dowolnych obiektów $A, B \in \mathcal{A}$, jeżeli $A \cong B$ to $A = B$. Pokaż, że każda kategoria jest równoważna kategorii szkieletowej.

3. Niech Vec_{fin} będzie kategorią skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad R i przekształceń liniowych. Pokaż, że kategorie Vec_{fin} oraz Vec^{op}_{fin} są równoważne.

4. Niech Rel będzie kategorią zbiorów i relacji, tzn $Rel(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$ (relacje składamy w zwykły sposób). Pokaż, że kategorie Rel oraz Rel^{op} są równoważne.

5. *Kratą* nazywamy częściowy porządek w którym są skończone kresy ($\wedge$ górny i $\vee$ dolny). Krata A jest *dystrybutywna* o ile dla dowolnych $a, b, c \in A$ zachodzi równość:
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
Algebra Boole'a to krata dystrybutywna w której każdy element a ma uzupełnienia $-a$ takie, że
$$a \vee -a = 1 \quad a \wedge -a = 0$$
Pokaż, że kategoria skończonych algebr Boole'a jest równoważna z kategorią dualną do kategorii zbiorów skończonych.

2.5 2-kategoryjne aspekty kategorii Cat

Jak już mówiliśmy dla ustalonych kategorii $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ funktory z $\mathcal{C}$ w $\mathcal{D}$ oraz naturalne transformacje pomiędzy takim funktorami tworzą kategorię oznaczaną $Nat(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ (lub $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$). Zatem jeśli mamy transformacje $\sigma : F \to G$ i $\tau : G \to H$ jak na diagramie

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=H}] & \mathcal{D} \arrow[from=F, to=G, phantom, "\Downarrow\sigma"] \arrow[from=G, to=H, phantom, "\Downarrow\tau"] \end{tikzcd}$$

to *złożenie wertykalne* transformacji naturalnych $\tau \circ \sigma$ jest określone punktowo,tzn. $(\tau \circ \sigma)_C = \tau_C \circ \sigma_C$ dla $C \in \mathcal{C}$.

Ponadto transformacje naturalne możemy składać z funktorami i to z obu stron. Mając kategorie, funktory i naturalną transformację jak w diagramie

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, "F"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G"{name=G}] \arrow[r, bend right, "H"'{name=H}] & \mathcal{D} \arrow[r, "K"] & \mathcal{D}' \arrow[from=G, to=H, phantom, "\Downarrow\sigma"] \end{tikzcd}$$

możemy określić transformację naturalną

$$\sigma_F : G \circ F \longrightarrow H \circ F$$

tak, że $(\sigma_F)_{C'} = \sigma_{F(C')}$ dla $C' \in \mathcal{C}'$ a także transformację naturalną

$$K(\sigma) : K \circ G \longrightarrow K \circ H$$

taką, że $K(\sigma)_C = K(\sigma_C)$ dla $C \in \mathcal{C}$.

Mając dane dwie transformacje naturalne jak w diagramie

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_0"{name=F0}] \arrow[r, bend right, "F_1"'{name=F1}] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "G_0"{name=G0}] \arrow[r, bend right, "G_1"'{name=G1}] & \mathcal{E} \arrow[from=F0, to=F1, phantom, "\Downarrow\sigma"] \arrow[from=G0, to=G1, phantom, "\Downarrow\tau"] \end{tikzcd}$$

możemy zdefiniować *złożenie horyzontalne* tych transformacji

$$\tau * \sigma : G_0 \circ F_0 \longrightarrow G_1 \circ F_1$$

Jak widać z poniższego kwadratu

$$\begin{tikzcd} G_0 \circ F_0 \arrow[r, "\tau_{F_0}"] \arrow[d, "G_0(\sigma)"'] & G_1 \circ F_0 \arrow[d, "G_1(\sigma)"] \\ G_0 \circ F_1 \arrow[r, "\tau_{F_1}"'] & G_1 \circ F_1 \end{tikzcd}$$

istnieją dwie transformacje naturalne z funktora $G_0 \circ F_0$ do $G_1 \circ F_1$. Ewaluując powyższy kwadratu na obiekcie $C \in \mathcal{C}$ otrzymujemy kwadrat

$$\begin{tikzcd}
G_0 \circ F_0(C) \arrow[r, "\tau_{F_0(C)}"] \arrow[d, "G_0(\sigma_C)"'] & G_1 \circ F_0(C) \arrow[d, "G_1(\sigma_C)"] \\
G_0 \circ F_1(C) \arrow[r, "\tau_{F_1(C)}"'] & G_1 \circ F_1(C)
\end{tikzcd}$$

który jest oczywiście przemienny na mocy naturalności transformacji τ na morfiźmie $\sigma_c : F_0(c) \to F_1(c)$. Zatem definiujemy

$$(\tau * \sigma)_C = G_1(\sigma_C) \circ \tau_{F_0(C)} = \tau_{F_1(C)} \circ G_0(\sigma_C)$$

dla $C \in \mathcal{C}$.

Ćwiczenia

1. Pokaż, że wszystkie zdefiniowane powyżej transformacje są naturalne.
2. Pokaż, że złożenie horyzontalne jest łączne.

3 Funktory reprezentowalne

3.1 Lemat Yonedy

Ostatnie dwa ćwiczenia sekcji 2.3 dotyczącej transformacji naturalnych z poprzedniego rozdziału dotyczą szczególnych przypadków Lematu Yonedy, który opisuje transformacje naturalne pomiędzy funktorami reprezentowalnymi a dowolnymi funktorami w Set. Warto jest przestudiować te szczególne przypadki przed przeczytaniem tego rozdziału.

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią lokalnie małą. Przypomnijmy, że $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ oznacza *kategorię presnopów nad* $\mathcal{C}$, to znaczy kategorię funktorów z kategorii $\mathcal{C}^{op}$ (dualnej do kategorii $\mathcal{C}$) do kategorii zbiorów Set. *Włożeniem Yonedy* nazywamy funktor

$$Y : \mathcal{C} \longrightarrow Set^{\mathcal{C}^{op}}$$

taki, że dla $C \in \mathcal{C}$

$$Y(C)(= Y_C) = \mathcal{C}(-, C) : \mathcal{C}^{op} \to Set$$

jest funktorem reprezentowanym przez c, oraz dla $f : C \to C' \in \mathcal{C}$

$$Y(f)(= Y_f) = Y_C \to Y_{C'}$$

jest naturalną transformacją taką, że dla $g : D \to C \in Y_C(D)$

$$(Y_f)_D(g) = f \circ g : D \to C'$$

Ćwiczenie

1. Pokaż, że funktor włożenia Yonedy Y jest dobrze określony.

Lemat 3.1 (Lemat Yonedy) *Dla dowolnego funktora $F : \mathcal{C}^{op} \to Set$ i dowolnego obiektu $C \in \mathcal{C}$ istnieje bijekcja*

$$\sigma_{C,F} : Set^{\mathcal{C}^{op}}(Y_C, F) \longrightarrow F(C)$$

Bijekcja ta jest naturalna w następującym sensie: dla $f : C' \to C$ w $\mathcal{C}$ i $\mu : F \to F'$ diagram

$$\begin{tikzcd}
Set^{\mathcal{C}^{op}}(Y_C, F) \arrow[r, "\sigma_{C,F}"] \arrow[d, "Set^{\mathcal{C}^{op}}(Y_f, \mu)"'] & F(C) \arrow[d, "\mu_{C'} \circ F(f) = F'(f) \circ \mu_C"] \\
Set^{\mathcal{C}^{op}}(Y_{C'}, F') \arrow[r, "\sigma_{C',F'}"'] & F'(C')
\end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Uwaga. Innymi słowy powyższy Lemat mówi, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy transformacjami naturalnymi $\varphi : Y_C \longrightarrow F$ oraz elementami x zbioru $F(C)$. Najistotniejszym aspektem powyższego Lematu jest to, że taka transformacja φ jest jednoznacznie wyznaczona przez przez jeden element $x = \varphi_C(id_C)$ zbioru $F(C)$. A priori, transformacja naturalna jest klasą morfizmów $\{\varphi_C\}_C$ indeksowaną zbiorem obiektów $\mathcal{C}$. Okazuje się, że warunek naturalności transformacji bardzo ogranicza liczbę takich rodzin.

Dowód: Niech $C \in \mathcal{C}$ i $F : \mathcal{C}^{op} \to Set$. By udowodnić pierwszą część Lematu, zdefiniujemy dwie funkcje

$$\sigma_{C,F} : Set^{\mathcal{C}^{op}}(Y_C, F) \longrightarrow F(C)$$

oraz

$$\tau_{C,F} : F(C) \longrightarrow Set^{\mathcal{C}^{op}}(Y_C, F)$$

i pokażemy, że są one wzajemnie odwrotne. Dla $\alpha : Y_C \to F$

$$\sigma_{C,F}(\alpha) = \alpha_C(id_C)$$

a dla $x \in F(C)$

$$\tau_{C,F}(x) : Y_C \longrightarrow F$$

jest transformacją naturalną taką, że dla $g : D \to C$

$$\tau_{C,F}(x)_D(g) = F(g)(x).$$

By pokazać, że $\tau_{C,F}$ jest dobrze określoną funkcją musimy pokazać, ze $\tau_{C,F}(x)$ jest transformacją naturalną. W tym celu pokażemy, że dla dowolnego morfizmu $h : D' \to D$ kwadrat

$$\begin{tikzcd}
Y_C(D) \arrow[r, "\tau_{C,F}(x)_D"] \arrow[d, "Y_C(h)"'] & F(D) \arrow[d, "F(h)"] \\
Y_C(D') \arrow[r, "\tau_{C,F}(x)_{D'}"'] & F(D')
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. Dla dowolnego $g : D \to C \in Y_C(D)$ mamy

$$\begin{aligned}
F(h) \circ \tau_{C,F}(x)_D(g) = &\quad \text{def } \tau_{C,F}(x) \text{ na } g \\
= F(h) \circ F(g)(x) = &\quad (F \text{ funktor}) \\
= F(g \circ h)(x) = &\quad \text{def } \tau_{C,F}(x) \text{ na } g \circ h \\
= \tau_{C,F}(x)_{D'}(g \circ h) = &\quad \text{def } Y_C \\
= \tau_{C,F}(x)_{D'} \circ Y_C(h)(g) &
\end{aligned}$$

Czyli $\tau_{C,F}(x)$ jest rzeczywiście transformacją naturalną.

Teraz pokażemy, że przyporządkowania $\sigma_{C,F}$ i $\tau_{C,F}$ są wzajemnie odwrotne. Dla $x \in F(C)$ mamy

$$\begin{aligned}
\sigma_{C,F} \circ \tau_{C,F}(x) = &\quad \text{def } \sigma_{C_F} \\
= \tau_{C,F}(x)_C(id_C) = &\quad \text{def } \tau_{C,F} \\
= F(id_C)(x) = &\quad F \text{ funktor} \\
= id_{F(C)}(x) = x &
\end{aligned}$$

Niech teraz $\alpha : Y_C \to F$. Chcemy pokazać, że zachodzi równość transformacji naturalnych

$$\tau_{C,F} \circ \sigma_{C,F}(\alpha) = \alpha$$

W tym celu wystarczy pokazać, że mają one równe składowe, to znaczy, że dla dowolnego $D \in \mathcal{C}$ i dowolnego $g : D \to C$ zachodzi

$$(\tau_{C,F} \circ \sigma_{C,F}(\alpha))_D(g) = \alpha_D(g)$$

Mamy

$$\begin{aligned}
(\tau_{C,F} \circ \sigma_{C,F}(\alpha))_D(g) &= \\
= \tau_{C,F}(\sigma_{C,F}(\alpha))_D(g) &= \quad \text{def } \sigma_{C,F} \\
= \tau_{C,F}(\alpha_C(id_C))_D(g) &= \quad \text{def } \tau_{C,F} \\
= F(g)(\alpha_C(id_C)) &= \quad \alpha \text{ nat transf} \\
= \alpha_D(Y_C(g)(id_C)) &= \quad \text{def } Y_g \\
= \alpha_D(g)
\end{aligned}$$

Przedostatnia równość wynika z poniższego diagramu

$$\begin{tikzcd}
Y_C(C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Y_C(g)"'] & F(C) \arrow[d, "F(g)"] \\
Y_C(D) \arrow[r, "\alpha_D"'] & F(D)
\end{tikzcd}$$

który wyraża naturalność α na morfiźmie g. W ten sposób pokazaliśmy, że przyporządkowania $\sigma_{C,F}$ i $\tau_{C,F}$ są wzajemnie odwrotne.

Pozostaje do pokazania druga część Lematu, naturalność przyporządkowania σ. Niech $f : C' \to C \in \mathcal{C}$ oraz niech $\alpha : Y_C \to F$ i $\mu : F \to F'$ będą transformacjami naturalnymi. W szczególności, kwadraty

$$\begin{tikzcd}
Y_{c'}(c) \arrow[r, "(Y_f)_C"] \arrow[dd, "Y_{C'}(f)"'] & Y_C(C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[dd, "Y_C(f)"] & F(C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[dd, "F(f)"] & F'(C) \arrow[dd, "F'(f)"] \\
id_{C'} \arrow[r, mapsto] & f & & \\
Y_{C'}(C') \arrow[r, "(Y_f)_{C'}"'] & Y_C(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & F(C') \arrow[r, "\mu_{C'}"'] & F'(C')
\end{tikzcd}$$

(gdzie $id_C \mapsto f$)

są przemienne. Mamy pokazać, że

$$\begin{tikzcd}
Set^{\mathcal{C}^{op}}(Y_C, F) \ni \alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & \alpha_C(id_C) \in F(C) \arrow[d, mapsto] \\
 & \mu_{C'} \circ F(f)(\alpha_C(id_C)) \arrow[d, equal] \\
Set^{\mathcal{C}^{op}}(Y_{C'}, F') \ni \mu \circ \alpha \circ Y_f \arrow[r, mapsto] & (\mu \circ \alpha \circ Y_f)_{C'}(id_{C'}) \in F'(C')
\end{tikzcd}$$

Mamy

$$\begin{aligned}
(\mu \circ \alpha \circ Y_f)_{C'}(id_{C'}) &= \\
(\mu \circ \alpha)_{C'}((Y_f)_{C'}(id_{C'})) &= \quad \text{def } (Y_f)_{C'}) \\
(\mu \circ \alpha)_{C'}(f) &= \quad \text{def } (Y_C)(f)) \\
= \mu_{C'}(\alpha_{C'} \circ Y_C(f)(id_C)) &= \quad \alpha \text{ nat transf} \\
= \mu_{C'}(F(f) \circ \alpha_C(id_C)) &= \\
= \mu_{C'} \circ F(f)(\alpha_C(id_C))
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Z Lematu Yonedy otrzymujemy

Wniosek 3.2 (Lemat Yonedy II) *Funktor*

$$Y : \mathcal{C} \longrightarrow Set^{\mathcal{C}^{op}}$$

jest wierny i pełny.

Dowód: Dla $c, c' \in \mathcal{C}$ mamy

$$\mathcal{C}(C, C') = Y_{C'}(C) \cong Set^{\mathcal{C}^{op}}(Y_C, Y_{C'})$$

Należy jeszcze zauważyć, że powyższa bijekcja $\tau_{C,Y_{C'}}$ jest dana przez funktor Y. Czyli, że dla $f : C \to C'$

$$\tau_{C,Y_{C'}}(f) = Y_f : Y_C \to Y_{C'}$$

Tę równość naturalnych transformacji sprawdzamy dla wszystkich składowych. Niech $g : D \to C$. Wtedy używając definicji $\tau_{C,Y_{C'}}$, $Y_{C'}(f)$ i Y_f mamy

$$\tau_{C,Y_{C'}}(f)_D(g) = Y_{C'}(f)(g) = f \circ g = (Y_f)_D(g)$$

Q.E.D.

3.2 Elementy uogólnione

Lemat Yonedy jest prostym ale bardzo skutecznym narzędziem. Jeśli popatrzymy na morfizm $x : D \to C$ w kategorii $\mathcal{C}$ jako na 'element uogólniony' obiektu C parametryzowany obiektem D to funktor $Y_C = \mathcal{C}(-, C)$ można traktować jako 'funktor elementów uogólnionych' obiektu C. Przy takim spojrzeniu, z Lematu Yonedy (w wersji II) wynika, że jeżeli dwa obiekty C i C' kategorii $\mathcal{C}$ mają izomorficzne 'funktory elementów' ($Y_C \cong Y_{C'}$) to same też są izomorficzne ($C \cong C'$). Dokładniej, jeżeli dla dowolnego D mamy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie τ_D

$$\frac{x : D \longrightarrow C}{\tau_D(x) : D \longrightarrow C'}$$

takie, że dla $f : D' \to D$,

$$\tau_D(x) \circ f = \tau_{D'}(x \circ f)$$

(czyli mamy naturalny izomorfizm $\tau : Y_C \to Y_{C'}$) to obiekty C i C' są izomorficzne.

W ten sposób możemy również zdefiniować dowolne morfizmy z C w C' w $\mathcal{C}$. W tym celu wystarczy zdefiniować dowolne naturalne przyporządkowanie $\tau : Y_C \longrightarrow Y_{C'}$.

Uwaga. Własność, że dwa obiekty kategorii są izomorficzne jeśli mają izomorficzne funktory elementów jest podobna własność zbiorów wyrażonej w *aksjomacie ekstensjonalności* w teorii mnogości, który mówi, że dwa zbiory są równe gdy mają te same elementy:

$$\forall_x \forall_y (\forall_z \; z \in x \Leftrightarrow z \in x) \Leftrightarrow x = y$$

By pokazać jak daleko idąca jest to analogia omówimy pojęcie kategorii kartezjańsko domkniętych używając elementów uogólnionych. Najpierw jednak kilka obserwacji ogólnych dotyczących funktorów reprezentowalnych.

Z Lematu Yonedy, reprezentacja $\tau : \mathcal{C}(-, C) \to G$ funktora $G : \mathcal{C}^{op} \to Set$ jest jednoznacznie wyznaczona przez parę $\langle C, x \rangle$, dla $x = \tau_C(1_C) \in G(C)$. Oczywiście nie każdy element $x \in G(C)$ wyznacza izomorfizm naturalny funktorów $\mathcal{C}(-, C)$ i G. Para $\langle C, x \in G(C)\rangle$ wyznacza reprezentację funktora wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{D \in \mathcal{C}} \forall_{y \in G(D)} \exists!_{g : D \to C}\ G(g)(x) = y \tag{1}$$

Powyższy warunek łatwo wynika z diagramu

$$\begin{tikzcd}
Y_C(C) \arrow[rrr, "\tau_C"] \arrow[ddd, "Y_C(g)"'] & & & G(C) \arrow[ddd, "G(g)"] \\
& id_C \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[d, mapsto] & \\
& g \arrow[r, mapsto] & y & \\
Y_C(D) \arrow[rrr, "\tau_D"'] & & & G(D)
\end{tikzcd}$$

Dlatego też często mówimy, że para $\langle C, x\rangle$ spełniająca (1) reprezentuje G.

Fakt 3.3 *Reprezentacja $\langle C, x\rangle$ funktora $G : \mathcal{C}^{op} \to Set$, o ile istnieje, jest wyznaczona z dokładnością do izomorfizmu, w tym sensie, że jeśli $\langle C', x'\rangle$ jest inną reprezentacją funktora G to istnieje jedyny izomorfizm $f : C' \to C$ taki, że $G(f)(x) = x'$.*

Dowód: Niech $\langle C, x\rangle$ i $\langle C', x'\rangle$ będą reprezentacjami funktora G. Zatem z warunku (1) dla $\langle C, x\rangle$ mamy morfizm $f : C' \to C$ taki, że $G(f)(x) = x'$ oraz dla $\langle C', x'\rangle$ mamy morfizm $g : C \to C'$ taki, że $G(g)(x') = x$. Wtedy

$$G(f \circ g)(x) = G(g) \circ G(f)(x) = G(g)(G(f)(x)) = G(g)(x') = x = G(id_C)(x)$$

(Pierwsza równość odwraca kolejność f i G ponieważ funkor G jest kontrawariantny.) Ale, znów z warunku (1), morfizm $h : C \to C$ taki, że $G(h)(x) = x$ jest jedyny, zatem $f \circ g = id_C$. Podobnie można pokazać, że $g \circ f = id_{C'}$. Zatem f jest izomorfizmem. Q.E.D.

Przykład Niech A, B, C będą zbiorami. Używając wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania λ_X

$$\frac{x : X \longrightarrow A^B}{\lambda_X(x) : X \times B \longrightarrow A}$$

możemy wykazać, że istnieje bijekcja zbiorów $(A^B)^C$ i $A^{(B \times C)}$. Mamy bowiem

$$\begin{array}{c}
X \longrightarrow (A^B)^C \\ \hline
X \times C \longrightarrow A^B \\ \hline
(X \times C) \times B \longrightarrow A \\ \hline
X \times (C \times B) \longrightarrow A \\ \hline
X \longrightarrow A^{(C \times B)}
\end{array}$$

Należy jeszcze sprawdzić naturalność tej odpowiedniości i otrzymujemy bijekcję pomiędzy zbiorami $(A^B)^C$ i $A^{(B \times C)}$.

Wkrótce przekonamy się, że ten argument dowodzi, że obiekty $(A^B)^C$ i $A^{(C \times B)}$ są izomorficzne w dowolnej kategorii katrtezjańsko domkniętej.

3.3 Przykłady funktorów reprezentowalnych

Przykład 1. *Iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych.*

Wszystkie rozpatrywane przestrzenie liniowe są nad ustalonym ciałem K; $Vect_K$ oznacza kategorię przestrzeni liniowych nad ciałem K.

Niech $BiLin(V, V'; W)$ oznacza zbiór przekształceń dwuliniowych $f : V \times V' \to W$. Ponieważ złożenie przekształcenia dwuliniowego z przekształceniem liniowym $g : W \to W'$ jest znów przekształceniem dwuliniowym $g \circ f : V \times V' \to W'$ to w istocie mamy funktor

$$BiLin(V, V'; -) : Vect_K \longrightarrow Set$$

taki, ze

$$W \mapsto BiLin(V, V'; W)$$

Jeśli para $\langle P, \mu \rangle$ reprezentuje ten funktor to $\mu : V \times V' \to P$ jest przekształceniem dwuliniowym takim, że dla dowolnego przekształcenia dwuliniowego $h : V \times V' \to W$ istnieje jedyne przekształcenie liniowe $\bar{h} : P \to W$ uprzemienniające diagram

$$\begin{tikzcd} V \times V' \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "h"'] & & P \arrow[dl, "\bar{h}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Czyli reprezentacja funktora $BiLin(V, V'; -)$ to po prostu zwykła definicja iloczyny tensorowego przestrzeni wektorowych, gdzie $P = V \otimes V'$ oraz $\mu : V \times V' \longrightarrow V \otimes V'$ jest uniwersalnym przekształceniem dwuliniowym z $V \times V'$ (w tym sensie, że każde inne przekształcenie dwuliniowe jest złożeniem tego przekształcenia z liniowym w jedyny sposób).

W poniższych przykładach będziemy analizowali jaki konsekwencje dla kategorii $\mathcal{C}$ płyną z faktu, że pewne funktory są reprezentowalne.

Przykład 2. *Obiekt końcowy*

Rozważmy funktor stały $\top : C^{op} \longrightarrow Set$ wysyłający wszystkie obiekty $\mathcal{C}$ na zbiór jednoelementowy $\{0\}$ i wszystkie morfizmy na morfizmy na $1_{\{0\}}$. Jeśli funktor $\top$ jest reprezentowalny to istnieje obiekt $\mathbf{1}$ o tej własności, że funktor $\mathcal{C}(-, \mathbf{1})$ jest izomorficzny z $\top$. Zatem z każdego obiektu c kategorii $\mathcal{C}$ musi istnieć dokładnie jeden morfizm w 1. Wtedy para $\langle \mathbf{1}, 0 \rangle$ jest reprezentacją $\top$ (oczywiście element 0 w tym wypadku nie niesie żadnej istotnej informacji). Obiekt $\mathbf{1}$ reprezentujący funktor $\top$ nazywamy *obiektem końcowym.*

W kategorii *Set* każdy zbiór jednoelemnetowy jest obiektem końcowym. W kategorii *Ab*, grup abelowych, obiektem końcowym jest (każda!) grupa jednoelemntowa.

Przykład 2'. *Obiekt początkowy*

Dualnie, możemy rozważyć funktor stały $\perp : C \longrightarrow Set$ wysyłający wszystkie obiekty $\mathcal{C}$ na zbiór jednoelementowy $\{0\}$ i wszystkie morfizmy na morfizmy na $1_{\{0\}}$. Jeśli funktor $\perp$ jest reprezentowalny to istnieje obiekt $\mathbf{0}$ o tej własności, że funktor $\mathcal{C}(\mathbf{0}, -)$ jest izomorficzny z $\perp$. Zatem z $\mathbf{0}$ do każdego obiektu c kategorii $\mathcal{C}$ musi istnieć dokładnie jeden morfizm. Wtedy para $\langle \mathbf{0}, 0 \rangle$ jest reprezentacją $\perp$ (podobnie jak poprzednio element 0 nie niesie żadnej istotnej informacji). Obiekt $\mathbf{0}$ reprezentujący funktor $\perp$ nazywamy *obiektem początkowym.* W kategorii *Set* zbiór pusty jest obiektem początkowym; zatem $\mathbf{1} \ncong \mathbf{0}$ w tym przypadku. W kategorii *Ab* obiektem początkowym jest grupa jednoelemntowa; zatem $\mathbf{1} \cong \mathbf{0}$ w tym przypadku.

Przykład 3. *Produkt binarny*

Niech A i B będą obiektami $\mathcal{C}$. Rozważmy funktor

$$\mathcal{C}(-,A)\times\mathcal{C}(-,B) : C^{op} \longrightarrow Set$$

zdefiniowany w sposób oczywisty. Jeśli ten funktor jest reprezentowalny to jego reprezentacja składa się z obiektu p i dwóch morfizmów $\pi_A : P \to A$ oraz $\pi_B : P \to B$ takich, że na mocy warunku (1) dla dowolnej pary morfizmów $f : D \to A$ oraz $g : D \to B$ istnieje jedyny morfizm $\langle f, g\rangle : D \to P$ taki, że $\pi_A \circ \langle f, g\rangle = f$ oraz $\pi_B \circ \langle f, g\rangle = g$. Taki obiekt, oznaczany zwykle $A \times B$, wraz z morfizmami $\pi_A : A \times B \to A$ i $\pi_B : A \times B \to B$ nazywamy *produktem binarnym* A i B.

$$\begin{tikzcd} A & A\times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\ & D \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\langle f,g\rangle"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Jeśli $f : A \to A'$ i $g : B \to B'$ są dwoma morfizmami to ich produkt kartezjański $f \times g : A \times B \to A' \times B'$ jest definiowany jak jedyny morfizm uprzemienniający poniższy diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A\times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "f\times g"] & B \arrow[d, "g"] \\ A' & A'\times B' \arrow[l, "\pi_{A'}"] \arrow[r, "\pi_{B'}"'] & B' \end{tikzcd}$$

W Set produkt binarny jest zwykłym produktem kartezjańskim z rzutowaniami.

Przykład 3'. *Koprodukt binarny*

Dualnie dla obiektów A i B kategorii $\mathcal{C}$, możemy zdefiniować funktor

$$\mathcal{C}(A,-)\times\mathcal{C}(B,-) : C \longrightarrow Set$$

zdefiniowany w sposób oczywisty. Jeśli ten funktor jest reprezentowalny to jego reprezentacja składa się z obiektu Q i dwóch morfizmów $\kappa_A : A \to Q$ oraz $\kappa_B : B \to Q$ takich, że na mocy warunku (1) dla dowolnej pary morfizmów $f : A \to D$ oraz $g : B \to D$ istnieje jedyny morfizm $[f, g] : Q \to D$ taki, że $[f, g]\kappa_A = f$ oraz $[f, g]\kappa_B = g$. Taki obiekt, oznaczany zwykle $A + B$, wraz z morfizmami *włożenia* (lub *koprojekcjami*) $\kappa_A : A \to A + B$ i $\kappa_A : A \to A + B$ nazywamy *koproduktem binarnym* A i B.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\kappa_A"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, "{[f,g]}"] & B \arrow[l, "\kappa_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

W Set koprodukt binarny A i B jest sumą rozłączną, tzn. $(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$ z oczywistymi włożeniami.

Przykład 4. *Obiekt wykładniczy*

Załóżmy, że w $\mathcal{C}$ istnieją produkty binarne dowolnej pary obiektów. Niech A i B będą obiektami $\mathcal{C}$. Wtedy możemy zdefiniować funktor

$$\mathcal{C}(A \times (-), B) : C^{op} \longrightarrow Set$$

następujący sposób

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & & \mathcal{C}(A \times C, B) \ni h \circ (1_A \times f)) \\
C' & \longmapsto & \mathcal{C}(A \times C', B) \ni h \arrow[u, "\mathcal{C}(A \times f, B)"']
\end{tikzcd}$$

Jeśli $\mathcal{C}$ jest kategorią Set to ten funktor jest reprezentowalny przez obiekt wykładniczy b^a wszystkich funkcji z A w B, tzn. Mamy oczywistą wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy zbiorami funkcji

$$Set(C, B^A) \cong Set(A \times C, B)$$

która jest naturalna w C. Przy tej odpowiedniości id_{B^A} przechodzi na funkcję ewaluacji $ev_{A,B} : A \times B^A \to B$ taką, że $ev_{A,B}(x, h) = h(x)$ dla $x \in A$ oraz $h \in B^A$. To znaczy, że w Set taki funktor jest reprezentowany przez parę $\langle B^A, ev_{A,B} : A \times B^A \to B \rangle$.

Przez analogie z tą sytuacją jeśli w dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ z produktami binarnymi funktor $\mathcal{C}(A \times (-), B)$ jest reprezentowalny to parę reprezentującą ten funktor oznaczamy $\langle B^A, ev_{A,B} \rangle$ i nazywamy *obiektem wykładniczym.*

Warunek (1) w tym przypadku oznacza, że dla dowolnego morfizmu $h : A \times C \to B$ istnieje jedyny morfizm $\bar{h} : C \to b^a$ taki, że trójkąt

$$\begin{tikzcd}
B^A & & A \times B^A \arrow[r, "ev"] & B \\
C \arrow[u, "\bar{h}"] & & A \times C \arrow[u, "1_A \times \bar{h}"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Kategoria $\mathcal{C}$ jest *kartezjańsko domknięta* jeśli ma obiekt końcowy, produkty binarne i obiekt wykładniczy. Kategoria kartezjańsko domknięta $\mathcal{C}$ jest *bikartezjańsko domknięta* jeśli ma obiekt początkowy i koprodukty binarne.

3.4 Formalne prawa w kategoriach kartezjańsko domkniętych

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią kartezjańsko domkniętą, A, B obiekty $\mathcal{C}$. Rozważmy takie prawo

$$A \times B \cong B \times A \tag{2}$$

które mówi, że stosowne obiekty są izomorficzne czyli, że istnieje izomorfizm pomiędzy nimi. W rzeczywistości my chcemy powiedzieć coś więcej mianowicie, że istnieje *kanoniczny* izomorfizm, choć nie jest łatwo sformułować w ogólności co rozumiemy pod pojęciem kanonicznego izomorfizmu.

Pierwszy dowód. Pokażemy bijekcję pomiędzy zbiorami $\mathcal{C}(D, A \times B)$ oraz $\mathcal{C}(D, B \times A)$ naturalną w D:

$$\begin{array}{c}
D \longrightarrow A \times B \\
\hline
D \longrightarrow A, \;\; D \longrightarrow B \\
\hline
D \longrightarrow B, \;\; D \longrightarrow A \\
\hline
D \longrightarrow B \times A
\end{array}$$

Każda linia reprezentuje bijekcję pomiędzy obiektami powyżej i poniżej. Pierwsza i ostatnia wynika bezpośrednio z definicji produktu w kategorii $\mathcal{C}$. Bijekcja środkowa jest przestawieniem dwóch elementów w parze uporządkowanej (czyli korzystamy tu z niejako z przemienności produktu kartezjańskiego w Set. Łatwo(!) sprawdzić, że ta odpowiedniość jest naturalna w D, tzn. że dostajemy w ten sposób naturalny izomorfizm funktorów $\tau : \mathcal{C}(-, A \times B) \longrightarrow \mathcal{C}(-, B \times A)$. Teraz z Lematu Yonedy (w wersji II) otrzymujemy izomorfizm $A \times B \cong B \times A$. Ten izomorfizm to oczywiście $\tau_{A\times B}(id_{A\times B})$ ale nie zawsze jest łatwo znaleźć konkretne wyrażenie opisujące taki morfizm. Q.E.D.

Drugi dowód. Ten dowód jest mniej intuicyjny ale bardziej bezpośredni bo konstruuje eksplicite izomorfizm pomiędzy obiektami $A \times B$ i $B \times A$. Mając produkty

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B \qquad\qquad B \xleftarrow{\pi'_B} B \times A \xrightarrow{\pi'_A} A$$

to znaczy reprezentacje funktorów $\mathcal{C}(-, A\times B)$ oraz $\mathcal{C}(-, B\times A)$ możemy zdefiniować morfizmy

$$p = \langle \pi_B, \pi_A \rangle : A \times B \longrightarrow B \times A, \qquad\qquad q = \langle \pi'_A, \pi'_B \rangle : B \times A \longrightarrow A \times B$$

Mamy

$$\pi_A \circ (q \circ p) = \pi_A \circ \langle \pi'_A, \pi'_B \rangle \circ \langle \pi_B, \pi_A \rangle = \pi'_A \circ \langle \pi_B, \pi_A \rangle = \pi_A = \pi_A \circ 1_{A\times B}$$

i podobnie

$$\pi_B \circ (q \circ p) = \pi_B \circ \langle \pi'_A, \pi'_B \rangle \circ \langle \pi_B, \pi_A \rangle = \pi'_B \circ \langle \pi_B, \pi_A \rangle = \pi_B = \pi_B \circ 1_{A\times B}$$

Zatem złożenia z rzutowaniami z produktu $A \times B$ morfizmów $q \circ p$ oraz $1_{A\times B}$ są równe. Wobec tego te morfizmy też są równe i mamy $q \circ p = 1_{A\times B}$. Równość $p \circ q = 1_{B\times A}$ można pokazać analogicznie. Zatem $p = \langle \pi_B, \pi_A \rangle$ jest rzeczywiście szukanym izomorfizmem. Q.E.D.

3.5 *Cat* jako kategoria kartezjańsko domknięta

Cat ma oczywiście obiekt końcowy $\mathbf{1}$ kategorię z jednym obiektem i jednym morfizmem (identycznościowym). Cat ma też produkty binarne. Jeśli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są kategoriami to $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ jest kategorią, której obiektami są pary obiektów $< A, B >$ takie, że $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$, a morfizmami pary morfizmów $< f, g >:< A, B >\to< A', B' >$ takie, że $f \in \mathcal{A}$ i $g \in \mathcal{B}$. Złożenia i identyczności są definiowane w $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ po współżędnych. Nieco trudniej jest zobaczyć jak wygląda obiekt wykładniczy $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$. Na chwilę założymy, że $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ istnieje i ustalimy czemu odpowiadają obiekty i morfizmy w $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$. A następnie pokażemy, że taka kategoria ma rzeczywiście żądane włsności.

Zauważmy, że dla dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ mam wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy obiektami $\mathcal{C}$ i funktorami z $\mathbf{1}$ w $\mathcal{C}$, to znaczy

$$\frac{Ob(\mathcal{C})}{\mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C}}$$

Używając tej odpowiedniości i własności $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ mamy

$$\begin{array}{c} Ob(\mathcal{B}^{\mathcal{A}}) \\ \hline \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \\ \hline \mathcal{A} \cong \mathbf{1} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \end{array}$$

Zatem obiekty $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ odpowiadją funktorom z $\mathcal{A}$ w $\mathcal{B}$. Podobnie morfizmy dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ odpowiadają wzajemnie jednoznacznie funktorom z $\mathbf{2}$ (kategorii o dwóch obiektach 0 i 1 i jednym morfiźmie nieidentycznościowym $2 : 0 \to 1$), to znaczy

$$\frac{Mor(\mathcal{C})}{\mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{C}}$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, używając tej odpowiedniości i własności $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ mamy

$$\begin{array}{c} Mor(\mathcal{B}^{\mathcal{A}}) \\ \hline \mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \\ \hline \mathbf{2} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \end{array}$$

Funktor $F : \mathbf{2} \times \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ odpowiada naturalnej transformacji $F^2 : F^0 \to F^1$, gdzie $F^i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ takie, że $F^i(f : A \to A') = F(i, f)$ dla $i = 0, 1$ oraz $F^2_A = F(2, A) : F^0(A) \to F^1(A)$.

Podobnie można sprawdzić jak wyglądają złożenia w Cat używając kategorii $\mathbf{3}$.

Zdefiniujmy zatem $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ jako $Cat(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ kategorię funktorów z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ i transformacji naturalnych pomiędzy nimi. By pokazać, że tak zdefiniowana kategoria $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ jest obiektem wykładniczym musimy pokazać, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość

$$\frac{\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}}}{\mathcal{A} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}}$$

naturalna w $\mathcal{C}$.

Niech $F : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ będzie funktorem, $A \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{C}$. F wyznacza *sekcje*

$$F_{1,C} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad\qquad F_{2,A} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$$

takie, że

$$F_{1,C}(f : A \to A') = F(f, id_C) : F(A, C) \to F(A', C)$$
$$F_{2,A}(g : C \to C') = F(id_A, g) : F(A, C) \to F(A, C')$$

Mamy

Lemat 3.4 *Funktor $F : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez rodziny swoich sekcji*

$$< F_{1,C} : \mathcal{A} \to \mathcal{B} >_{C \in Ob(\mathcal{C})} \qquad\qquad < F_{2,A} : \mathcal{C} \to \mathcal{B} >_{A \in Ob(\mathcal{A})} \tag{3}$$

Rodziny mofizmów (3) są sekcjami pewnego funktora F wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych morfizmów $f : A \to A'$ i $g : C \to C'$ kwadrat

$$\begin{tikzcd} F_{1,C}(A) = F_{2,A}(C) \arrow[r, "F_{2,A}(g)"] \arrow[d, "F_{1,C}(f)"'] & F_{2,A}(C') = F_{1,C'}(A) \arrow[d, "F_{1,C'}(f)"] \\ F_{1,C}(A') = F_{2,A'}(A) \arrow[r, "F_{2,A'}(g)"'] & F_{2,A'}(C) = F_{1,C'}(A') \end{tikzcd} \tag{4}$$

jest przemienny.

Dowód: Dla $< f, g >:< A, C >\to< A', C' >$ mamy

$$< f, g >=< f, id_{C'} > \circ < id_A, g >=< id_{A'}, g > \circ < f, id_C >$$

Zatem

$$F(f, g) = F_{2,A'}(g) \circ F_{1,C}(f) = F_{1,C'}(f) \circ F_{2,A}(g)$$

Czyli sekcje funktora F wyznaczaja go jednoznacznie.

Niech teraz dane będą rodziny morfizmów (3) takie, że kwadrat (4) jest przemienny. Dla $< A, C >\in \mathcal{A} \times \mathcal{C}$ definiujemy

$$F(A, C) = F_{1,C}(A) = F_{2,A}(C)$$

oraz dla $< f, g >:< A, C >\to< A', C' >\in A \times C$ definiujemy

$$F(f, g) = F_{1,C'}(f) \circ F_{2,A}(g) = F_{2,A'}(g) \circ F_{1,C}(f)$$

Tak określone F zachowuje dziedziny i przeciwdziedziny. Weryfikację, że F zachowuje też złożenia i identyczności pozostawiamy czytelnikowi.

Q.E.D.

Fakt 3.5 *Kategoria Cat jest kategoria kartezjańsko domkniętą.*

Dowód: Niech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ będą kategoriami małymi. Mamy pokazać wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość

$$\frac{\mathcal{C}' \xrightarrow{\quad H \quad} \mathcal{C} \xrightarrow{\quad F = \overline{G} \quad} \mathcal{B}^{\mathcal{A}}}{\mathcal{A} \times \mathcal{C}' \xrightarrow{id_{\mathcal{A}} \times H} \mathcal{A} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\quad \widehat{F} = G \quad} \mathcal{B}}$$

naturalną w $\mathcal{C}$. Dla $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ rodziny funktorów

$$< F_{1,C} = F(C) : \mathcal{A} \to \mathcal{B} >_{C \in Ob(\mathcal{C})} \qquad < F_{2,A} : \mathcal{C} \to \mathcal{B} >_{A \in \mathcal{A}}$$

gdzie

$$F_{2,A}(C) = F(C)(A) \qquad F_{2,A}(g) = F(g)_A$$

dla $g : C \to C' \in \mathcal{C}$, spełniają warunek z Lematu 3.4. Zatem istnieje funktor $\widehat{F} : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, którego są one sekcjami. To znaczy, że

$$\widehat{F}(A, C) = F(C)(A) \qquad \widehat{F}(f, g) = F_{1,C'}(f) \circ F_{2,A}(g) = F(C')(f) \circ F(g)_A$$

dla $f : A \to A' \in \mathcal{A}$ i $g : C \to C' \in \mathcal{C}$.

Dla funktora $G : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ określamy funktor

$$\overline{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$$

tak, że dla $C \in \mathcal{C}$

$$\overline{G}(C) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

jest funktorem takim, że

$$\overline{G}(C)(A) = G(A, C)$$

dla $A \in \mathcal{A}$

$$\overline{G}(C)(f) = G(f, id_C) : G(A, C) \to G(A', C)$$

dla $f : A \to A'$, oraz dla $g : C \to C'$

$$\overline{G}(g) : \overline{G}(C) \longrightarrow \overline{G}(C')$$

transformacją naturalną taką, że

$$\overline{G}(g)_A = G(id_A, g) : G(A, C) \to G(A, C')$$

dla $A \in \mathcal{A}$.

Pokażemy, że przyporządkowania $F \mapsto \widehat{F}$ i $G \mapsto \overline{G}$ są wzajemnie odwrotne i naturalne w $\mathcal{C}$, czyli

$$\widehat{F} \circ (id_{\mathcal{A}} \times H) = \widehat{F \circ H}$$

Dla $f : A \to A' \in \mathcal{A}$ i $g : C \to C' \in \mathcal{C}$ mamy

$$\overline{\widehat{F}}(C)(A) = \widehat{F}(A, C) = F_{1,C}(A) = F(C)(A)$$

$$\overline{\widehat{F}}(C)(f) = \widehat{F}(f, id_C) = F_{1,C}(f) = F(C)(f)$$

$$\overline{\widehat{F}}(g)_A = \widehat{F}(id_A, g) = F_{2,A}(g) = F(g)_A$$

Zatem $\overline{\widehat{F}} = F$. Ponadto

$$\widehat{\overline{G}}(A, C) = \overline{G}_{1,C}(A) = G(A, C)$$

$$\widehat{\overline{G}}(f, g) = \overline{G}_{1,C'}(f) \circ \overline{G}_{2,A}(g) = G(f, id_{C'}) \circ G(id_A, g) = G(f, g)$$

Zatem $\widehat{\overline{G}} = G$.
Na koniec dla $< A, C > \in \mathcal{A} \times \mathcal{C}'$ i $< f, g >:< A, C > \to < A', C' > \in \mathcal{A} \times \mathcal{C}'$ mamy

$$\widehat{F} \circ (id_{\mathcal{A}} \times H)(A, C) = \widehat{F}(A, H(C)) =$$

$$= F_{2,A}(H(C)) = (F \circ H)_{2,A}(C) = \widehat{F \circ H}(A, C)$$

oraz

$$\widehat{F} \circ (id_{\mathcal{A}} \times H)(f, g) = \widehat{F}(f, H(g)) =$$

$$= F_{1,H(C')}(f) \circ F_{2,A}(H(g)) = F(H(C'))(f) \circ F(H(g))_A =$$

$$= (F \circ H)(C')(f) \circ (F \circ H)(g)_A = \widehat{F \circ H}(f, g)$$

Zatem przyporządkowania $\widehat{(-)}$ i $\overline{(-)}$ są rzeczywiście naturalne w $\mathcal{C}$.
Q.E.D.

4 Granice funktorów

4.1 Przykłady granic

Obiekt końcowy *Obiektem końcowym* nazywamy taki obiekt **1** w kategorii w który istnieje dokładnie jeden morfizm z każdego innego obiektu.

Przykłady

1. W Set obiektem końcowym jest każdy zbiór jednoelementowy, w Gr i Ab jest to grupa trywialna, w $Vect_k$ jest to przestrzeń liniowa zerowa, a w Top jest to przestrzeń topologiczna jednoelementowa.
2. Częściowy porządek ma obiekt końcowy wtedy i tylko wtedy gdy ma element największy.
3. Kategoria ciał nie ma obiektu końcowego.

Produkt binarny Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią, a A, B obiektami w $\mathcal{A}$. *Produktem binarnym* (produktem) A i B nazywamy obiekt $A \times B$ wraz z *rzutowaniami* $\pi_A : A \times B \to A$ i $\pi_B : A \times B \to B$ takie, że dla dowolnego obiektu C kategorii $\mathcal{A}$ i morfizmów $f : C \to A$ i $g : C \times B$ istnieje *dokładnie jeden* morfizm $< f, g >: C \to A \times B$ uprzemienniający poniższy diagram

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "< f,g >"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Przykłady

1. Kategorie Set, Gr, $Vect_K$, Top mają produkty binarne. W każdej z nich produkt binarny jest definiowany jak produkt kartezjański uniwersów wyposażony w odpowiednią strukturę produktową.
2. W częściowym porządku produkty binarne to kresy dolne par elementów.
3. Kategoria ciał nie ma produktów.

Ekwalizator Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią, a $f, g : A \to B$ równoległą parą morfizmów w $\mathcal{A}$. *Ekwalizatorem* f i g nazywamy obiekt E wraz z morfizmem $e : E \to A$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

takie, że $f \circ e = g \circ e$ oraz dla dowolnego obiektu C kategorii $\mathcal{A}$ i morfizmu $h : C \to A$ takiego, że $f \circ h = g \circ h$ istnieje *dokładnie jeden* morfizm $k : C \to E$ taki, że $h = e \circ k$.

Przykłady

1. W Set ekwalizator morfizmów f i g to największy podzbiór ich wspólnej dziedziny na którym f i g są zgodne. W Ab ekwalizator f i g to jądro różnicowe, tzn. jądro homomorfizmu $f - g$.

Produkt włóknisty Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią, a $f : A \to C$ $g : B \to C$ parą morfizmów w $\mathcal{A}$. *Produktem włóknistym* (lub *pulbekiem*) f i g (lub A i B nad C jeśli wiadomo o jakie morfizmy chodzi) nazywamy obiekt $A \times_C B$ wraz z *rzutowaniami* $\pi_A : A \times_C B \to A$ i $\pi_B : A \times_C B \to B$ tak, że $f \circ \pi_A = g \circ \pi_B$

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

oraz dla dowolnego obiektu D kategorii $\mathcal{A}$ i morfizmów $h : D \to A$ i $k : D \to B$ takich, że $f \circ h = g \circ k$ istnieje *dokładnie jeden* morfizm $\langle h, k\rangle : C \to D \times_C B$ taki, że

$$\pi_A \circ \langle h, k\rangle = h \quad \text{oraz} \quad \pi_B \circ \langle h, k\rangle = k$$

Przykłady

1. W *Set* pulbek A i B nad C można opisać tak

$$A \times_C B \cong \{\langle a, b\rangle \in A \times B |\ f(a) = g(b)\} \cong \coprod_{c \in C} f^{-1}(c) \times g^{-1}(c)$$

   Ta druga charakteryzacja pokazuje, że pulbek jest sumą rozłączną po elementach C produktów włókien funkcji f i g (stąd nazwa produkt włóknisty).

4.2 Definicja granicy funktora

Wszystkie powyższe pojęcia są szczególnymi przykładami pojęcia granicy funktora. Niech $\mathcal{J}$ i $\mathcal{A}$ będą kategoriami $A \in \mathcal{A}$. *Funktor stały* z $\mathcal{J}$ w $\mathcal{A}$ o wartości A jest to funktor $\Delta_A : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$, przyporządkowujący obiektom $\mathcal{J}$ obiekt A a morfizmom z $\mathcal{J}$ morfizm 1_A. Niech $F : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ będzie funktorem. *Stożkiem* nad funktorem F o wierzchołku A nazywamy transformację naturalną $\tau : \Delta_A \longrightarrow F$. To znaczy, że dla dowolnego $\alpha : i \to j$, trójkąt

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Morfizmem stożków nad F, $f : (A, \tau) \to (B, \sigma)$ nazywamy morfizm $f : A \to B$ w $\mathcal{A}$ taki, że $\tau_i = \sigma_i \circ f$ dla $i \in \mathcal{J}$. W ten sposób zdefiniowaliśmy kategorię stożków nad F, $Cone(F)$. Mówimy, że F *ma granicę* o ile kategoria $Cone(F)$ ma obiekt końcowy. Wtedy każdy obiekt końcowy (A, τ) nazywamy *granicą funktora F* (oznaczenie: $(Lim\,F, \tau)$). Mówimy, że kategoria $\mathcal{A}$ *ma (skończone) granice* (lub że jest *(skończenie) zupełna*) o ile każdy funktor z kategorii małej (skończonej) w $\mathcal{A}$ ma granicę.

4.3 Granice via produkty i ekwalizatory

Jak już widzieliśmy istnienie niektórych granic pociąga za sobą istnienie innych. Poniższy lemat nietylko stwierdza, że kategoria *Set* jest zupełna, ale podaje opis tych granic w duch opisu produktów przez produkty i ekwalizatory.

Lemat 4.1 *Granicę dowolnego funktora $F : \mathcal{J} \to Set$ (gdzie $\mathcal{C}$ jest kategorią małą) można przedstawić jako zbiór:*

$$Lim\, F = \{< a_i >_{i\in\mathcal{J}} \in \prod_{i\in\mathcal{J}} F(c) : F(\alpha)(a_i) = a_j \text{ dla } \alpha : i \to j \in \mathcal{J}\}$$

(czyli jako 'elementy produktu spełniające pewne równości') wraz z rzutowaniami

$$\tau_i : Lim\, F \longrightarrow F(i)$$

takimi, że

$$\tau_i(< a_j >_{j\in\mathcal{J}}) = a_i$$

Dowód: Najpierw zauważmy, że istnieje naturalny izomorfizm funktorów σ

$$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, bend left, "id_{Set}"] \arrow[r, bend right, "Set(1,-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \sigma"] & Set \end{tikzcd}$$

taki, że dla zbioru X, $\sigma_X(x) : 1 = \{*\} \to X$ jest funkcją taką, że $\sigma_X(x)(*) = x$. Innymi słowy elementy zbioru X odpowiadają funkcjom z obiektu końcowego 1 w X. Zatem, jeśli umiemy opisać funkcje z 1 w X to umiemy opisać X z dokładnością do izomorfizmu. Ponieważ granice są wyznaczone z dokładnością do izomorfizmu, oraz łatwo jest opisać morfizmy w granicę, to ta 'sztuczka' (czytaj: trick) posłuży nam do pokazania, że stożek opisany w lemacie jest rzeczywiście stożkiem granicznym nad F, o ile granica F istnieje.

Załóżmy, na chwilę, że granice F istnieje i że (X, σ) jest stożkiem granicznym nad F. Mamy wtedy następujące odpowiedniości (odpowiedniości są w kolumnie pierwszej a objaśnienia tych odpowiedniości są kolumnach drugiej i trzeciej) :

$x \in X$	element X	
$\tilde{x} : 1 \to X$	morfizm z 1 w X	$\tilde{x}(*) = x$
$\chi : 1 \to F$	stożek nad F	$\chi_i = \tau_i \circ \tilde{x}$
$x_i \in F(i)$ dla $i \in \mathcal{J}$ t.że $F(\alpha)(x_i) = x_j$ dla $\alpha : i \to j \in \mathcal{J}$	zgodna rodzina elementów F	$x_i = \chi_i(*)$
$\vec{x} \in \prod_{i\in\mathcal{J}} F(i)$ t.że $F(\alpha)(x_i) = x_j$ dla $\alpha : i \to j \in \mathcal{J}$	'zgodny element produktu' $\prod_{i\in\mathcal{J}} F(i)$	$\pi_i(\vec{x}) = x_i$
$\vec{x} \in Lim\, F$	element zbioru $Lim\, F$	$\vec{x}$

Te rozważania pokazują, że o ile granica (X, σ) funktora F istnieje to X musi być izomorficzny z $Lim\, F$. Pozostaje do pokazania, że $(Lim\, F, \tau)$ jest rzeczywiście stożkiem granicznym nad funktorem F. Ale to pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. Q.E.D.

W dowolnej kategorii nie mamy do dyspozycji elementów w dosłownym tego słowa znaczeniu ale i tak możemy powtórzyć tę konstrukcję. Mamy następujący fakt:

Fakt 4.2 *Jeżeli kategoria $\mathcal{A}$ ma:*

1. *dowolne małe produkty i ekwalizatory to $\mathcal{A}$ jest zupełna;*
2. *skończone produkty i ekwalizatory to $\mathcal{A}$ jest skończenie zupełna;*

Dowód: Udowodnię tylko pierwszy fakt. Niech $F : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ będzie funktorem z kategorii małej. Tworzymy dwa produkty:

$$\prod_{i \in \mathcal{J}} F(i) \quad \text{oraz} \quad \prod_{\alpha \in \mathcal{J}} F(cod(\alpha))$$

Pomiędzy tymi produktami definiujemy dwa morfizmy których ekwalizatorem jest E:

$$\begin{tikzcd}
 & & F(cod(\alpha)) & \\
E \arrow[r, "e"'] & \prod_{i\in\mathcal{J}} F(i) \arrow[ur, "\pi_{cod(\alpha)}"] \arrow[rr, shift left, "<\pi_{cod(\alpha)}>_{\alpha\in\mathcal{J}}"] \arrow[rr, shift right, "<F(\alpha)\circ\pi_{dom(\alpha)}>_{\alpha\in\mathcal{J}}"'] \arrow[d, "\pi_{dom(\alpha))}"'] & & \prod_{\alpha\in\mathcal{J}} F(cod(\alpha)) \arrow[ul, "\pi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
 & F(dom(\alpha)) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(cod(\alpha))
\end{tikzcd}$$

Rodzina morfizmów $(E, (\tau_i = \pi_i \circ e : E \to F(i))_{i \in \mathcal{J}})$ jest stożkiem nad F ponieważ dla dowolnego morfizmu $\alpha : i \to j$ trójkąt

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "\pi_i \circ e"'] \arrow[dr, "\pi_j \circ e"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. Z drugiej strony stożek (D, σ) definiuje morfizm

$$d = < \sigma_i >_{i \in \mathcal{J}} : D \longrightarrow \prod_{i \in \mathcal{J}} F(i)$$

który ekwalizuje dwa morfizmy między produktami. Zatem istnieje jedyny morfizm $h : D \to E$ taki, że $e \circ h = d$. Łatwo pokazać, że h jest też morfizmem ze stożka (D, σ) w (E, τ) Q.E.D.

5 Kogranice funktorów

Pojęcie kogranicy funktora jest dualne do pojęcia granicy funktora. Jednak zwykle kogranice są znacznie trudniejsze niż granice.

5.1 Definicja kogranicy funktora

Dla funktora $F : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ mamy *funktor dualny* $F^{op} : \mathcal{J}^{op} \to \mathcal{A}^{op}$, który na obiektach i morfizmach jest tak samo określony jak F. Wtedy stożek (graniczny) funktora F^{op} jest *kostożkiem (kogranicznym)* funktora F. Funktor F ma *kogranicę* wtedy i tylko wtedy gdy F^{op} ma granicę. Oczywiście można zdefiniować kogranice funktorów w bardziej bezpośredni sposób bez odwoływania się do kategorii dualnej. Dla wygody czytelnika przytoczę też tą definicję. Kostożkiem nad funktorem $F : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ o wierzchołku A nazywamy dowolną transformację naturalną $\kappa : F \to \Delta_A$ z F w funktor stały Δ_A, tzn., że dla dowolnego $\alpha : i \to j \in \mathcal{J}$, trójkąt

$$\begin{tikzcd} & A & \\ F(i) \arrow[ur, "\tau_i"] \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(j) \arrow[ul, "\tau_j"'] \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Morfizmem kostożków nad F, $f : (A, \tau) \to (B, \sigma)$ nazywamy morfizm $f : A \to B$ w $\mathcal{A}$ taki, że $f \circ \tau_i = \sigma_i$ dla $i \in \mathcal{J}$. W ten sposób zdefiniowaliśmy kategorię kostożków nad F, $Cocone(F)$. Mówimy, że F *ma kogranicę* o ile kategoria $Cocone(F)$ ma obiekt początkowy. Wtedy każdy obiekt początkowy (A, τ) nazywamy *kogranicą funktora* F (oznaczenie: $(Colim\, F, \kappa)$).

Mówimy, że kategoria $\mathcal{A}$ *ma (skończone) kogranice* (lub że jest *(skończenie) kozupełna*) o ile każdy funktor z kategorii małej (skończonej) w $\mathcal{A}$ ma kogranicę.

5.2 Przykłady kogranic

Dla każdego rodzaju granic mamy odpowiadający mu rodzaj kogranic.

Obiekt początkowy *Obiektem początkowym* nazywamy taki obiekt $\mathbf{0}$ w kategorii z którego istnieje dokładnie jeden morfizm w każdy inny obiekt. Równoważnie można zdefiniować obiekt początkowy jako kogranicę funktora z kategorii pustej.

Przykłady

1. W *Set* obiektem początkowym jest zbiór pusty, w *Top* przestrzeń pusta.
2. W kategoriach grup *Gr* i grup abelowych *Ab* obiektem początkowym jest grupa jednoelementowa, w $Vect_K$ przestrzeń jednoelementowa.
3. W kategorii pierścieni *Rng* obiektem początkowym jest pierścień liczb całkowitych Z.
4. W częściowym porządku obiektem początkowym jest element najmniejszy.

Koprodukt binarny Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią, a A, B obiektami w $\mathcal{A}$. *Koproduktem (binarnym)* A i B nazywamy obiekt $A+B$ wraz z *włożeniami* $\kappa_A : A \to A + B$ i $\kappa_B : B \to A+B$ tak, że dla dowolnego obiektu C kategorii $\mathcal{A}$ i morfizmów $f : A \to C$ i $g : B \to C$ istnieje *dokładnie jeden* morfizm $[f, g] : A + B \to C$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} & C & \\ & {[f,g]} \arrow[u] & \\ A \arrow[uur, "f"] \arrow[r, "\kappa_A"'] & A+B \arrow[u, dash] & B \arrow[l, "\kappa_B"] \arrow[uul, "g"'] \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Równoważnie można zdefiniować koprodukt binarny jako kogranicę funktora z kategorii dyskretnej dwuelementowej, tzn. mającej dwa obiekty i żadnych morfizmów poza identycznościami.

Przykłady

1. W *Set* koprodukty to *sumy rozłączne*, można je opisać w następujący sposób. Jeśli A i B są zbiorami to $A + B$ można opisać jako $(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$. Wtedy włożenia są określone jako

$$\kappa_A(a) = \langle 0, a\rangle, \qquad \kappa_B(b) = \langle 1, b\rangle$$

   dla $a \in A$ oraz $b \in B$.

2. W kategorii przestrzeni topologicznych Top koprodukty binarne to sumy rozłączne z najbogatszą topologią, przy której oba włożenia są ciągłe.

3. W kategorii Ab i $Vect_K$ koprodukty binarne to produkty binarne wraz z włożeniami. Dla $A, B \in Ab$, oraz $a \in A$, $b \in B$ mamy

$$\kappa_A(a) = \langle a, 0\rangle, \qquad \kappa_B(b) = \langle 0, b\rangle$$

   dla $a \in A$ oraz $b \in B$ (0 - element neutralny obu grup).

4. W kategorii pierścieni przemiennych $CRng$ koprodukt binarny pierścienie A i B jest to iloczyn tensorowy tych pierścienie $A \otimes_Z B$ traktowanych jako Z-moduły. Włożenia w koprodukt są dane wzorami

$$\kappa_A(a) = a \otimes 1, \qquad \kappa_B(b) = 1 \otimes b$$

   dla $a \in A$ oraz $b \in B$.

5. W częściowym porządku koprodukty binarne to kresy górne par elementów.

Koekwalizator Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią, a $f, g : A \to B$ równoległą parą morfizmów w $\mathcal{A}$. *Koekwalizatorem* f i g nazywamy obiekt Q wraz z morfizmem $q : A \to Q$ taki, że $q \circ f = q \circ g$ oraz dla dowolnego obiektu C kategorii $\mathcal{A}$ i morfizmów $h : A \to C$ takiego, że $h \circ f = h \circ g$ istnieje *dokładnie jeden* morfizm $k : Q \to C$ taki, że $h = q \circ k$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "h"'] & & Q \arrow[dl, "\exists!\, k"] \\ & & C & \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Równoważnie można zdefiniować koekwalizator jako kogranicę funktora z kategorii, która ma dwa obiekty i, poza identycznościami, dwa równoległe morfizmy pomiędzy nimi:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \end{tikzcd}$$

Przykłady

1. W Set koekwalizator pary morfizmów $f, g : A \to B$ można opisać jako zbiór ilorazowy $B_{/\sim}$ podzielony przez najmniejszą relację równoważności $\sim$, zawierającą relację $\sim_0 = \{\langle f(a), g(a)\rangle | a \in A\}$. Wtedy $q(b) = [b]_\sim$ dla $b \in B$.

2. W Top koekwalizator można opisać tak jak powyżej w Set, przy czym topologia na zbiorze ilorazowym Q jest to najbogatsza topologia przy której q jest funkcją ciągłą.

3. W kategorii grup abelowych Ab koekwalizator pary homomorfizmów $f, g : A \to B$ to kojądro różnicowe. Funkcja $f - g : A \to B$ też jest homomorfizmem, jej obraz $im(f - g)$ jest podgrupą (normalną) grupy B a koekwalizator Q to grupa ilorazowa $Q = B_{/im(f-g)}$, wraz z morfizmem q takim, że $q(b) = b + (im(f - g))$, dla $b \in B$.

4. W kategorii grup Gr koekwalizator pary homomorfizmów $f, g : A \to B$ jest konstruowany podobnie do powyższej konstrukcji w kategorii Ab z tym, że teraz nie mamy pewności, że $f - g$ jest homomorfizmem i że obraz tej funkcji jest podgrupą normalną w B. Musimy zatem domknąć zbiór $\{f(a) - g(a) | a \in A\} \subseteq B$ do podgrupy normalnej $N \triangleleft B$ i wtedy koekwalizator f i g jest grupą ilorazową $Q = B_{/N}$, a morfizm w $q : B \to Q$ jest dany wzorem $q(b) = b + N$, dla $b \in B$.

Koprodukt włóknisty Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią, a $f : C \to A$ $g : C \to B$ parą morfizmów w $\mathcal{A}$. *Koproduktem włóknistym* (lub *puszautem* f i g (lub A i B nad C jeśli wiadomo o jakie morfizmy chodzi) nazywamy obiekt $A +_C B$ wraz z *włożeniami* $\kappa_A : A \to A +_C B$ i $\kappa_B : B \to A +_C B$ takie, że $\kappa_A \circ f = \kappa_B \circ g$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "\kappa_A"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
B \arrow[r, "\kappa_B"'] \arrow[drr, "k"'] & A +_C B \arrow[dr, "\exists![h,k]"] & \\
 & & D
\end{tikzcd}$$

oraz dla dowolnego obiektu D kategorii $\mathcal{A}$ i morfizmów $h : A \to D$ i $k : B \to D$ takich, że $h \circ f = k \circ g$ istnieje dokładnie jeden morfizm $[h, k] : A +_C B \to D$ taki, że

$$[h, k] \circ \kappa_A = h \quad \text{oraz} \quad [h, k] \circ \kappa_B = k$$

Równoważnie można zdefiniować koprodukt włóknisty binarny jako kogranicę funktora z kategorii, która ma trzy obiekty i, poza identycznościami, dwa równoległe morfizmy tak jak na rysunku:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\
\bullet &
\end{tikzcd}$$

Przykłady

1. W Set koprodukt włóknisty zbiorów A i B nad C otrzymujemy dzieląc ich sumę rozłączną $(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$ przez najmniejszą relację równoważności $\sim$ generowaną przez relację $\sim_0 = \{\langle\langle 0, f(c)\rangle\langle 1, g(c)\rangle\rangle : c \in C\}$. Wtedy włożenia są określone wzorem
$$\kappa_A(a) = [\langle 0, a\rangle]_\sim, \qquad \kappa_B(b) = [\langle 1, b\rangle]_\sim$$
dla $a \in A$ oraz $b \in B$.

2. W kategorii grup Gr koprodukt włóknisty zbiorów A i B nad C otrzymujemy dzieląc ich sumę rozłączną $A + B$ przez najmniejszą podgrupę normalna $N \lhd A + B$ taką, że kwadrat
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "\kappa_A"] \\ B \arrow[r, "\kappa_B"'] & (A+B)_{/N} \end{tikzcd}$$
jest przemienny.

5.3 Zachowywanie granic i kogranic

Niech
$$\begin{tikzcd} \mathcal{J} \arrow[r, "F"] & \mathcal{A} \arrow[r, "G"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$
będą funktorami, A obiektem kategorii $\mathcal{A}$, $\sigma : \Delta_A \to F$ stożkiem nad funktorem F, tzn. dla dowolnego morfizmu $\alpha : i \to j \in \mathcal{J}$ trójkąt
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\sigma_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$
jest przemienny. Ponieważ G jest funktorem to trójkąt
$$\begin{tikzcd} & G(A) \arrow[dl, "G(\sigma_i)"'] \arrow[dr, "G(\sigma_j)"] & \\ G \circ F(i) \arrow[rr, "G \circ F(\alpha)"'] & & G \circ F(j) \end{tikzcd}$$
też jest przemienny. Zatem $G(\sigma) : \Delta_{G(A)} \longrightarrow G \circ F$ jest stożkiem nad funktorem $G \circ F$. Taki stożek to obraz stożka $\langle A, \sigma\rangle$ przy funktorze G. W szczególności funktory przekształcają stożki na stożki. Oczywiście dualny fakt też jest prawdziwy: każdy funktor przekształca kostożki na kostożki.

Funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *zachowuje granice (kogranice)* jeśli przekształca wszystkie stożki graniczne (kostożki kograniczne) funktorów z kategorii małych w stożki graniczne (kostożki kograniczne).

Oprócz funktorów zachowujących wszystkie granice lub kogranice możemy oczywiście wyróżniać funktory zachowujące pewne szczególne klasy granic lub kogranic. Na przykład funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *zachowuje skończone granice (skończone kogranice)* jeśli przekształca wszystkie stożki graniczne (kostożki kograniczne) funktorów z kategorii skończonych w stożki graniczne (kostożki kograniczne).

5.4 Kreowanie granic

Niech $U : Gr \longrightarrow Set$ będzie funktorem zapominania z kategorii grup w Set, G_0, G_1 będą grupami a diagram

$$U(G_0) \xleftarrow{\pi_0} U(G_0) \times U(G_1) \xrightarrow{\pi_1} U(G_1)$$

produktem ich uniwersów $U(G_0)$ i $U(G_1)$ w kategorii Set. Wtedy na zbiorze $U(G_0) \times U(G_1)$ istnieje jedyna struktura grupy $G = (U(G_0) \times U(G_1), \circ, 1e)$ taka, że rzutowania $\pi_0 : G \to G_0$ oraz $\pi_1 : G \to G_1$ są homomorfizmami grup. Ponadto stożek

$$U(G_0) \xleftarrow{\pi_0} G \xrightarrow{\pi_1} U(G_1)$$

jest produktem G_0 i G_1 w Gr. W takiej sytuacji mówimy, że funktor U kreuje produkt grup G_0 i G_1. Poniżej podajemy ogólną definicję tego pojęcia.

Mówimy, że funktor $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *kreuje granicę* funktora $H : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A}$ jeśli

1. dla dowolnego stożka granicznego $\tau : b \to G \circ H$ w $\mathcal{B}$ istnieje jedyny stożek $\sigma : a \to H$ w $\mathcal{A}$ taki, że $G(a) = b$ i $G(\sigma) = \tau$);

2. (a, σ) jest stożkiem granicznym.

Funktor $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *kreuje granice* jeśli G kreuje granice wszystkich funktorów z kategorii kategorii małych. Funktor $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *kreuje kogranice* jeśli funktor dualny $G^{op} : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{B}^{op}$ *kreuje granice.*

Przykłady.

1. Funktor zapominania $U : Gr \longrightarrow Set$ kreuje granice i filtrujące kogranice.

2. Powyższy przykład jest szczególnym przypadkiem pewnej ogólniejszej sytuacji. Niech T będzie finitarną teorią równościową, $Alg(T)$ kategorią algebr równościowych, $U_T : Alg(T) \to Set$ funktorem zapominania. Wtedy funktor U_T kreuje granice i filtrujące kogranice.

3. Dla dowolnej kategorii małej $\mathcal{C}$ funktor zapominania $Set^{\mathcal{C}} \longrightarrow Set^{Ob(\mathcal{C})}$ przyporządkowujący funktorowi $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Set$ w $Set^{\mathcal{C}}$ rodzinę zbiorów $\{F(c)\}_{c \in Ob(\mathcal{C})}$ w $Set^{Ob(\mathcal{C})}$, kreuje granice i kogranice.

4. Funktor $U : Comp \longrightarrow Set$ zapominania z kategorii przestrzeni zwartych w Set kreuje granice.

Poniższy fakt jest użytecznym sposobem na sprawdzenie czy jakaś kategoria ma granice (lub kogranice) i jak one wyglądają.

Fakt 5.1 *Jeśli funktor $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ kreuje granice oraz $\mathcal{B}$ jest kategorią (skończenie) zupełną to $\mathcal{A}$ też jest kategorią (skończenie) zupełną i G zachowuje (skończone) granice.*

Dowód: Jeśli funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kreuje granicę funktora $H : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ to w szczególności $\mathcal{A}$ ma granicę funktora H oraz G zachowuje granice funktora H. Zatem jeśli $\mathcal{B}$ jest kategorią (skończenie) zupełną to $\mathcal{A}$ też jest kategorią (skończenie) zupełną oraz G zachowuje (skończone) granice. Q.E.D.

5.5 Kogranice funktorów w Set

Opiszemy teraz konstrukcję kogranicy $(Colim\, F, \kappa)$ dowolnego funktora $F : \mathcal{J} \to Set$ z kategorii małej $\mathcal{J}$. Z definicji kogranicy, dla dowolnego zbioru S, mamy odpowiedniość

$$\frac{\sigma : F \longrightarrow \Delta_S \qquad \in Set^{\mathcal{J}}}{h : Colim\, F \longrightarrow S \quad \in Set}$$

to znaczy h jest taką funkcją, że $h \circ \kappa_i = \sigma_i$, dla dowolnego $i \in \mathcal{J}$. Intuicyjnie stożek $(Colim\, F, \kappa)$ powinien być 'stożkiem wolnym na F' generowanym przez zbiory F_i, tzn. elementy zbioru $Colim\, F$ muszą 'pochodzić' ze zbioru

$$|F| = \coprod_{i \in \mathcal{J}} F_i = \{\langle i, x \rangle : i \in \mathcal{J},\ x \in F_i\}.$$

Dowolny stożek $\sigma : F \to \Delta_S$ nad F wyznacza funkcję

$$|F| \longrightarrow S$$

$$\langle i, x \rangle \mapsto \sigma_i(x)$$

która definiuje relację równoważności $\sim_\sigma$ na $|F|$ wzorem

$$\langle i, x \rangle \sim_\sigma \langle i', x' \rangle \ \text{ iff } \ \sigma_i(x) = \sigma_{i'}(x')$$

tzn., utożsamiamy te pary $\langle i, x \rangle \in |F|$, które są posyłane przez σ na ten sam element w S. Jeśli $\alpha : i \to j \in \mathcal{J}$ to trójkąt

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "F_\alpha"] \arrow[dr, "\sigma_i"'] & & F_j \arrow[dl, "\sigma_j"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Zatem dla $x \in F_i$, mamy $\sigma_i(x) = \sigma_j(F_\alpha(x))$ i wtedy

$$\langle i, x \rangle \sim_\sigma \langle j, F_\alpha(x) \rangle \tag{5}$$

Czyli warunek (5) musi zachodzić dla dowolnego stożka σ nad F, dowolnego $\alpha : i \to j \in \mathcal{J}$ i dowolnego $x \in F_i$. Niech teraz $\sim_0$ będzie najmniejszą relacją równoważności na $|F|$ taką, że

$$\langle i, x \rangle \sim_0 \langle j, F_\alpha(x) \rangle \tag{6}$$

dla dowolnego $\alpha : i \to j \in \mathcal{J}$ oraz $x \in F_i$. Oczywiście taka najmniejsza relacja istnieje jako przecięcie wszystkich relacji równoważności $\sim$ na $|F|$ spełniających warunek (6). Definiujemy kogranicę F jako zbiór klas abstrakcji relacji $\sim_0$

$$Colim\, F = |F|_{/\sim_0}$$

oraz włożenia

$$\kappa_i : F_i \longrightarrow |F|$$

tak, że dla $i \in \mathcal{J}$ oraz $x \in F_i$

$$x \mapsto [\langle i, x \rangle]$$

. κ jest kostożkiem, ponieważ dla dowolnego $\alpha : i \to j \in \mathcal{J}$ trójkąt

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "F_\alpha"] \arrow[dr, "\kappa_i"'] & & F_j \arrow[dl, "\kappa_j"] \\ & Colim\, F & \end{tikzcd}$$

jest przemienny

$$\kappa_i(x) = [\langle i, x\rangle] = [\langle j, F_\alpha(x)\rangle] = \kappa_j(F_\alpha(x)) = \kappa_j \circ F_\alpha(x)$$

dla $x \in F_i$. Należy jeszcze pokazać, że dla dowolnego kostożka $\sigma : F \to \Delta_S$ istnieje jedyny morfizm $h : Colim\, F \to S$ taki, że trójkąt

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "\kappa_i"] \arrow[dr, "\sigma_i"'] & & Colim\, F \arrow[dl, "h"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Taka funkcja h, o ile istnieje, musi być określona wzorem

$$h([\langle i, x\rangle]) = \sigma_i(x)$$

Powyższy wzór definiuje funkcję o ile nie zależy od wyboru reprezentanta, a tak jest wtedy i tylko wtedy gdy

$$\langle i, x\rangle \sim_0 \langle i', x'\rangle \quad \text{implikuje} \quad \sigma_i(x) = \sigma_{i'}(x') \tag{7}$$

dla dowolnych $\langle i, x\rangle$, $\langle i', x'\rangle \in |F|$. Ale warunek (7) jest spełniony jako, że na mocy (5) i (6) mamy $\sim_0 \subseteq \sim_\sigma$. To kończy opis kogranicy funktora F.

5.6 Kogranice funktorów reprezentowalnych w $Set^{\mathcal{C}^{op}}$

Niech X będzie zbiorem. Wtedy X można reprezentować jako $\coprod_{x\in X} \mathbf{1}$. Innymi słowy X jest kogranicą obiektu końcowego indeksowanego zbiorem X. Ponieważ Set jest równoważny kategorii funktorów $Set^{\mathbf{1}^{op}}$ oraz przy tym utożsamieniu jedyny (z dokładnością do izomorfizmu) funktor reprezentowalny $\mathbf{1}(-, 1) : \mathbf{1}^{op} \to Set$ jest identyfikowany z obiektem końcowym Set, to powyższe obserwacje można podsumować tak: każdy obiekt X w $Set^{\mathbf{1}^{op}}$ jest kogranicą funktorów reprezentowalnych indeksowaną kategorią (dyskretną, której obiektami są elementy) X. Okazuje się, że kategoria $\mathbf{1}$ nie jest tu wyjątkiem. Jeśli odpowiednio zdefiniujemy pojęcie 'kategorii elementów funktora' to podobny fakt będzie zachodził dla dowolnej kategorii małej $\mathcal{C}$. Poniżej zajmę się tym uogólnieniem.

Kategoria elementów funktora Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią małą a $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Set$ funktorem. Obiektami *kategorii* $\int_{\mathcal{C}} F$ *elementów funktora* F są pary (C, x) takie, że $C \in \mathcal{C}$ i $x \in F(C)$. Morfizmem $f : (C, x) \to (C', x')$ w $\int_{\mathcal{C}} F$ jest morfizm $f : C \to C'$ w $\mathcal{C}$ taki, że

$$F(f)(x') = x$$

(zauważmy miejsca x i x' w powyższej definicji). Mamy funktor rzutowania:

$$\pi_F : \int_{\mathcal{C}} F \longrightarrow \mathcal{C}$$

taki, że

$$\pi_F(f : (C, x) \to (C', x')) = f : C \to C'$$

dla $f : (C,x) \to (C',x') \in \mathcal{C}$. Ponadto dla $(C,x) \in \mathcal{C}$ definiujemy transformację naturalną

$$\tau^F_{(C,x)} : Y(C) \circ \pi_F(C,x) = Y(C) = \mathcal{C}(-,C) \longrightarrow F$$

taką, że

$$\tau^F_{(C,x)}(id_C) = x$$

NB. Zauważmy, że z lematu Yonedy wynika, że powyższy warunek jednoznacznie wyznacza transformację naturalną $\tau^F_{(C,x)}$.

Fakt 5.2 *Dla dowolnego funktora F w $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, para (F,τ^F) jest kostożkiem kogranicznym nad funktorem $Y \circ \pi_F$.*

Dowód: Musimy pokazać, że

1. τ^F jest kostożkiem;
2. τ^F jest obiektem początkowym w kategorii kostożków nad $Y \circ \pi_F$.

Ad 1. Niech $f : (C,x) \to (C',x') \in \int_{\mathcal{C}} F$. Mamy pokazać, że trójkąt

$$\begin{tikzcd}
 & & F & & \\
 & & x = F(f)(x') & & \\
 & id_C \arrow[ur, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & f \arrow[ul, mapsto] & \\
Y(C) \arrow[uurr, "\tau_{(c,x)}"] \arrow[rrrr, "Y(f)"'] & & & & Y(C') \arrow[uull, "\tau_{(C',x')}"']
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. A to wynika z definicji morfizmu $f : (C,x) \to (C',x')$ w $\int_{\mathcal{C}} F$.

Ad 2. Niech (G,σ) będzie innym kostożkiem na $Y \circ \pi_F$. Definiujemy morfizm stożków $\alpha : F \to G$ tak, by dla dowolnego (C,x) w $\int_{\mathcal{C}} F$ trójkąt

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "\alpha"] & & G \\
 & Y(c) \arrow[ul, "\tau_{(C,x)}"] \arrow[ur, "\sigma_{(C,x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

był przemienny. Dla $x \in F(C)$ kładziemy

$$\alpha_C(x) = \sigma_{(C,x)}(id_C)$$

Oczywiście by α była morfizmem stożków nad $Y \circ \pi_F$, α musi spełniać powyższy warunek. Zatem o ile α jest dobrze określonym morfizmem w $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ to jest to jedyny morfizm stożków z (F,τ) do (G,σ). Zatem pozostaje do pokazania, że α jest transformacją naturalną. Niech $f : C \to C'$ będzie morfizmem w $\mathcal{C}$. Pokażemy, że kwadrat

$$\begin{tikzcd}
F(C') \arrow[rrr, "\alpha_{C'}"] \arrow[ddd, "F(f)"'] & & & G(C') \arrow[ddd, "G(f)"] \\
 & x' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \sigma_{(C',x')_{C'}}(id_{C'}) \arrow[d, mapsto] & \\
 & F(f)(x') \arrow[r, mapsto] & \sigma_{(C,F(f)(x'))_C}(id_C) = G(f)(\sigma_{(C',x')_{C'}}(id_{C'})) & \\
F(C) \arrow[rrr, "\alpha_C"'] & & & G(C)
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. Korzystając z faktu, że $\sigma_{(C',x')}$ jest naturalną transformacja, i w szczególności kwadrat dla morfizmu f

$$\begin{tikzcd}
Y_{C'}(C') \arrow[rrr, "\sigma_{(C',x')_{C'}}"] \arrow[ddd, "Y_{C'}(f)"'] & & & G(C') \arrow[ddd, "G(f)"] \\
& id_{C'} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x' \arrow[d, mapsto] & \\
& f \arrow[r, mapsto] & \sigma_{(C',x')_C}(f) = G(f)(x') & \\
Y_{C'}(C) \arrow[rrr, "\sigma_{(C',x')_C}"'] & & & G(C)
\end{tikzcd}$$

jest przemienny, oraz σ jest stożkiem nad G i w szczególności dla morfizmu

$$f : (C, F(f)(x')) \to (C', x') \quad \text{w} \quad \int_{\mathcal{C}} F$$

trójkąt

$$\begin{tikzcd}
Y \circ \pi_F(C,x) = Y_C \arrow[d, "Y \circ \pi_F(f)"', "Y_f"] \arrow[dr, "\sigma_{(C,F(f)(x'))}"] & \\
Y \circ \pi_F(C',x') = Y_{C'} \arrow[r, "\sigma_{(C',x')}"'] & G
\end{tikzcd}$$

jest przemienny, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\sigma_{(C,F(f)(x'))_C}(id_C) = & \qquad (\sigma \text{ kostożek}) \\
= \sigma_{(C',x')_C} \circ (Y_f)_C(id_C) = & \qquad (\text{def } Y_f) \\
= \sigma_{(C',x')_C}(f) = & \qquad (\sigma_{(C',x')} \text{ nat. transf.}) \\
= G(f)(x') = & \qquad (\text{def. } \sigma_{(C',x')}) \\
= G(f) \circ \sigma_{(C',x')_{C'}}(id_{C'}) &
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Wniosek 5.3 *Każdy funktor w* $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ *jest kogranicą funktorów reprezentowalnych.*

6 Funktory sprzężone

Pojęcie funktora sprzężonego jest jednym z najważniejszych pojęć w teorii kategorii. Często istnienie funktora sprzężonego (lewego lub prawego) do danego funktora jest głębokim faktem mającym daleko idące konsekwencje. Wiele pojęć można definiować postulując istnienie funktorów sprzężonych do istniejących już funktorów. Na przykład pojęcie obiektu wykładniczego (i kategorii kartezjańsko domkniętej) jest wygodnie definiować w ten sposób.

6.1 Dwa przykłady sprzężeń funktorów

Zanim podam definicję ogólną przyjrzymy się dwóm szczególnym sprzężeniom funktorów. Na tych dobrze znanych przykładach chcę pokazać szereg konstrukcji związanych ze sprzężeniami, które później ujmiemy w sposób ogólny.

Przykład 1: obiekt wykładniczy

Funktory Mamy dwa funktory

$$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, shift left, "A \times (-)"] & Set \arrow[l, shift left, "(-)^A"] \end{tikzcd}$$

takie, że dla $f : X \to Y$

$$A \times (-)(f : X \to Y) = (id_A \times f) : A \times X \longrightarrow A \times Y$$

dla $\langle a, x\rangle \in A \times X$,

$$(id_A \times f)(a, x) = \langle a, f(x)\rangle$$

oraz

$$(-)^A(f : X \to Y) = f^A : X^A \longrightarrow Y^A$$

dla $g \in X^A$,

$$f^A(g) = f \circ g$$

Naturalny izomorfizm Te funktory indukują dwa funktory z $Set^{op} \times Set$ w Set:

$$\begin{tikzcd} Set^{op} \times Set \arrow[r, bend left, "Set(A \times (-), =)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "Set(-, (=)^A)"'{name=D}] & Set \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow \varphi"] \end{tikzcd}$$

które są naturalnie izomorficzne. Mamy bowiem bijekcję

$$\varphi_{X,Y} : Set(A \times X, Y) \longrightarrow Set(X, Y^A)$$

taką, że dla $f : A \times X \to Y$, $x \in X$, $a \in A$

$$\varphi_{X,Y}(f)(x)(a) = f(a, x)$$

Dla dowolnych zbiorów X, Y mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość $\varphi_{X,Y}$ funkcji, która jest naturalna w X i w Y. Jeśli $g = \varphi_{X,Y}(f)$ to mówimy, że g jest transpozycją f (a f jest transpozycją g) i oznaczamy to tak

$$\frac{f : A \times X \to Y}{g : X \to Y^A}$$

Naturalność φ można przedstawić jako wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość funkcji

$$\frac{A \times X' \xrightarrow{id_A \times k} A \times X \xrightarrow{f = \varphi^{-1}_{X,Y}(g)} Y \xrightarrow{h} Y'}{X' \xrightarrow[k]{} X \xrightarrow[g = \varphi_{X,Y}(f)]{} Y^A \xrightarrow[h^A]{} Y'^A} \tag{8}$$

lub krócej

$$h^A \circ \varphi_{X,Y}(f) \circ k = \varphi_{X',Y'}(h \circ f \circ (id_A \times k))$$

Jedność i kojedność Niech X, Y będą zbiorami a η_X i ε_Y transpozycjami identyczności (w dwóch różnych kierunkach). To znaczy η_X jest transpozycją $id_{A\times X}$,

$$\frac{id_{A\times X} : A \times X \to A \times X}{\eta_X : X \to (A \times X)^A}$$

$$\eta_X(x)(a) = \langle a, x\rangle$$

dla $x \in X$, $a \in A$, a ε_Y jest transpozycją id_{Y^A},

$$\frac{id_{Y^A} : Y^A \to Y^A}{\varepsilon_Y : A \times Y^A \to Y}$$

$$\varepsilon_Y(a, f) = f(a)$$

dla $a \in A$, $f \in Y^A$. Czyli ε_Y jest morfizmem ewaluacji. Łatwo sprawdzić, że zarówno η jak i ε są naturalnymi transformacjami

$$\eta : 1_{Set} \longrightarrow (A \times (-))^A, \qquad \eta : A \times (-)^A \longrightarrow 1_{Set}$$

Znając η_X, ε_Y dla dowolnych X i Y możemy odtworzyć φ. Dla $f : A\times X \to Y$ mamy

$$\frac{A \times X \xrightarrow{id_{A\times X}} A \times X \xrightarrow{f} Y}{X \xrightarrow[\eta_X]{} (A \times X)^A \xrightarrow[f^A]{} Y^A}$$

Czyli $\varphi_{X,Y}(f) = f^A \circ \eta_X$. Podobnie dla $g : X \to Y^A$ mamy

$$\frac{X \xrightarrow{g} Y^A \xrightarrow{id_{Y^A}} Y^A}{A \times X \xrightarrow[id_A \times g]{} A \times Y^A \xrightarrow[\varepsilon_Y]{} Y}$$

Czyli $\varphi^{-1}_{X,Y}(g) = \varepsilon_Y \circ (id_A \times g)$.

Łatwo sprawdzić, że

$$\eta : id_{Set} \to (A \times (-))^A$$

i

$$\varepsilon : A \times (-)^A \to id_{Set}$$

są naturalnymi transformacjami.

Morfizmy uniwersalny i kouniwersalny Ponadto dla dowolnego X, morfizm η_X ma następującą własność:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "\eta_X"] & & A \times X \arrow[dd, "f"'] \\
& (A \times X)^A \arrow[dl, "f^A"] & \\
Y^A & & Y
\end{tikzcd}
$$

dla dowolnego Y i $g : X \to Y^A$ istnieje jedyny morfizm $f : A \times X \to Y$ taki, że

$$g = f^A \circ \eta_X$$

Oczywiście $f(a, x) = g(x)(a)$, dla $a \in A$ i $x \in X$.

Podobnie, dla dowolnego Y, morfizm ε_Y ma następującą własność:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "g"'] & A \times X \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "id_A \times g"] & \\
& & A \times Y^A \arrow[dl, "\varepsilon_Y"] \\
Y^A & Y &
\end{tikzcd}
$$

dla dowolnego X i $f : A \times X \to Y$ istnieje jedyny morfizm $g : X \to Y^A$ taki, że

$$f = \varepsilon_Y \circ id_A \times g$$

Oczywiście $g(x)(a) = f(a, x)$, dla $a \in A$ i $x \in X$.

Morfizm o własności η_X jest morfizmem uniwersalnym z X w funktor $(-)^A$, a morfizm o własności ε_Y jest morfizmem kouniwersalnym z funktora $A \times (-)$ w Y. Ogólne definicje zostaną sformułowane w następnym paragrafie.

Równości trójkątne Na koniec zauważmy, że poniższe dwa trójkąty

$$
\begin{tikzcd}
& A \times (A \times X)^A \arrow[dr, "\varepsilon_{A \times X}"] & \\
A \times X \arrow[ur, "id_A \times \eta_X"] \arrow[rr, "id_{A \times X}"'] & & A \times X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (A \times Y^A)^A \arrow[dr, "(\varepsilon_Y)^A"] & \\
Y^A \arrow[ur, "\eta_{Y^A}"] \arrow[rr, "id_{Y^A}"'] & & Y^A
\end{tikzcd}
$$

są przemienne.

Przykład 2: monoid wolny

Funktory Niech Mon będzie kategorią monoidów. Mamy dwa funktory

$$
\begin{tikzcd}
Set \arrow[r, shift left, "F"] & Mon \arrow[l, shift left, "U"]
\end{tikzcd}
$$

F jest funktorem monoidu wolnego a U jest funktorem zapominania. To znaczy, że

1. dla zbioru X, $F(X)$ jest monoidem wolnym nad X, czyli zbiorem słów nad X;
2. dla funkcji $f : X \to Y$, $F(f) : F(X) \to F(Y)$ jest homomorfizmem monoidów wolnych indukowanym przez f (dla $x \in X$ mamy $F(f)(x) = f(x)$);
3. dla monoidu M, $U(M)$ jest uniwersum monoidu M (też oznaczane przez M);
4. dla homomorfizmu monoidów $h : M \to N$, $U(h)$ jest to ten sam homomorfizm traktowany jako funkcja pomiędzy uniwersami.

Naturalny izomorfizm Podobnie jak w poprzednim przykładzie, funktory F i U indukują dwa funktory z $Set^{op} \times Mon$ w Set:

$$\begin{tikzcd} Set^{op} \times Mon \arrow[r, bend left, "{Mon(F(-),=)}"] \arrow[r, bend right, "{Set(-,U(=)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & Set \end{tikzcd}$$

które są naturalnie izomorficzne. Mamy bowiem bijekcję

$$\varphi_{X,M} : Set(F(X), M) \longrightarrow Set(X, U(M))$$

taką, że dla $h : F(X) \to M$, $x \in X$,

$$\varphi_{X,M}(h)(x) = h(x)$$

Dla dowolnych zbioru X i monoidu M, mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość $\varphi_{X,M}$, która jest naturalna w X i w M. Jeśli $g = \varphi_{X,M}(h)$ to mówimy, że g jest transpozycją h (a h jest transpozycją g) i oznaczamy to tak

$$\frac{h : F(X) \to M}{g : X \to U(M)}$$

Naturalność φ można przedstawić jako wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość funkcji i homomorfizmów

$$\frac{F(X') \xrightarrow{F(k)} F(X) \xrightarrow{h = \varphi^{-1}_{X,Y}(g)} M \xrightarrow{h'} N}{X' \xrightarrow[k]{} X \xrightarrow[g = \varphi_{X,Y}(h)]{} U(M) \xrightarrow[U(h')]{} U(N)} \qquad (9)$$

lub krócej

$$U(h') \circ \varphi_{X,Y}(h) \circ k = \varphi_{X',N}(h \circ f \circ F(k))$$

Jedność i kojedność Podobnie jak poprzednio, funkcja $\eta_X : X \to UF(X)$ jest definiowana jako transpozycja homomorfizmu identycznościowego $id_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ a homomorfizm $\varepsilon_M : FU(M) \to M$ jest definiowany jako transpozycja funkcji identycznościowej $id_{U(M)} : U(M) \to U(M)$. Funkcja η_X jest włożeniem generatorów w uniwersum monoidu wolnego na słowa jednoliterowe. Monoid $FU(M)$ jest to monoid wolny nad uniwersum monoidu M. Zatem jest to zbiór słów nad $U(M)$. Homomorfizm $\varepsilon_M : FU(M) \to M$ ewaluuje słowa nad M i zwraca elementy M. Na przykład $\varepsilon_M(m_0m_1m_2) = m_0 * m_1 \star m_2$ gdzie $\star$ jest działaniem w M, a $m_0m_1m_2$ jest słowem nad M.

Znając η_X, ε_M dla dowolnych X i M możemy odtworzyć φ. Dla $h : F(X) \to M$ mamy

$$\begin{array}{c} F(X) \xrightarrow{id_{F(X)}} F(X) \xrightarrow{h} M \\ \hline X \xrightarrow[\eta_X]{} UF(X) \xrightarrow[U(h)]{} U(M) \end{array}$$

Czyli $\varphi_{X,M}(h) = U(h) \circ \eta_X$. Podobnie dla $g : X \to U(M)$ mamy

$$\begin{array}{c} X \xrightarrow{g} U(M) \xrightarrow{id_{U(M)}} U(M) \\ \hline F(X) \xrightarrow[F(g)]{} FU(M) \xrightarrow[\varepsilon_M]{} M \end{array}$$

Czyli $\varphi^{-1}_{X,Y}(g) = \varepsilon_M \circ U(g)$.

Łatwo sprawdzić, że

$$\eta : id_{Set} \to UF$$

i

$$\varepsilon : FU \to id_{Mon}$$

są naturalnymi transformacjami.

Morfizmy uniwersalny i kouniwersalny Ponadto dla dowolnego X, morfizm η_X ma następującą własność:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "\eta_X"] & & & F(X) \arrow[dd, "h"'] \\ & UF(X) \arrow[dl, "U(h)"] & & \\ U(M) & & & M \end{tikzcd}$$

dla dowolnego monoidu M i funkcji $g : X \to U(M)$ istnieje jedyny homomorfizm $h : F(X) \to M$ taki, że

$$g = U(h) \circ \eta_X$$

Jako, że dziedziną homomorfizmu h jest algebra wolna wystarczy określić go tylko na generatorach $F(X)$. Zatem warunek

$$h(x) = g(x)$$

dla $x \in X$ jednoznacznie wyznacza homomorfizm h.

Dualną własność ma homomorfizm ε_M.

Równości trójkątne Na koniec zauważmy jeszcze, że dla zbioru X i monoidu M poniższe trójkąty

$$\begin{tikzcd} & FUF(X) \arrow[dr, "\varepsilon_{F(X)}"] & \\ F(X) \arrow[ur, "F(\eta_X)"] \arrow[rr, "id_{F(X)}"'] & & F(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & UFU(M) \arrow[dr, "U(\varepsilon_M)"] & \\ U(M) \arrow[ur, "\eta_{U(M)}"] \arrow[rr, "id_{U(M)}"'] & & U(M) \end{tikzcd}$$

są przemienne.

6.2 Morfizmy uniwersalne i kouniwersalne

Podamy teraz ogólną definicję morfizmu uniwersalnego. Przykłady morfizmów uniwersalnych i kouniwersalnych wiedzieliśmy powyżej.

Niech $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ będzie funktorem, $C \in \mathcal{C}$. Para $\langle D, u : C \to G(D) \rangle$, jest *morfizmem uniwersalnym* z obiektu C w funktor G o ile

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "g"'] & & D \arrow[dd, "f"'] \\ & G(D) \arrow[dl, "G(f)"] & \\ G(D') & & D' \end{tikzcd}$$

dla dowolnego D' i $g : C \to G(D')$ istnieje jedyny morfizm $f : D \to D'$ taki, że

$$g = G(f) \circ u$$

Zauważmy też, że para $\langle d, u : C \to G(D) \rangle$ jest morfizmem uniwersalnym wtedy i tylko wtedy gdy jest reprezentacją funktora

$$\mathcal{C}(C, G(-)) : \mathcal{D} \longrightarrow Set$$

Definicja morfizmu kouniwersalnego z jest dualna do definicji morfizmu uniwersalnego. Sformułowanie jej pozostawiamy czytelnikowi.

6.3 Definicja sprzężenia

Jeśli $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ są funktorami to mówimy, że funktor F jest *lewym sprzężonym do funktora* G (a G jest *prawym sprzężonym do funktora* F) gdy istnieje naturalny izomorfizm funktorów φ:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "\mathcal{D}(F(-), =)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathcal{C}(-, G(=))"'{name=L}] & Set \arrow[from=U, to=L, phantom, "\Downarrow \varphi"] \end{tikzcd}$$

Trójkę (F, G, φ) nazywamy *sprzężeniem*. Jeśli taki izomorfizm naturalny φ istnieje to piszemy $F \dashv G$.

Innymi słowy, dla dowolnych obiektów $c \in \mathcal{C}$ i $d \in \mathcal{D}$ mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość

$$\frac{f : F(C) \to D}{g : C \to G(D)}$$

która jest naturalna w C i w D ($g = \varphi_{C,D}(f)$). W takiej sytuacji mówimy, że g jest *transpozycją morfizmu* (lub *morfizmem transponowanym*) f i, że f jest transpozycją (lub morfizmem transponowanym) g. Naturalność tę można wyrazić jako wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość morfizmów

$$\frac{F(C') \xrightarrow{F(k)} F(C) \xrightarrow{f = \varphi^{-1}_{C,D}(g)} D \xrightarrow{h} D'}{C' \xrightarrow[k]{} C \xrightarrow[g = \varphi_{C,D}(f)]{} G(D) \xrightarrow[G(h)]{} G(D')} \tag{10}$$

to znaczy dla dowolnych $k : C' \to C$ w $\mathcal{C}$ oraz $f : F(C) \to D$ i $h : D \to D'$ w $\mathcal{D}$ mamy:

$$\varphi_{C',D'}(h \circ f \circ F(k)) = G(h) \circ \varphi_{C,D}(f) \circ k$$

lub jako przemienność następujących diagramów:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(F(C), D) \arrow[r, "\varphi_{C,D}"] \arrow[d, "\mathcal{D}(F(C),h)"'] & \mathcal{C}(C, G(D)) \arrow[d, "\mathcal{C}(C,G(h))"] \\
\mathcal{D}(F(C), D') \arrow[r, "\varphi_{C,D'}"] \arrow[d, "\mathcal{D}(F(k),D')"'] & \mathcal{C}(C, G(D')) \arrow[d, "\mathcal{C}(k,G(D'))"] \\
\mathcal{D}(F(C'), D') \arrow[r, "\varphi_{C',D'}"'] & \mathcal{C}(C', G(D'))
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Naturalny izomorfizm φ jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wartości na identycznościach. Mamy bowiem dla dowolnego morfizmu $f : F(C) \to D$ w $\mathcal{D}$

$$\frac{F(C) \xrightarrow{id_{F(C)}} F(C) \xrightarrow{f} D}{C \xrightarrow[\varphi_{C,F(C)}(id_{F(C)})]{} GF(C) \xrightarrow[G(f)]{} G(D)}$$

czyli

$$\varphi_{C,D}(f) = G(f) \circ \varphi_{C,F(C)}(id_{F(C)}) \tag{12}$$

Zwykle $\varphi_{C,F(C)}(id_{F(C)})$ jest oznaczany jako $\eta_C : C \to GF(C)$.

Podobnie, naturalny izomorfizm φ^{-1} też jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wartości na identycznościach. Mamy bowiem dla dowolnego morfizmu $g : C \to G(D)$ w $\mathcal{C}$

$$\frac{F(C) \xrightarrow{F(g)} FG(D) \xrightarrow{\varphi^{-1}_{G(D),D}(id_{G(D)})} D}{C \xrightarrow[g]{} G(D) \xrightarrow[id_{G(D)}]{} G(D)}$$

czyli

$$\varphi^{-1}_{C,D}(g) = \varphi^{-1}_{G(D),D}(id_{G(D)}) \circ F(g) \tag{13}$$

Zwykle $\varphi^{-1}_{G(D),D}(id_{G(D)})$ jest oznaczany jako $\varepsilon_D : FG(D) \to D$.

Lemat 6.1 *Rodziny morfizmów $\eta = \{\eta_C\}_{C \in \mathcal{C}}$ i $\varepsilon = \{\varepsilon_D\}_{D \in \mathcal{D}}$ zdefiniowane powyżej są naturalnymi transformacjami:*

$$\eta : id_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF \qquad \varepsilon : FG \longrightarrow id_{\mathcal{D}}$$

Ponadto trójkąty

$$\begin{tikzcd}
& GFG \arrow[dr, "G(\varepsilon)"] & \\
G \arrow[ur, "\eta_G"] \arrow[rr, "id_G"'] & & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& FGF \arrow[dr, "\varepsilon_F"] & \\
F \arrow[ur, "F(\eta)"] \arrow[rr, "id_F"'] & & F
\end{tikzcd} \tag{14}$$

są przemienne.

Dowód: By pokazać, że $\eta : id_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$ jest naturalną transformacją wystarczy pokazać, że dla dowolnego $f : C \to C'$ kwadrat

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & GF(C) \arrow[d, "GF(f)"] \\
C' \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & GF(C')
\end{tikzcd} \tag{15}$$

jest przemienny. A to wynika z faktu, że oba złożenia są transpozycjami morfizmu $F(f) : F(C) \to F(C')$:

$$\frac{c \xrightarrow{\quad f \quad} c' \xrightarrow{\eta_{C'} = \varphi_{C', id_{F(C')}}(id_{F(C')})} GF(C')}{F(C) \xrightarrow[F(f)]{\quad} F(C') \xrightarrow[id_{F(C')}]{\qquad\qquad} F(C')}$$

oraz

$$\frac{c \xrightarrow{\eta_c = \varphi_{c,F(c)}(id_{F(c)})} GF(c) \xrightarrow{GF(f)} GF(c')}{F(C) \xrightarrow[id_{F(C)}]{\qquad\qquad} F(C) \xrightarrow[F(f)]{\quad} F(C')}$$

Ponieważ transformacja morfizmu $F(f)$ (i każdego innego) jest jedyna, to kwadrat (15) jest przemienny i $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to GF$ jest naturalną transformacją.

Innymi słowy z przemienności poniższych kwadratów

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(F(C),F(C)) \arrow[rrr, "\varphi_{(C,F(C))}"] \arrow[ddd, "\mathcal{D}(F(C),F(f))"'] & & & \mathcal{C}(C,GF(C)) \arrow[ddd, "\mathcal{C}(C,GF(f))"] \\
& 1_{F(C)} \arrow[r, mapsto] & \eta_C & \\
& F(f) \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & \varphi(F(f)) = GF(f) \circ \eta_c \arrow[u, mapsto] & \\
\mathcal{D}(F(C),F(C')) \arrow[rrr, "\varphi_{(C,F(C'))}"] & & & \mathcal{C}(C,GF(C')) \\
& F(f) \arrow[r, mapsto] & \varphi(F(f)) = \eta_{C'} \circ f & \\
& 1_{C'} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & \eta_{C'} \arrow[u, mapsto] & \\
\mathcal{D}(F(C'),F(C')) \arrow[rrr, "\varphi_{(C',F(C'))}"'] \arrow[uuu, "\mathcal{D}(F(f),F(C'))"] & & & \mathcal{C}(C',GF(C')) \arrow[uuu, "\mathcal{C}(f,GF(C'))"']
\end{tikzcd}$$

otrzymujemy $\eta_{C'} \circ f = \varphi(F(f)) = GF(f) \circ \eta_C$ a stąd przemienność (15).

By pokazać, że $\varepsilon : FG \to id_{\mathcal{D}}$ jest transformacją naturalną należy pokazać, że dla dowolnego $g : D \to D'$ kwadrat

$$\begin{tikzcd}
FG(D) \arrow[r, "\varepsilon_d"] \arrow[d, "FG(g)"'] & D \arrow[d, "g"] \\
FG(D') \arrow[r, "\varepsilon_{D'}"'] & D'
\end{tikzcd} \tag{16}$$

jest przemienny. Podobnie jak w poprzednim przypadku pokażemy, że oba złożenia są transpozycjami morfizmu $G(g) : G(D) \to G(D')$:

$$\frac{FG(D) \xrightarrow{\varepsilon_D = \varphi^{-1}_{Gd,D}(id_{G(D)})} D \xrightarrow{g} G(D')}{G(D) \xrightarrow[id_{G(D)}]{} G(D) \xrightarrow[G(g)]{} F(D')}$$

oraz

$$\frac{FG(D) \xrightarrow{FG(g)} FG(D') \xrightarrow{\varepsilon_D = \varphi^{-1}_{Gd,D}(id_{G(D)})} D'}{G(D) \xrightarrow[G(g)]{} G(D') \xrightarrow[id_{G(D')}]{} G(D')}$$

Ponieważ transformacja morfizmu $G(g)$ jest jedyna, to kwadrat (16) jest przemienny i $\varepsilon : FG \to id_{\mathcal{D}}$ jest naturalną transformacją.

Pokażemy teraz, że trójkąty (14) są przemienne.

Niech $D \in \mathcal{D}$. Pokażemy, że $G(\varepsilon_D) \circ \eta_{G(D)} = id_{G(D)}$. Mamy następujące wzajemnie jednoznaczne odpowiedniości:

$$\begin{array}{rc}
 & G(D) \xrightarrow{\eta_{G(D)}} GFG(D) \xrightarrow{G(\varepsilon_D)} G(D) \\
\varphi^{-1} & \hline \\
 & FG(D) \xrightarrow{id_{FG(D)}} FG(D) \xrightarrow{\varepsilon_D} D \\
= & \hline \\
 & FG(D) \xrightarrow{\varepsilon_D} D \\
\varphi & \hline \\
 & G(D) \xrightarrow{id_{G(D)}} G(D)
\end{array}$$

Zatem morfizmy $G(\varepsilon_D) \circ \eta_{G(D)}$ i $id_{G(D)}$ są równe ponieważ oba są transpozycjami morfizmu ε_D. A stąd lewy trójkąt (14) jest przemienny.

Niech $C \in \mathcal{C}$. Pokażemy, że $\varepsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C) = id_{F(C)}$. Mamy następujące wzajemnie jednoznaczne odpowiedniości:

$$\begin{array}{rc}
 & F(C) \xrightarrow{F(\eta_C)} FGF(C) \xrightarrow{\varepsilon_{F(C)})} F(C) \\
\varphi & \hline \\
 & C \xrightarrow{\eta_C} GF(C) \xrightarrow{id_{GF(C)}} GF(C) \\
= & \hline \\
 & C \xrightarrow{\eta_C} GF(C) \\
\varphi^{-1} & \hline \\
 & F(C) \xrightarrow{id_{F(C)}} F(C)
\end{array}$$

Zatem morfizmy $\varepsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C)$ i $id_{F(C)}$ są równe ponieważ oba są transpozycjami morfizmu η_C. Wobec tego prawy trójkąt (14) też jest przemienny. Q.E.D.

Jeśli (F, G, φ) jest sprzężeniem to transformacje naturalne $\eta : id_{\mathcal{C}} \to GF$ i $\varepsilon : FG \to id_{\mathcal{D}}$ określone powyżej nazywamy *jednością* i *kojednością sprzężenia*, odpowiednio.

6.4 Inne charakteryzacje sprzężeń

Jak już widzieliśmy jeśli mamy jedność lub kojedność sprzężenia to możemy z ich odtworzyć całe sprzężenie (czyli naturalny izomorfizm φ). Poniższe twierdzenie wylicza jakie porcje informacji o sprzężeniu (F, G, φ) wystarczą by jednoznacznie wyznaczyć całe sprzężenie. W ćwiczeniach znajdują się dalsze takie warunki.

Twierdzenie 6.2 *Sprzężenie (F, G, φ) jest jednoznacznie wyznaczone przez:*

1. *funktory F, G i transformację naturalną $\eta : id_{\mathcal{C}} \to GF$ taką, że dla $C \in \mathcal{C}$, para $(F(C), \eta_C)$ jest morfizmem uniwersalnym z obiektu C w funktor G.*

2. *funktor G, przyporządkowanie obiektowe $F_0 : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$ i dla $C \in \mathcal{C}$ morfizm $\eta_C : C \to GF_0(C)$ taki, że para $(F_0(C), \eta_C)$ jest morfizmem uniwersalnym z obiektu C w funktor G.*

3. *funktory F, G i transformacje naturalne $\eta : id_{\mathcal{C}} \to GF$ i $\varepsilon : FG \to id_{\mathcal{D}}$ takie, że trójkąty (14) są przemienne.*

Dowód: Ad 1. Niech $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$. Definiujemy

$$\varphi'_{C,D}(f : F(C) \to D) = G(f) \circ \eta_C$$

Z uniwersalności morfizmu η_C wynika, że $\varphi_{C,D}$ jest bijekcją.

Pokażemy, że φ' jest transformacją naturalną, to znaczy, że kwadraty (11) są przemienne. Dolny kwadrat jest przemienny ponieważ równość

$$G(f) \circ \eta_C \circ k = G(f \circ F(k)) \circ \eta_{C'}$$

wynika z naturalności η, a górny kwadrat jest przemienny ponieważ równość

$$G(h) \circ G(f) \circ \eta_{C'} = G(h \circ f) \circ \eta_{C'}$$

wynika stąd, że G jest funktorem.

W ten sposób pokazaliśmy, że (F, G, φ') jest sprzężeniem.

Ponadto dla $C \in \mathcal{C}$ mamy, że

$$\varphi'_{C,F(C)}(id_{F(C)}) = G(id_{F(C)}) \circ \eta_C = \eta_C$$

a to oznacza, że η jest jednością tego sprzężenia. Jeśli η jest też jednością tego sprzężenia (F, G, φ) to $\varphi = \varphi'$.

Ad 2. By sprowadzić sytuacje do poprzedniej, wystarczy pokazać, że przyporządkowanie F_0 rozszerza się do funktora $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ takiego, że $\eta : id_{\mathcal{C}} \to GF$ jest transformacją naturalną.

Niech $f : C \to C'$ będzie morfizmem w $\mathcal{C}$. Z uniwersalności morfizmu η_C istnieje jedyny morfizm $F(f) : F_0(C) \to F_0(C')$ taki, że

$$F(f) \circ \eta_C = \eta_{C'} \circ f$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & GF_0(C) \arrow[d, "FG(f)"] & F_0(C) \arrow[d, "F(f)"'] \\ C' \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & GF_0(C') & F_0(C') \end{tikzcd}$$

Oczywiście F tak określone zachowuje dziedziny i przeciwdziedziny. Dla $f = id_C$ mamy

$$G(id_{F_0(C)}) \circ \eta_C = \eta_C \circ id_C$$

Zatem z jedyności $F(id_C)$,

$$F(id_C) = id_{F(C)}.$$

Czyli F zachowuje identyczności. Podobnie z jedyności $F(g \circ f)$,

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Czyli F jest funktorem rozszerzającym F_0. Z definicji F wynika też, że jest to $\eta : id_{\mathcal{C}} \to GF$ jest transformacją naturalną.

Ad 3. Niech $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$. Zdefiniujemy dwie funkcje:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(F(C), D) \arrow[r, shift left, "\varphi"] & \mathcal{C}(C, G(D)) \arrow[l, shift left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

Dla $f \in \mathcal{D}(F(C), D)$

$$\varphi_{C,D}(f) = G(f) \circ \eta_C$$

oraz dla $g \in \mathcal{C}(C, G(D))$

$$\psi_{C,D}(g) = \varepsilon_D \circ F(g).$$

Naturalność φ można łatwo pokazać korzystając z tego, że G jest funktorem i η jest transformacją naturalną.

Pokażemy, korzystając z przemienności (14) i naturalności η, ε, że funkcje $\varphi_{C,D}$ i $\psi_{c,d}$ są wzajemnie odwrotne. Mamy

$$\varphi_{C,D}(\psi_{C,D}(g)) =$$
$$= \varphi_{C,D}(\varepsilon_D \circ F(g)) =$$
$$= G(\varepsilon_D \circ F(g)) \circ \eta_C =$$
$$= G(\varepsilon_D) \circ GF(g) \circ \eta_C =$$
$$= G(\varepsilon_D) \circ \eta_{G(D)} \circ g = g.$$

Ponadto

$$\psi_{C,D}(\varphi_{C,D}(f)) =$$
$$\psi_{C,D}(G(f) \circ \eta_C) =$$
$$\varepsilon_D \circ F(G(f) \circ \eta_C) =$$
$$\varepsilon_D \circ FG(f) \circ F(\eta_C) =$$
$$f \circ \varepsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C) = f.$$

Zatem φ jest rzeczywiście naturalnym izomorfizmem.

Q.E.D.

Ze względu na punkt 3 powyższego twierdzenia, sprzężenie (F, G, φ) można też reprezentować jako czwórkę $(F, G, \eta, \varepsilon)$ gdzie transformacje naturalne η i ε spełniają równości trójkątne (14).

Przykłady funktorów sprzężonych

1. Dla dowolnej teorii równościowej T funktor zapominania z kategorii T-algebr w Set $U_T : Alg(T) \to Set$ ma lewy sprzężony, funktor T-algebry wolnej.
2. Funktor włożenia kategorii na przekątną $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ma lewy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{C}$ ma produkty binarne, i ma prawy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{C}$ ma koprodukty binarne.

3. Ogólniej funktor włożenia kategorii $\mathcal{C}$ na funktory stałe $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ ma lewy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{C}$ ma granice indeksowane kategorią $\mathcal{D}$, i ma prawy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{C}$ ma kogranice indeksowane kategorią $\mathcal{D}$.

4. Kategoria grafów $Grph$ utożsamiamy z kategorią funktorów z kategorii:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \end{tikzcd}$$

   Mama funktor zapominania z kategorii małych kategorii w kategorię grafów $Cat \to Grph$, który kategorii $(C_1, C_0, d, c, m, 1)$ przyporządkowuje graf (C_1, C_0, d, c). Ten funktor ma lewy sprzężony, funktor kategorii wolnej nad grafem.

5. Funktor zapominania z kategorii małych kategorii w kategorię zbiorów $Cat \to Set$ przyporządkowujący kategorii C zbiór jej elementów $Ob(C)$ ma lewy sprzężony (kategorii dyskretnej) i prawy sprzężony (kategorii antydyskretnej).

6. Jeśli $f : A \to B$ jest funkcją to funkcja monotoniczna przeciwobrazu traktowana jako funktor pomiędzy częściowymi porządkami $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ ma oba funktory sprzężone. Lewy sprzężony $\exists_f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ to kwantyfikator egzystencjalny wzdłuż f, tzn. dla $X \subseteq A$ mamy

$$\exists_f(X) = \{b \in B | \exists_a \; f(a) = b \wedge a \in X\} (= \{b \in B | \exists_{a \in X} \; f(a) = b\})$$

   prawy sprzężony $\forall_f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ to kwantyfikator ogólny wzdłuż f, tzn. dla $X \subseteq A$ mamy

$$\forall_f(X) = \{b \in B | \forall_a \; f(a) = b \Rightarrow a \in X\}$$

   Dla funkcji $f = \pi_X : X \times Y \to X$ otrzymujemy zwykłe operacje kwantyfikacji.

7. Funktor $Comp \to Set$ zapominania z kategorii przestrzeni zwartych w Set ma lewy sprzężony $\beta : Set \to Comp$, funktor uzwarcenia Cecha-Stone'a.

8. Funktor zbioru potęgowego $\mathcal{P} : Set^{op} \to Set$ taki, że dla funkcji $f : A \to B$ mamy $\mathcal{P}(f) = f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ ma lewy sprzężony $\mathcal{P}^{op} : Set \to Set^{op}$ tzn. ten sam funktor, rozpatrywany jak funktor dualny.

9. Rozważamy przestrzenie liniowe nad ustalonym ciałem k. Ponieważ zbiór przekształceń pomiędzy dwoma przestrzeniami liniowymi jest w naturalny sposób przestrzenią liniową, dla dowolnej przestrzeni wektorowej V mamy funktor $Hom(V, -) : Vect_k \to Vect_k$ przyporządkowujący przestrzeni W przestrzeń przekształceń liniowych $Hom(V, W)$. Ten funktor ma lewy sprzężony mnożenia tensorowego przez V: $V \otimes (-) : Vect_k \to Vect_k$.

10. Ten przykład ma związek z poprzednimi dwoma. Mamy funktor $Hom(-, R) : Vect_k^{op} \to Vect_k$ przyporządkowujący przestrzeni W przestrzeń przekształceń liniowych $Hom(W, k)$. Ten funktor ma lewy sprzężony $Hom(-, R)^{op} : Vect_k \to Vect_k^{op}$.

11. Konstrukcja algebry grupowej jest funktorem lewym sprzężonym ale do funktora zapominania do kategorii monoidów. Dokładniej mamy funktor zapominania z kategorii k-algebr w kategorię monoidów $U : k - Alg \to Mon$ przyporządkowujący algebrze A jej monoid multiplikatywny. Funktor U ma lewy

sprzężony 'k-algebry monoidowej' ($M \mapsto k[M]$). Ten funktor zastosowany do grupy G daje tzw. algebrę grupową $k[G]$.

12. Funktor $Set^{op} \longrightarrow CaBA$ z kategorii zbiorów do kategorii zupełnych dystrybutywnych atomowych algebr Boole'a przyporządkowujący zbiorowi X algebrę Boole'a jego podzbiorów $\mathcal{P}(X)$ ma lewy sprzężony. W tym przypadek jest to równoważność kategorii.

6.5 Własności funktorów sprzężonych

Lemat 6.3 *Niech $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ będzie funktorem. Jeśli G ma lewy sprzężony to jest on wyznaczony z dokładnością do izomorfizmu.*

Dowód: Niech $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą funktorami lewymi sprzężonymi do G. Pokażemy, że F i F' są naturalnie izomorficzne.

Morfizm uniwersalny z C w G jest obiektem początkowym w kategorii, której obiektami są pary $(D, f : C \to G(D))$ a morfizmami $g : (D, f) \to (D', f')$ są morfizmy $g : D \to D'$ w $\mathcal{D}$ takie, że $f' = G(g) \circ f$. Ponieważ obiekt początkowy jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu istnieje (jedyny) izomorfizm $\tau_C : F(C) \to F'(C)$ taki, że trójkąt

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\eta_C"'] \arrow[dr, "\eta'_C"] & \\ GF(C) \arrow[rr, "G(\tau_C)"'] & & GF'(C) \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Pozostaje do pokazania, że transformacja $\tau : F \to F'$ jest naturalna. Niech $f : C \to C'$ będzie morfizmem w $\mathcal{C}$. Rozważmy diagramy

$\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\eta_C"'] \arrow[dr, "\eta'_C"] \arrow[ddd, bend right=90, "f"'] & \\ GF(C) \arrow[rr, "G(\tau_C)"] \arrow[d, "GF(f)"'] & & GF'(C) \arrow[d, "GF'(f)"] \\ GF(C') \arrow[rr, "G(\tau_{C'})"'] & & GF'(C') \\ & C' \arrow[ul, "\eta_{C'}"] \arrow[ur, "\eta'_{C'}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & F'(C) \arrow[d, "F'(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & F'(C') \end{tikzcd}$$

Mamy pokazać, że kwadrat po prawej stronie jest przemienny. W tym celu wystarczy pokazać, że oba złożenia w tym kwadracie $\tau_{C'} \circ F(f)$ i $F'(f) \circ \tau_C$ są transpozycjami morfizmu $\eta'_{C'} \circ f$.

Mamy

$$\begin{aligned} & G(\tau_{C'} \circ F(f)) \circ \eta_C = \\ = {} & G(\tau_{C'}) \circ GF(f) \circ \eta_C = \\ = {} & G(\tau_{C'}) \circ \eta_{C'} \circ f = \\ = {} & \eta'_{C'} \circ f \end{aligned}$$

oraz

$$G(F'(f) \circ \tau_C) \circ \eta_C =$$

$$= GF'(f) \circ G(\tau_C) \circ \eta_C =$$
$$= GF'(f) \circ \eta'_C =$$
$$= \eta'_{C'} \circ f$$

Q.E.D.

Lemat 6.4 *Niech $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ będzie funktorem. G jest prawym sprzężonym wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego obiektu $C \in \mathcal{C}$ funktor*

$$\mathcal{C}(C, G(-)) : \mathcal{D} \longrightarrow Set$$

jest reprezentowalny.

Dowód: $\Rightarrow$: Jeżeli (F, G, φ) jest sprzężeniem to dla $C \in \mathcal{C}$

$$(F(C), \varphi_C : \mathcal{D}(F(C), -) \to \mathcal{C}(C, G(-)))$$

jest reprezentacją funktora $\mathcal{C}(C, G(-)))$.

$\Leftarrow$: Ustalmy obiekt $C \in \mathcal{C}$. Niech

$$(F_0(C), \varphi_C : \mathcal{D}(F_0(C), -) \to \mathcal{C}(C, G(-)))$$

będzie reprezentacją funktora $\mathcal{C}(C, G(-)) : \mathcal{D} \to Set$ oraz niech $\eta_C = \varphi_{C,F_0(C)}(1_{F_0(C)}) : C \to GF_0(C)$. Na mocy Twierdzenia 6.2.2 wystarczy pokazać, że $(F_0(C), \eta_C)$ jest morfizmem uniwersalnym z obiektu C do funktora G.

Rozważmy morfizmy w kategoriach $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{C}: \quad \begin{tikzcd} C \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "\eta_C"] & \\ & GF_0(C) \arrow[dl, "G(g)"] \\ G(D) & \end{tikzcd} \qquad \mathcal{D}: \quad \begin{tikzcd} F_0(C) \arrow[dd, "g"'] \\ \\ D \end{tikzcd}$$

Ponieważ φ_C jest naturalnym izomorfizmem, to dla dowolnego morfizmu $f : C \to G(D)$ istnieje jedyny morfizm $g : F_0(C) \to D$ taki, że

$$\varphi_{C,D}(g) = f$$

Z tej równości, definicji funktora $\mathcal{C}(C, G(-))$ i morfizmu η_C i naturalności φ mamy

$$f = \varphi_{C,D}(g) = \mathcal{D}(C, G(-))(g)((\varphi_{C,C}(id_{F_0(C)})) =$$
$$= \mathcal{D}(C, G(g))(\eta_C) = G(g) \circ \eta_C$$

Można to też zobaczyć rozważając kwadrat

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(F_0(C), F_0(C)) \arrow[rr, "\varphi_{C,F_0(C)}"] \arrow[ddd, "\mathcal{D}(F_0(C), g)"'] & & \mathcal{C}(C, GF_0(C)) \arrow[ddd, "\mathcal{C}(C, G(g))"] \\ 1_{F_0(C)} \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & \eta_C \arrow[d, mapsto] \\ g \arrow[rr, mapsto] & & f = G(g) \circ \eta_C \\ \mathcal{D}(F_0(C), D) \arrow[rr, "\varphi_{C,D}"'] & & \mathcal{C}(C, G(D)) \end{tikzcd}$$

który jest przemienny na mocy naturalności φ_C na morfiźmie g.

Zatem (C, η_C) jest morfizmem uniwersalnym z obiektu C do funktora G.

Q.E.D.

Poniższy fakt jest często wykorzystywany do pokazywania, że jakiś funktor nie ma sprzężonego lub, że zachowuje (ko)granice.

Twierdzenie 6.5 *Niech $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ będzie funktorem prawym sprzężonym. Wtedy G zachowuje wszystkie granice, które istnieją w $\mathcal{D}$.*

Dowód: Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor taki, że $F \dashv G$ oraz $H : J \to \mathcal{D}$ funktor z kategorii małej J. Niech (D, π) będzie stożkiem granicznym nad funktorem H, $(G(D), G(\pi))$ obrazem tego stożka przy funktorze G. Pokażemy, że $(G(D), G(\pi))$ jest stożkiem granicznym nad funktorem GH. Niech (C, σ) będzie stożkiem nad GH. Wtedy $(F(C), \tau)$ jest stożkiem nad H, gdzie τ_i jest transpozycją morfizmu σ_i dla $i \in J$.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "g"] \arrow[ddl, bend right, "\sigma_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\sigma_j"] & \\
& G(D) \arrow[dl, "G(\pi_i)"'] \arrow[dr, "G(\pi_i)"] & \\
GH(i) \arrow[rr, "GH(\alpha)"'] & & GH(j)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& F(C) \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, bend right, "\tau_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\tau_j"] & \\
& D \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\
H(i) \arrow[rr, "H(\alpha)"'] & & H(j)
\end{tikzcd}$$

Ponieważ (D, π) jest stożkiem granicznym, to istnieje (jedyny) morfizm stożków $f : (F(C)\tau) \to (D, \pi)$. Wtedy morfizm $g : C \to G(D)$, będący transpozycją f tez jest morfizmem stożków z $g : (C, \sigma) \to (G(D), G(\pi))$. Ponieważ f jest jedyne to g też jest jedyne. Zatem $(G(D), G(\pi))$ jest stożkiem granicznym.

Q.E.D.

Twierdzenie odwrotne do powyższego twierdzenia nie jest prawdziwe. Na przykład funktor zapominania z kategorii zupełnych algebr Boole'a CBa w Set nie ma lewego sprzężonego, chociaż zachowuje wszystkie granice. Przyczyna tego faktu leży w tym, że wolna i zupełna algebra Boole'a musiała by mieć klasę elementów. Lub innymi słowy, istnieją zupełne algebry Boole'a dowolnie dużej mocy, które są generowane przez przeliczalnie wiele elementów. Twierdzenie Freyd'a 6.10 jest częściowo odwrotnym do powyższego Twierdzenia 6.5 izostanie podane później.

6.6 Podkategorie refleksywne i korefleksywne

Kategoria $\mathcal{A}$ jest *podkategorią* kategorii $\mathcal{B}$ jeśli obiekty i morfizmy $\mathcal{A}$ są obiektami i morfizmami $\mathcal{B}$ a operacje dziedzin, przeciwdziedziny, złożenia i identyczności w $\mathcal{A}$ są obcięciami tych operacji w $\mathcal{B}$. Jeśli ponadto dla dowolnych obiektów a, a' z $\mathcal{A}$ mamy $\mathcal{A}(A, A') = \mathcal{B}(A, A')$ to mówimy, że $\mathcal{A}$ jest *podkategorią* pełną w $\mathcal{B}$.

Jeśli $\mathcal{A}$ jest dowolną podkategorią kategorii $\mathcal{B}$ to $\mathcal{A}$ może mieć nie wiele wspólnego z $\mathcal{B}$. Zajmiemy się teraz takimi podkategoriami $\mathcal{A}$ które 'dobrze siedzą' w kategorii $\mathcal{B}$, są to kategorie refleksywne i korefleksywne.

Niech $f : B \to A$ będzie morfizmem w kategorii $\mathcal{A}$. Obrazem f przy włożenie Yonedy $Y : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Set^{\mathcal{A}}$ jest naturalna transformacja $\mathcal{A}(f, -) : \mathcal{A}(A, -) \longrightarrow \mathcal{A}(B, -)$. Mamy

Lemat 6.6 *Przy oznaczeniach jak wyżej*

1. *$\mathcal{A}(f,-)$ jest monomorfizmem w $Set^{\mathcal{A}}$ wtedy i tylko wtedy gdy f jest epimorfizmem w $\mathcal{A}$.*

2. *$\mathcal{A}(f,-)$ jest epimorfizmem w $Set^{\mathcal{A}}$ wtedy i tylko wtedy gdy f jest split mono w $\mathcal{A}$.*

3. *W szczególności $\mathcal{A}(f,-)$ jest izomorfizmem w $Set^{\mathcal{A}}$ wtedy i tylko wtedy gdy f jest izomorfizmem w $\mathcal{A}$.*

Dowód: Ad 1. Ten warunek jest w istocie przeformułowaniem definicji epimorfizmu. Niech g i h będą dowolnymi morfizmami w $\mathcal{A}(a,c)$. Przypuśćmy, że f jest epi. Wtedy jeśli $\mathcal{A}(f,-)(g) = \mathcal{A}(f,-)(h)$ to mamy

$$g \circ f = \mathcal{A}(f,-)(g) = \mathcal{A}(f,-)(h) = h \circ f$$

Zatem $g = h$ i z dowolności g i h $\mathcal{A}(f,-)$ jest mono.

Jeśli $\mathcal{A}(f,-)$ jest mono oraz $g \circ f = h \circ f$ to mamy

$$\mathcal{A}(f,-)(g) = g \circ f = h \circ f = \mathcal{A}(f,-)(h)$$

Zatem $g = h$ i z dowolności g i h f jest epi.

Ad 2. $\mathcal{A}(f,-)$ jest epi wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $C \in \mathcal{A}$, funkcja $\mathcal{A}(f,C) : \mathcal{A}(A,C) \longrightarrow \mathcal{A}(B,C)$ jest surjekcją. W szczególności dla $C = B$ istnieje $g \in \mathcal{A}(A,B)$ takie $1_B = \mathcal{A}(f,B)(g) = g \circ f$, czyli f jest split mono. Z drugiej strony jeśli f jest split mono w $\mathcal{A}$ to jest split epi w $\mathcal{A}^{op}$. Ponieważ każdy funktor zachowuje spit epi więc $\mathcal{A}(f,-)$ jest split epi, zatem w szczególności epi. Q.E.D.

Twierdzenie 6.7 *Niech (F,G,η,ε) będzie sprzężeniem, gdzie $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ funktory a $\eta : 1_{\mathcal{X}} \to GF$ oraz $\varepsilon : FG \to 1_{A}$ transformacje naturalne. Wtedy*

1. *G jest wierny wtedy i tylko wtedy gdy ε_a jest epi, dla $A \in \mathcal{A}$.*

2. *G jest pełny wtedy i tylko wtedy gdy ε_A jest split mono, dla $A \in \mathcal{A}$.*

3. *W szczególności G jest wierny i pełny wtedy i tylko wtedy gdy ε_A jest izomorfizmem, dla $A \in \mathcal{A}$.*

Dowód: Ustalmy $A, B \in \mathcal{A}$. Wtedy mamy funkcje

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(A,B) & \xrightarrow{G_{A,B}} & \mathcal{X}(G(A),G(B)) & \xrightarrow{\varphi^{-1}_{G(A),B}} & \mathcal{A}(FG(A),B) \\ f & \longmapsto & G(f) & \longmapsto & f \circ \varepsilon_A \end{array}$$

To, że sprzężeniem $G(f)$ jest $f \circ \varepsilon_A$ wynika z poniższej odpowiedniości

$$\varphi^{-1}_{g(A),B}\,\frac{G(A) \xrightarrow{1_{G(A)}} G(A) \xrightarrow{G(f)} G(B)}{FG(A) \xrightarrow{\varepsilon_A} A \xrightarrow{f} B}$$

Ponieważ dla dowolnych $X \in \mathcal{X}$ i $a \in \mathcal{A}$, $\varphi_{X,A}$ jest bijekcją to, używając Lematu 6.6, mamy następujący ciąg równoważności

$G_{A,B}$ jest injekcją	dla $A, B \in \mathcal{A}$
$\varphi^{-1}_{G(A),B} \circ G_{A,B}$ jest injekcją	dla $A, B \in \mathcal{A}$
$\mathcal{A}(\varepsilon_A, B)$ jest injekcją	dla $A, B \in \mathcal{A}$
$\mathcal{A}(\varepsilon_A, -)$ jest mono	dla $A \in \mathcal{A}$
ε_A jest epi	dla $A \in \mathcal{A}$

Zatem G jest wierny wtedy i tylko wtedy gdy ε_A jest epi dla $A \in \mathcal{A}$. Podobnie mamy ciąg równoważności

$G_{A,B}$ jest surjekcją	dla $A, B \in \mathcal{A}$
$\varphi^{-1}_{G(A),B} \circ G_{A,B}$ jest surjekcją	dla $A, B \in \mathcal{A}$
$\mathcal{A}(\varepsilon_A, B)$ jest surjekcją	dla $A, B \in \mathcal{A}$
$\mathcal{A}(\varepsilon_A, -)$ jest epi	dla $A \in \mathcal{A}$
ε_a jest split mono	dla $A \in \mathcal{A}$

Zatem G jest pełny wtedy i tylko wtedy gdy ε_A jest epi dla $A \in \mathcal{A}$. Q.E.D.

Niech funktor $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ będzie włożeniem podkategorii. Mówimy, że $\mathcal{A}$ jest podkategorią *refleksywną* (*korefleksywną*) kategorii $\mathcal{B}$ jeśli i ma lewy (prawy) sprzężony. Wtedy funktor lewy (prawy) sprzężony do i nazywamy *reflektorem* (*koreflektorem*).

Jeśli $F \dashv i$ to, ponieważ i jest wierny, kojedność sprzężenia jest epi. Jeśli $\mathcal{A}$ jest podkategorią pełną kategorii $\mathcal{B}$ to kojedność sprzężenia jest izomorfizmem.

Przykłady

1. Kategoria grup abelowych *Ab* jest podkategorią refleksywną kategorii grup *Gr*. Reflektorem jest funktor abelianizacji.

2. Kategoria grup abelowych beztorsyjnych jest podkategorią refleksywną kategorii *Ab*.

3. Kategoria grup abelowych torsyjnych jest podkategorią korefleksywną kategorii *Ab*.

4. Kategoria przestrzeni zwartych jest podkategorią refleksywną kategorii przestrzeni $T_{3\frac{1}{2}}$.

Twierdzenie 6.8 *Niech $\mathcal{A}$ będzie pełna podktegorią refleksywną $\mathcal{X}$. Wtedy*

1. *Jeśli $\mathcal{X}$ jest kategorią kozupełną to $\mathcal{A}$ też jest kategorią kozupeną.*

2. *Jeśli $\mathcal{X}$ jest kategorią zupełną to $\mathcal{A}$ też jest kategorią zupeną.*

Dowód: Z założenia mamy sprzężenie $(F, G, \eta, \varepsilon)$, takie, że $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ jest funktorem pełnym. Zatem kojedność sprzężenia ε jest izomorfizmem.

Niech $T : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ będzie funktorem z kategorii małej $\mathcal{J}$.

Ad 1. Załóżmy, że $\mathcal{X}$ jest kategorią kozupełną. Pokażemy, że T ma kogranicę. Ponieważ ε jest izomorfizmem, mamy izomorfizm funktorów $\varepsilon_T : FGT \longrightarrow T$. Zatem wystarczy pokazać, że istnieje kogranica funktora FGT. Ponieważ, $\mathcal{X}$ jest kategorią kozupełną to istnieje granica (C, κ) funktora $GT : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{X}$. Ponieważ F jest funktorem lewym sprzężonym to zachwuje kogranice. Zatem $(F(C), F(\kappa))$ jest kogranicą funktora FGT.

Ad 2. Załóżmy teraz, że $\mathcal{X}$ jest kategorią zupełną. Zatem istnieje granica (L,π) funktora $GT : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{X}$. Ponieważ, $\mathcal{A}$ jest pełną podkategorią $\mathcal{X}$, to wystarczy pokazać, że istnieje obiekt $A \in \mathcal{A}$ taki, że istnieje izomorfizm $i : L \to (G(A)$. Wtedy, ponieważ G jest wierny pełny, możma skonstruować stożek κ' o wierzchołku A nad funktorem T taki, że $(G(A), G(\kappa')) = (G(A), i \circ \kappa)$. Zatem $(G(A), G(\kappa'))$ jest stożkiem granicznym jako izomorficzy ze stożkiem granicznym. Ponieważ, $\mathcal{A}$ jest podkategorią pełną $\mathcal{X}$ to stożek $(G(A), G(\kappa'))$ spełnia silniejszą własność uniwersalna niż jest wymagana dla stożka (A,κ') by być stożkiem granicznym. Zatem (A,κ') jest też stozkiem granicznym w $\mathcal{A}$.

By zakoczyć dowód pokażemy, że $\eta_L : L \to GF(L)$ jest izomorfizmem. Dla $i \in \mathcal{J}$ mamy odpowiedniość

$$\frac{\pi_i : L \longrightarrow GT(i)}{p_i : F(L) \longrightarrow T(i)}$$

wynikającą ze sprzężenia $F \dashv G$. Wtedy $\{p_i : F(L) \to T(i)\}_{i\in\mathcal{J}}$ jest stożkiem nad funktorem T o wierzchołku $F(L)$. Zatem $G(p) = \{G(p_i) : G(L) \longrightarrow GT(i)\}_{i\in\mathcal{J}}$ jest stożkiem nad funktorem GT o wierzchołku $GF(L)$. Ponieważ (L,π) jest stożkiem granicznym, to istnieje jedyny morfizm stożków $k : (GF(L), G(p)) \longrightarrow (L,\pi)$, tzn. (uprzemienniający trójkąty

$$\begin{tikzcd}
GF(L) \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "G(p_i)"'] & & L \arrow[dl, "\pi_i"] \\
& GT(i)) &
\end{tikzcd}$$

dla $i \in \mathcal{J}$. Z definicji morfizmów p_i mamy też, że $\eta_L : (L,\pi) \longrightarrow (GF(L), G(p))$ jest morfizmem stożków. Czyli, że trójkąty

$$\begin{tikzcd}
GF(L) \arrow[dr, "G(p_i)"'] & & L \arrow[ll, "\eta_L"'] \arrow[dl, "\pi_i"] \\
& GT(i)) &
\end{tikzcd}$$

są przemienne dla $i \in \mathcal{J}$. Z jedyności morfizmu w granicę, mamy $k \circ \eta_L = id_L$.

By zakończyć dowód, pokażemy, że $\eta_L \circ k = id_{FG()L}$.

Zauważmy, że ponieważ ε jest izomorfizmem to z równości trójkątnej

$$\begin{tikzcd}
& GFGF(L) \arrow[dr, "G(\varepsilon_{F(L)})"] & \\
GF(L) \arrow[ur, "\eta_{GF(L)}"] \arrow[rr, "id_{GF(L)}"'] & & GF(L))
\end{tikzcd}$$

wynika, że $\eta_{GF(L)}$ też jest izomorfizmem. Mamy diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, shift right, "\eta_L"'] \arrow[d, "\eta_L"'] & GF(L) \arrow[l, shift right, "k"'] \arrow[d, "\eta_{GF(L)}"] \\
GF(L) \arrow[r, shift right, "GF(\eta_L)"'] & GFGF(L) \arrow[l, shift right, "GF(k)"']
\end{tikzcd}$$

Zatem

$$\eta_L \circ k \circ (\eta_{GF(L)})^{-1} \circ GF((\eta_L) =$$
$$= GF(k) \circ \eta_{GF(L)} \circ (\eta_{GF(L)})^{-1} \circ GF((\eta_L) =$$
$$= GF(k) \circ GF(\eta_L) = GF(k \circ \eta_{GF(L)}) =$$
$$= GF(id_L) = id_{GF(L)}.$$

Czyli η_L ma i lewy i prawy odwrotny, a zatem jest izomorfizmem. Q.E.D.

6.7 Twierdzenie Freyd'a o istnieniu funktora sprzężonego

Lemat 6.9 (O istnieniu obiektu początkowego) *Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią lokalnie małą i zupełną. Wtedy $\mathcal{D}$ ma obiekt początkowy wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest następujący*

Warunek Zbioru Rozwiązującego: istnieje zbiór I oraz rodzina I-indeksowana $\{D_i\}_{i \in I}$ obiektów $\mathcal{D}$ taka, że dla dowolnego obiektu $D \in \mathcal{D}$ istnieje $i \in I$ oraz morfizm $h : D_i \to D$ w $\mathcal{D}$.

Dowód: Konieczność tego warunku jest oczywista bo jeśli $\mathcal{D}$ ma obiekt początkowy 0 to można przyjąć $\{0\}$ za jedno-elementowy zbiór rozwiązujący.

Niech teraz $\{D_i\}_{i \in I}$ będzie zbiorem rozwiązującym jak w Lemacie. Weźmy produkt $A = \Pi_{i \in I} D_i$ oraz ekwalizator wszystkich endomorfizmów obiektu A

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, shift right=3] & A \end{tikzcd}$$

Możemy to zrobić w $\mathcal{D}$ ponieważ $\mathcal{D}$ ma granice i jest lokalnie mała. Pokażemy, że u jest obiektem początkowym w $\mathcal{D}$. Ustalmy $D \in \mathcal{D}$. Z założenia istnieje $i \in I$ oraz morfizm z $f : D_i \to D$. Zatem mamy morfizm

$$U \xrightarrow{e} A = \Pi_{i \in I} D_i \xrightarrow{\pi_i} D_i \xrightarrow{f} D$$

z u do d. Przypuśćmy, że są dwa takie morfizmy $f, g : u \to d$. Weźmy ich ekwalizator $e' : B \to U$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "e'"] & U \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D \\ A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "e \circ e' \circ s"'] & A \arrow[u, "e"'] & \end{tikzcd}$$

Z poprzednich rozważań istnieje morfizm $s : A \to B$. Ponieważ 1_A oraz $e \circ e' \circ s$ są endomorfizmami A to są ekwalizowane przez e. Zatem mamy

$$e \circ e' \circ s \circ e = 1_U \circ e = e \circ 1_B$$

Ponieważ e jest ekwalizatorem to e jest mono i mamy $e' \circ s \circ e = 1_B$. Stąd e' jest epi oraz $f = g$. Zatem U jest rzeczywiście obiektem początkowym.

Q.E.D.

Twierdzenie 6.10 (Twierdzenie Freyd'a o funktorze sprzężonym, FAFT) *Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią lokalnie małą i zupełną a $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ będzie funktorem. Wtedy funktor G ma lewy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy G zachowuje wszystkie granice i spełnia następujący*

Warunek Zbioru Rozwiązującego: dla dowolnego obiektu $X \in \mathcal{X}$ istnieje zbiór I oraz rodziny I-indeksowane $\{A_i\}_{i\in I}$ obiektów $\mathcal{A}$ i $\{f_i : X \to G(A_i)\}_{i\in I}$ morfizmów w $\mathcal{X}$ takie, że dowolny morfizm $g : X \to G(A)$ jest złożeniem $g = G(h) \circ f_i$ dla pewnego $i \in I$ oraz $h : A_i \to A$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[drr, "f_j"] & & & & \ldots A_i \ldots A_j \ldots \arrow[dd, "h"] \\
& \ldots G(A_i) \arrow[dl, "G(h)"] & \ldots G(A_j) \ldots & & \\
G(A) & & & & A
\end{tikzcd}$$

Dowód: Warunek z twierdzenia jest konieczny. Każdy funktor prawy sprzężony zachowuje granice. Ponadto jeśli $F \dashv G$ to dla $X \in \mathcal{X}$ jedność sprzężenia $\eta_X : X \to GF(X)$ jest jedno-elementowy zbiorem rozwiązującym.

Pokażemy, że warunki z twierdzenia są wystarczające. Z charakteryzacji sprzężeń, Twierdzenie 6.2, wystarczy pokazać dla dowolnego obiektu $X \in \mathcal{X}$ istnieje morfizm uniwersalny z obiektu X do funktora G, to znaczy istnieje obiekt $A \in \mathcal{A}$ oraz morfizm $u : X \to G(A)$ taki że

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "u"] & & A \arrow[dd, "\bar{f}"] \\
& G(A) \arrow[dl, "G(\bar{f})"] & \\
G(B) & & B
\end{tikzcd}$$

dla dowolnego obiektu $B \in \mathcal{A}$ i morfizmu $f : X \to G(B)$ istnieje jedyny morfizm $\bar{f} : A \to B$ taki, że powyższy trójkąt jest przemienny ($G(f) \circ u = f$).

Definiujemy kategorię $X \downarrow G$. Obiekty kategorii $X \downarrow G$ to pary $(A, f : X \to G(A))$ gdzie A jest obiektem $\mathcal{A}$ a f jest morfizmem z $\mathcal{X}$. Morfizm $h : (A, f) \to (A', f')$ w $X \downarrow G$ to morfizm $h : A \to A'$ w $\mathcal{A}$ uprzemienniający trójkąt

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
G(A) \arrow[rr, "G(h)"'] & & G(A')
\end{tikzcd}$$

Łatwo zauważyć, że morfizm (A, u) jest morfizmem uniwersalnym z X do G wtedy i tylko wtedy gdy (A, u) jest obiektem początkowym w $X \downarrow G$. Zatem pozostaje do pokazania, że istnieje obiekt początkowy w kategorii $X \downarrow G$. W tym celu pokażemy, że kategoria $X \downarrow G$ spełnia założenia Lematu 6.9. Pojęcie zbioru rozwiązującego z Twierdzenia jest pojęciem zbioru rozwiązującego z Lematu 6.9 dla kategorii $X \downarrow G$. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest kategorią lokalnie małą to $X \downarrow G$ też jest kategorią lokalnie małą. Pozostaje jeszcze do pokazania, że kategoria $x \downarrow G$ ma granice. Z Faktu 5.1 wynika, że wystarczy pokazać, że funktor

$$P : X \downarrow G \longrightarrow \mathcal{A}$$

kreuje granice.

Niech $H : \mathcal{J} \to X \downarrow G$ będzie funktorem z kategorii małej. Dla morfizmu $\alpha : i \to j$ w $\mathcal{J}$ oznaczmy $H(\alpha : i \to j) = H_\alpha : (A_i, f_i) \to (A_j, f_j)$. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest kategorią zupełną więc mamy stożek graniczny (L, τ) nad funktorem $P \circ H$ w $\mathcal{A}$. Mamy zatem

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[rrr, "H"] & & & X \downarrow G \arrow[rrr, "P"] & & & \mathcal{A} \\
& & & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & & & l \arrow[dl, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j"] & \\
i \arrow[r, "\alpha"] & j & \longmapsto\ G(A_i) \arrow[rr, "G(H_\alpha)"'] & & G(a_j) & \longmapsto\ A_i \arrow[rr, "H_\alpha"'] & & A_j
\end{tikzcd}
$$

W szczególności $(X, f = \{f_i : X \to G(A_i)\}_{i \in I})$ jest stożkiem nad funktorem $G \circ P \circ H$ o wierzchołku X (w kategorii $\mathcal{X}$). $(G(L), G(\tau))$ też jest stożkiem nad funktorem $G \circ P \circ H$ o wierzchołku $G(L)$. Ponieważ G zachowuje granice to $(G(L), G(\tau))$ jest stożkiem granicznym. Zatem istnieje jedyny morfizm $g : X \to G(L)$ w $\mathcal{X}$ będący morfizmem stożków $g : (X, f) \to (G(L), G(\tau))$, tzn. dla dowolnego $i \in I$ trójkąt

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_i"'] & & G(L) \arrow[dl, "G(\tau_i)"] \\
& G(A_i) &
\end{tikzcd}
$$

jest przemienny. To oznacza, że $((L, g), \tau)$ jest stożkiem nad H. Z jedyności g wynika, że jest to jedyny stożek nad H taki, że $(P(L, g), P(\tau)) = (L, \tau)$. Musimy jeszcze pokazać, że $((L, g), \tau)$ jest stożkiem granicznym. Niech $((B, h), \sigma)$ będzie stożkiem nad funktorem H, gdzie $\sigma_i : (B, h) \to (A_i, f_i)$ jest morfizmem w $X \downarrow G$ id diagram

$$
\begin{tikzcd}
& & G(B) \arrow[ddll, bend right, "G(\sigma_i)"'] \arrow[ddrr, bend left, "G(\sigma_j)"] & & \\
& X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"'] \arrow[drr, "f_j"] & G(L) \arrow[dl, "G(\tau_i)"] \arrow[dr, "G(\tau_j)"] & & \\
G(A_i) & & & G(A_j) &
\end{tikzcd}
$$

$$
G(A_i) \xrightarrow{G(H_\alpha)} G(A_j)
$$

jest przemienny. W szczególności (B, σ) jest stożkiem nad funktorem $P \circ H$ w $\mathcal{A}$. Ponieważ (L, τ) jest stożkiem granicznym nad $P \circ H$ to istnieje jedyny morfizm stożków $k : (B, \sigma) \to (L, \tau)$), tzn. $k : B \to L$ jest jedyny morfizmem w $\mathcal{A}$ takim, że dla dowolnego $\alpha : i \to j$ diagram

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "k"] \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\sigma_j"] & \\
A_i \arrow[rr, "H_\alpha"'] & L \arrow[l, "\tau_i"'] \arrow[r, "\tau_j"] & A_j
\end{tikzcd}
\tag{17}
$$

jest przemienny. Pokażemy, że $k : ((B, h), \sigma) \to ((L, g), \tau)$ jest jedynym morfizmem stożków z $((B, h), \sigma)$ do $((L, g), \tau)$. Jedyność wynika stąd, że k jest jedyny już jako morfizm stożków $k : (B, \sigma) \to (L, \tau)$). Zatem wystarczy pokazać, że $k : (B, h) \to (L, g)$ jest morfizmem w kategorii $X \downarrow G$, tzn., że trójkąt

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ G(B) \arrow[rr, "G(k)"'] & & G(L) \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Stosując funktor G do powyższego diagramu (17) dostajemy, że $G(k) : (G(B), G(\sigma) \to (G(L), G(\tau)$ jest morfizmem stożków w $\mathcal{A}$. Zatem dla $i \in \mathcal{J}$, korzystając z faktu, że $G(k)$ jest morfizmem stożków w $\mathcal{A}$ a $\sigma_i : (B, h) \to (A_i, f_i)$ jest morfizmem w $X \downarrow G$ otrzymujemy

$$G(\tau_i) \circ (G(k) \circ h) = G(\tau_i \circ k) \circ h = G(\sigma_i) \circ h = f_i$$

Ale morfizm $g : X \to G(L)$ tez ma tę własność, że dla dowolnego $i \in \mathcal{J}$

$$G(\tau_i) \circ g = f_i$$

i jest jedynym morfizmem o tej własności. Zatem $G(k) \circ h = g$ i $k : ((B, h), \sigma) \to ((L, g), \tau)$ jest jedynym morfizmem stożków. Co kończy dowód. Q.E.D.

Twierdzenie to ma szereg zastosowań. Poniżej podamy kilka z nich.

Przykłady.

1. Niech T będzie przeliczalną teorią równościową. Wtedy $U_T : Alg(T) \longrightarrow Set$, funktor zapominania z kategorii T-algebr w Set ma lewy sprzężony. Łatwo jest ten fakt pokazać z twierdzenia Freyda. Ponieważ U_T kreuje granice i Set ma granice to kategoria $Alg(T)$ ma granice i U_T je zachowuje. Zatem wystarczy sprawdzić warunek zbioru rozwiązującego. Ustalmy zbiór X.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] X \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[drr, "u_j"] & & & & \ldots A_i \ldots A_j \ldots \arrow[dd, "h"] \\ & \ldots U_T(A_i) \arrow[dl, "U_T(h)"] & \ldots U_T(A_j) \ldots & & \\ U_T(A) & & & & A \end{tikzcd}$$

   Niech A będzie T-algebrą a $g : X \to U_T(A)$ funkcją w uniwersum A. Obraz $g(X)$ generuje podalgebrę A' algebry A która ma moc nie większą od $\kappa = |\omega \times (X + 1)|$. Niech Y będzie zbiorem mocy κ. Jako zbiór rozwiązujący przyjmujemy wszystkie T-algebry A' których uniwersa są podzbiorami Y wraz z wszystkimi funkcjami $u' : X \to U_T(A')$ w uniwersa tych algebr. Takich algebr i takich morfizmów jest tylko zbiór. Wtedy każda funkcja $g : X \to U_T(A)$ faktoryzuje się przez pewną funkcję $u' : X \to A'$ oraz T-homomorfizm $h : A' \to A$ tak, że $g = U_T(h) \circ u'$.

   Uwaga. Przeliczalność teorii T nie jest istotna. Można ją łatwo zamienić na dowolną inna większą moc. Podobnie arność operacji w teorii T też nie musi być skończona.

2. Niech $Comp$ będzie kategorią przestrzeni zwartych (w tym T_2). Wtedy $U : Comp \longrightarrow Set$, funktor zapominania w Set ma lewy sprzężony. Ponownie skorzystamy z twierdzenia Freyda. Ponieważ U kreuje granice i Set ma granice to kategoria $Comp$ ma granice i U je zachowuje. Przy tym stwierdzeniu korzystamy z Twierdzenia Tichonowa o tym, że produkt przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą. Zatem wystarczy sprawdzić warunek zbioru rozwiązującego. Ustalmy przestrzeń zwartą X.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[drr, "u_j"] & & & \dots Z_i \dots Z_j \dots \arrow[dd, "h"] \\
& \dots U_T(Z_i) \arrow[dl, "U_T(h)"] & \dots U_T(Z_j) \dots & \\
U_T(Z) & & & Z
\end{tikzcd}
$$

Niech Z będzie przestrzenią zwartą $g : X \to U(Z)$ funkcją w uniwersum Z. Domknięcie $\overline{g(X)}$ w Z zbioru $g(X)$ jest podprzestrzenią zwartą Z. Pokażemy, że domknięcie $g(X)$ w dowolnej przestrzeni ma moc nie większą od mocy $\mathcal{PP}(X)$ (podwójnego zbioru potęgowego zbioru X). Wtedy jako zbiór rozwiązujący weźmiemy wszystkie przestrzenie zwarte o uniwersum będącym podzbiorem $\mathcal{PP}(X)$ wraz z wszystkimi funkcjami ze zbioru X w uniwersa tych przestrzeni.

Pozostaje do pokazania, że jeśli $g : X \to U(Z)$ jest funkcją w uniwersum przestrzeni zwartej Z taką, że $\overline{g(X)} = Z$ to istnieje injekcja $s : Z \to \mathcal{PP}(X)$. Dla $z \in Z$ funkcję s określamy następująco

$$s(z) = \{Y \subseteq X : z \in \overline{g(Y)}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

Niech $z, z' \in Z$ oraz $z \neq z'$. Ponieważ Z jest T_2 to istnieją zbiory otwarte rozłączne $U_z, U_{z'} \subseteq Z$ takie, że $z \in U_z$ oraz $z' \in U_{z'}$. Niech $V = g^{-1}(U_z) \subseteq X$. Wtedy mamy, że $z \in \overline{g(V)}$ ale $z' \notin \overline{g(V)}$. Zatem $V \in s(z)$ ale $V \notin s(z')$ i $s(z) \neq s(z')$ co było do pokazania.

6.8 Indukowane działania grup

W tym podrozdziale pokażemy jak dowolny homomorfizm grup indukuje trzy funktory sprzężone. Sytuacja którą tu przedstawimy ma wiele różnych uogólnień.

Homomorfizmem grup $f : H \to G$ indukuje funktor f^* obcięcia działania grupy G do działanie grupy H który ma dwa funktory sprzężone $G \otimes_H (-) \dashv f^* \dashv Hom_H(G, -)$

$$\begin{tikzcd}
Set^H \arrow[r, shift left=2, "G \otimes_H (-)"] \arrow[r, shift right=2, "Hom_H(G,-)"'] & Set^G \arrow[l, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

Opiszemy dokładnie te funktory i sprzężenia. Jeśli $\alpha : (X, a) \to (X', a')$ jest morfizmem G-ekwiwariantnym to mamy przemienny diagram

$$\begin{tikzcd}
H \times X \arrow[r, "f \times 1_X"] \arrow[d, "1_H \times \alpha"'] & G \times X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "1_G \times \alpha"'] & X \arrow[d, "\alpha"] \\
H \times X' \arrow[r, "f \times 1_{X'}"'] & G \times X' \arrow[r, "a'"'] & X'
\end{tikzcd}$$

Funktor f^* definiujemy tak

$$\begin{tikzcd}
Set^H & & Set^G \arrow[ll, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f^*(X,a) = \arrow[d, "f^*(\alpha)"'] & (X, a \circ (f \times 1_{X'}) \arrow[d, "\alpha"] & & (X,a) \arrow[d, "\alpha"] \\
f * (X', a') = & (X', a' \circ (f \times 1_X)) & \arrow[l, phantom] \arrow[r, phantom] & (X', a')
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \longleftarrow\!\shortmid \alpha$$

Funktor $G \otimes_H (-)$ na działaniu $(Y, b : H \times Y \to Y)$ jest zdefiniowany jako koekwalizator

$$\begin{tikzcd}
G \times H \times Y \arrow[r, shift left, "p_Y = (m \times 1_Y) \circ (1_G \times f \times 1_Y)"] \arrow[r, shift right, "p'_Y = 1_G \times b"'] & G \times Y \arrow[r, "q_Y"] & G \otimes_H Y
\end{tikzcd}$$

gdzie m jest działaniem w grupie G. Na elementach te morfizmy można zdefiniować tak

$$p_Y(g, h, y) = (g \cdot f(h), y) \ \text{ oraz } \ p_Y(g, h, y) = (g, b(h, y)),$$

dla $(g, h, y) \in G \times H \times Y$. Na elementy $G \otimes_H Y$ możemy patrzeć jak na pary $g \otimes y$, przy czym utożsamiamy pary $g \cdot f(h) \otimes y = g \otimes a(h, y)$, dla $h \in H$. Powyższy koekwalizator może być rozpatrywany jak koekwalizator w Set ale też jako koekwalizator w Set^G jako że na zbiorach $G \times H \times Y$ i $G \times Y$ mamy oczywiste działanie grupy G mnożące pierwszą współrzędną oraz funkcje p_Y i p'_Y. zachowują te działania. Zatem mamy działanie G na zbiorze $G \otimes_H Y$ zadane przez ten koekwalizator, które na elementach wygląda tak

$$G \times G \otimes_H Y \longrightarrow G \otimes_H Y$$

$$\langle g', g \otimes y \rangle \mapsto g'g \otimes y$$

Jeśli $\gamma : (Y', b') \to (Y, b)$ jest morfizme H-ekwiwariantnym to istneje jedyny morfizm $G \otimes_H \gamma$ uprzemieniający diagram

$$\begin{tikzcd}
G \times H \times Y' \arrow[r, shift left, "p_{Y'}"] \arrow[r, shift right, "p'_{Y'}"'] \arrow[d, "1_G \times 1_H \times \gamma"'] & G \times Y' \arrow[r, "q_{Y'}"] \arrow[d, "1_G \times \gamma"] & G \otimes_H Y' \arrow[d, "G \otimes_H \gamma"] \\
G \times H \times Y \arrow[r, shift left, "p_Y"] \arrow[r, shift right, "p'_Y"'] & G \times Y \arrow[r, "q_Y"] & G \otimes_H Y
\end{tikzcd}$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy funktor

$$\begin{tikzcd}
Set^H \arrow[rr, "G \otimes_H (-)"] & & Set^G \\
(Y', b') \arrow[d, "\gamma"'] & \arrow[r, mapsto] & G \otimes_H Y' \arrow[d, "G \otimes_H \gamma"] \\
(Y, b) & & G \otimes_H Y
\end{tikzcd}$$

Pokażemy, że $G \otimes_H (-) \dashv f^*$. Najpierw zdefiniujemy odpowiedniość

$$\frac{Y \xrightarrow{\beta} f^*(X)}{G \otimes_H Y \xrightarrow[\overline{\beta}]{} X}$$

gdzie $\beta : (Y, b) \to f^*(X, a)$ jest działaniem H-ekwiwariantnym, to znaczy że kwadrat

$$\begin{tikzcd}
H \times Y \arrow[rr, "b"] \arrow[d, "1 \times \beta"'] & & Y \arrow[d, "\beta"] \\
H \times X \arrow[r, "f \times 1"'] & G \times X \arrow[r, "a"'] & X
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. Łatwo zauważyć, że diagram

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times Y \arrow[dd, "\cdot \times 1_Y"'] & G \times H \times Y \arrow[l, "1 \times f \times 1"'] \arrow[r, "p'_Y"] \arrow[d, "1 \times f \times \beta"] \arrow[ddl, "p_Y"'] & G \times Y \arrow[d, "1 \times \beta"] \\
 & G \times G \times X \arrow[r, "1 \times a"'] \arrow[d, "\cdot \times 1_X"'] & G \times X \arrow[d, "a"] \\
G \times Y \arrow[r, "1 \times \beta"'] & G \times X \arrow[r, "a"'] & X
\end{tikzcd}$$

jest przemienny i w konsekwencji $a \circ (1 \times \beta) \circ p_Y = a \circ (1 \times \beta) \circ p'_Y$. Zatem istnieje jedyne $\overline{\beta}$ uprzemienniające poniższy diagram

$$\begin{tikzcd}
G \times H \times Y \arrow[r, shift left, "p_Y"] \arrow[r, shift right, "p'_Y"'] & G \times Y \arrow[r, "q_Y"] \arrow[d, "1 \times \beta"'] & G \otimes_H Y \arrow[d, "\overline{\beta}"] \\
 & G \times X \arrow[r, "a"'] & X
\end{tikzcd}$$

Teraz wystarczy pokazać, że przyporządkowanie

$$\overline{(-)} : Hom_H((Y,b), f^*(X,a)) \longrightarrow Hom_G(G \otimes_H Y, (X,a))$$

$$\beta \mapsto \overline{\beta}$$

jest bijekcją naturalną w (Y,b) i (X,a). Ponieważ diagram

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "{\langle e, 1_Y \rangle}"] \arrow[d, "\beta"'] & G \times Y \arrow[r, "q_Y"] \arrow[d, "1 \times \beta"'] & G \otimes_H Y \arrow[d, "\overline{\beta}"] \\
X \arrow[r, "{\langle e, 1_X \rangle}"'] & G \times X \arrow[r, "a"'] & X
\end{tikzcd}$$

jest przemienny (lewy kwadrat z przyczyn formalnych, prawy z definicji $\overline{\beta}$) to mamy

$$\overline{\beta} \circ q_Y \circ \langle e, 1_Y \rangle = a \circ (1_G \times \beta) \circ \langle e, 1_Y \rangle =$$

$$= a \circ \langle e, 1_X \rangle = \beta = \beta.$$

czyli, że przyporządkowanie $\beta \mapsto \overline{\beta}$ jest injekcją. By pokazać, że jest ono surjekcją niech $\alpha : (G \otimes_H, \circ_Y) \longrightarrow (X,a)$ będzie przekształceniem G-ekwiwariantnym. Pokażemy, że dla $\beta = \alpha \circ q_Y \circ \langle e, 1_Y \rangle$ mamy $\overline{\beta} = \alpha$. To wynika z przemienności diagramu

$$\begin{tikzcd}
G \times Y \arrow[r, "q_Y"] \arrow[d, "{1 \times \langle e, 1 \rangle}"] \arrow[ddd, bend right=60, "1 \times \beta"'] & G \otimes_H Y \arrow[ddd, "\alpha"] \\
G \times G \times Y \arrow[d, "1 \times q_Y"] & \\
G \times G \otimes_H Y \arrow[uur, "*_Y"'] \arrow[d, "1 \times q_Y"] & \\
G \times X \arrow[r, "a"'] & X
\end{tikzcd}$$

w którym lewy jest przemienny z definicji β, prawy dolny kwadrat jest przemienny ponieważ α jest G-ekwiwariantne, a przemienność górnego kwadratu wynika stąd, że q_Y jest morfizmem G-zbiorów oraz, że $(\circ_Y) \circ (1_G \times \langle e, 1_Y \rangle) = 1_{G \times Y}$

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times Y \arrow[d, "1_G \times q_Y"'] \arrow[r, shift right, "\cdot \times 1_Y"'] & G \times Y \arrow[l, shift right, "{1 \times \langle e, 1_Y \rangle}"'] \arrow[d, "q_Y"] \\
G \times G \otimes_H Y \arrow[r, "*_Y"'] & G \otimes_H Y
\end{tikzcd}$$

Zatem przy porządkowanie $\beta \mapsto \overline{\beta}$ jest bijekcją. By pokazać, że jest ono naturalne musimy pokazać, że

$$\frac{Y' \xrightarrow{\ \gamma\ } Y \xrightarrow{\ \beta\ } f^*(X) \xrightarrow{\ f^*(\alpha)\ } f^*(X')}{G \otimes_H Y' \xrightarrow[\ G \otimes_H \gamma\ ]{} G \otimes_H Y \xrightarrow[\ \overline{\beta}\ ]{} X \xrightarrow[\ \alpha\ ]{} X'}$$

to znaczy, że
$$\overline{f^*(\alpha)\circ\beta\circ\gamma} = \alpha\circ\overline{\beta}\circ G\otimes_H \gamma$$
Ale to wynika z diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd}
G\times Y' \arrow[r,"q_{Y'}"] \arrow[d,"1\times\gamma"'] \arrow[ddd, bend right=90, "1\times(f^*(\alpha)\circ\beta\circ\gamma)"'] & G\otimes_H Y' \arrow[d,"G\otimes_H\gamma"] \arrow[ddd, bend left=90, "\overline{f^*(\alpha)\circ\beta\circ\gamma}"] \\
G\times Y \arrow[r,"q_Y"] \arrow[d,"1\times\beta"] & G\otimes_H Y \arrow[d,"\overline{\beta}"'] \\
G\times f^*(X) \arrow[r,"a"'] \arrow[d,"1_G\times f^*(\alpha)"'] & X \arrow[d,"\alpha"] \\
G\times f^*(X') \arrow[r,"a'"'] & X'
\end{tikzcd}$$

w którym lewy kwadrat jest przemienny z przyczyn formalnych, górny i środkowy kwadrat jest przemienny z definicji $G\otimes_H\gamma$ i $\overline{\beta}$, odpowiednio, a dolny kwadrat jest przemienny ponieważ α jest przekształceniem G-ekwiwariantnym. Ponieważ morfizm z $G\otimes_H Y'$ do X' uprzemienniający zewnętrzny kwadrat jest jedyny (a mamy dwóch kandydató) to prawy kwadrat też jest przemienny. A to oznacza, że przyporządkowanie $\beta\mapsto\overline{\beta}$ jest naturalne.

Pokażemy teraz, że funktor $Hom_H(G,-)$ jest prawym sprzężonym do f^*. W tym przypadku będziemy wykorzystywali argumenty odwołujące się bezpośrednio do elementów rozważanych struktur. Aby notacja była przejrzysta, jeśli nie będzie prowadziło to do nieporozumień, złożenia w grupach G i H będziemy oznaczali $\cdot$ lub wcale, a działania grupy na zbiór przez $*$.

Funktor
$$Set^H \xrightarrow{\quad Hom_H(G,-)\quad} Set^G$$

$$\begin{tikzcd}
(Y',b') \arrow[d,"\beta"'] & & Hom_H(G,Y') \arrow[d,"Hom_H(G,\gamma)"] \\
(Y,b) \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & & Hom_H(G,Y)
\end{tikzcd}$$

jest zdefiniowany tak, że $Hom_H(G,Y)$ jest zbiorem H-ekwiwariantnych funkcji z G do (Y,a), gdzie G jest traktowane jako lewy H zbiór. Działanie grupy G na $Hom_H(G,Y)$ jest określone następująco:
$$*_Y : G\times Hom_H(G,Y)\longrightarrow Hom_H(G,Y)$$
$$\langle g,k\rangle\longmapsto k((-)\cdot g) : G\to Y$$
to znaczy, że działanie g z lewej strony na funkcję k mnoży argumenty funkcji k przez g z prawej strony. Zauważmy, że dla $g,g',g''\in G$ mamy
$$(g''*(g'*k))(g) = (g'*k)(g\cdot g'') = k((g\cdot g'')\cdot g') = k((g\cdot(g''\cdot g')) = (g''\cdot g')*k(g)$$

czyli $*_Y$ jest rzeczywiście działaniem grupy G na $Hom_H(G,Y)$. Dla dowolnej funkcji H-ekwiwariantnej γ funkcja

$$Hom_H(G,\gamma) : Hom_H(G,Y') \longrightarrow Hom_H(G,Y)$$

dana wzorem

$$k \longmapsto \gamma \circ k$$

jest G-ekwiwarinantna.

Odpowiedniość

$$\frac{f^*(X) \xrightarrow{\ \beta\ } Y}{X \xrightarrow[\widetilde{\beta}]{} hom_H(G,Y)}$$

gdzie $\beta : f^*(X,a) \to (Y,b)$ jest działaniem H-ekwiwariantnym, dana jest wzorami

$$\widetilde{\beta}(x) = \beta((-)\cdot x)), \qquad \beta(x) = \widetilde{\beta}(x)(e) \tag{18}$$

dla $x \in X$. Ponieważ β jest H-ekwiwariantna, to dla $h \in H$, $g \in G$ $x \in X$ to mamy

$$h * \widetilde{\beta}(x)(g)) = h * \beta(g * x)) = \beta(f(h) * (g * x)) =$$

$$= \beta((f(h)\cdot g) * x)) = \widetilde{\beta}(x)(f(h)\cdot g)$$

czyli, że $\widetilde{\beta}(x)$ jest funkcją H-ekwiwariantną. Ponadto, dla $g, g' \in G$ i $x' \in X$ mamy

$$(g' * \widetilde{\beta}(x))(g) = \widetilde{\beta}(x)(g \cdot g') = \beta((g\cdot g') * x) =$$

$$= \beta((g * (g' * x)) = \widetilde{\beta}(g' * x)(g) =$$

czyli, że $\widetilde{\beta}$ jest funkcją G-ekwiwariantną. A to oznacza, że

$$\widetilde{(-)} : Set^H(f^*(X), Y) \longrightarrow Set^H(X, hom_H(G,Y))$$

jest dobrze określoną funkcją. Z zależności (18) wynika, że odpowiedniość $\beta \mapsto \widetilde{\beta}$ jest bijekcją. Pozostaje do pokazania, że jest ona naturalna, czyli dla funkcji G-ekwiwariantnej $\alpha : X' \longrightarrow X$ i H-ekwiwariantnej $\gamma : Y \longrightarrow Y'$ Mamy odpowiedniość

$$\frac{f^*(X') \xrightarrow{f^*(\alpha)} f^*(X) \xrightarrow{\ \beta\ } Y \xrightarrow{\ \gamma\ } Y'}{X' \xrightarrow[\alpha]{} X \xrightarrow[\widetilde{\beta}]{} hom_H(G,Y) \xrightarrow[hom_H(G,\gamma)]{} hom_H(G,Y')}$$

Co można sprawdzić bezpośrednio licząc. Mamy dla $x' \in X'$ oraz $g \in G$

$$(\gamma \circ \widetilde{\beta \circ f^*}(\alpha))(x')(g) = \gamma \circ \beta \circ f^*(\alpha)(g * x') =$$

$$= \gamma \circ \beta(\alpha(g * x')) = \gamma(\beta(g * \alpha(x')) =$$

$$\gamma(\widetilde{\beta}(\alpha(x'))(g)) = (hom_H(G,\gamma)(\widetilde{\beta}(\alpha(x')))(g) =$$

$$= (hom_H(G,\gamma) \circ \widetilde{\beta} \circ \alpha)(x')(g)$$

7 Logika równościowa w kategoriach

7.1 O logice jako takiej

Trudno jest znaleźć taką definicję logiki, która by odpowiadała wszystkim sądzącym, że się nią zajmują. W bardzo ograniczonym matematycznym sensie możemy wyznaczyć logikę podając pewien zbiór symboli/operacji logicznych i praw, którym one podlegają. Operacje logiczne mogą pochodzić na przykład z tej listy: $=$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\bot$, $\exists$, $\forall$, $\exists!$, $\exists_{\geq k}$, itd. Mając ustaloną logikę, to znaczy zbiór operacji logicznych i praw którym one podlegają możemy rozważać teorie w tej logice. Najpierw musimy opisać sygnaturę to znaczy symbole poza logiczne naszej teorii. Jeśli sygnatura jest wielosortowa (a my się właśnie takimi zajmiemy) to sygnatura zawiera zbiór sortów (które będą interpretowane jako różne rodzaje obiektów o których traktuje teoria). Oprócz tego sygnatura zawiera symbole funkcyjne i relacyjne. Każdy symbol funkcyjny musi mieć określoną arność to znaczy liczbę argumentów i ich sorty. Mając sygnaturę teorii budujemy indukcyjnie termy nad tą sygnaturą. A mając termy budujemy formuły używając operacji logicznych dozwolonych w naszej logice. Tak budujemy język naszej teorii. Niektóre z formuł języka naszej teorii przyjmujemy za aksjomaty.

Sorty, symbole funkcyjne i relacyjne naszej teorii interpretujemy w jakimś 'uniwersum semantycznym', na przykład w zbiorach lub ogólniej w kategoriach. Jeśli są to kategorie to musimy uważać by miały dostatecznie bogatą strukturę by można było interpretować w nich wszystkie operacje logiczne używane do budowania formuł naszej teorii. Im bogatsza logika tym kategorie, w których może być interpretowana, muszą mieć bogatszą strukturę. Mając interpretacje sygnatury i operacji logicznych możemy definiować interpretację wszystkich formuł naszej teorii. Wtedy możemy określić pojęcie spełniania formuły przy danej interpretacji, to znaczy powiedzieć kiedy formuła jest prawdziwa przy danej interpretacji. Interpretacja jest modelem teorii jeśli spełnia wszystkie aksjomaty tej teorii. Ponieważ sprawdzenie czy dana formuła jest prawdziwa przy danej interpretacji może być trudnym zadaniem dobrze jest mieć formalny system wnioskowania, który przy pomocy manipulacji na symbolach pomagał poznać dany model czy modele. W szczególności w taki system powinien zawierać reguły które prowadzą od formuł prawdziwych do nowych formuł prawdziwych. Ten wymóg zwany jest adekwatnością systemu formalnego. Ponadto dobrze jest by taki system był też pełny, to znaczy taki, że jeśli jakieś zdanie φ prawdziwe jest przy każdej interpretacji zdań ze zbiory Φ to istnieje dowód w naszym systemie zdania φ używający jako przesłanek zdań ze zbiory Φ.

W powyższym stylu opiszemy teraz logikę równościową wielosortową w kategoriach ze skończonymi produktami. Jest to jedna z najuboższych logik ale już ona daje pewną idee jaka jest specyfika uprawiania logiki w kategoriach.

7.2 Logika równościowa w kategoriach

Sygnatura *Sygnatura* (wielosortowa) Σ składa się ze

1. zbioru *sortów* $X, Y, \ldots$
2. zbioru symboli funkcyjnych $f, g, \ldots$; każdy symbol ma określoną *arność* lub *typ* (e.g. $f : X_1, \ldots, X_n \to Y$; gdy $n = 0$ to f jest stałą sortu Y.

Termy Dla każdego sortu X mamy nieskończony zbiór zmiennych sortu X. Jeśli x jest zmienną to przez $\sharp x$ oznaczamy sort zmiennej x.

Zdefiniujemy pojęcie termu t nad Σ i jego typu X; oznaczenie $t : X$. *Zbiór termów* nad Σ jest to najmniejszy zbiór taki, że

1. zmienna x jest termem typu $\sharp x$,
2. jeśli $t_1 : X_1, \ldots t_n : X_n$, są termami oraz $f : X_1, \ldots, X_n \to X$ jest symbolem funkcyjnym, to $f(t_1, \ldots t_n) : X$ też jest termem typu X.

Konteksty *Kontekst* jest to skończony ciąg różnych zmiennych $\vec{x} = \langle x_1, \ \ldots, x_n \rangle$ gdzie $n \geq 0$. Wszystkie zmienne w jednym kontekście muszą być różne ale mogą mieć te same typy. Jeśli chcemy wskazać jakie typy mają zmienne to piszemy $\langle x_1 : X_1, \ \ldots, x_n : X_n \rangle$ lub krócej $\vec{x} : \vec{X}$.

Termy w kontekście *Term w kontekście* $t(\vec{x})$ jesto term t wraz z kontekstem $\vec{x}$, który zawiera wszystkie zmienne występujące w t. Jeśli chcemy podkreślić typ termu w kontekście to piszemy $t(\vec{x}) : X$.

Równość w kontekście *Równość w kontekście* to równość termów $s = t(\vec{x})$ gdzie $s(\vec{x})$ oraz $t(\vec{x})$ są termami w kontekście.

Teoria równościowa *Teoria równościowa* (wielosortowa) nad sygnatura Σ składa się ze zbioru równości termów w kontekście na sygnaturą Σ.

Interpretacja Niech cC będzie kategorią ze skończonymi produktami. *Interpretacją sygnatury* Σ (lub Σ-*strukturą*) w kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy przyporządkowanie sortom X z Σ obiektów $M(X)$ kategorii $\mathcal{C}$, oraz symbolom funkcyjnym $f : X_1, \ldots, X_n \to X$ z Σ morfizmów w $\mathcal{C}$

$$M(f) \ : \Pi_{i=1}^{n} M(X_i) = M(X_1) \times \ldots M(X_n) \longrightarrow M(X)$$

Jeśli $n = 0$ to $M(f) : 1 \longrightarrow M(X)$ jest morfizmem z obiektu końcowego, czyli stałą.

Interpretacja termów w kontekście Interpretację M sygnatury Σ rozszerzamy do *interpretacji termów w kontekście* czyli w tym przypadku do interpretacji całego naszego języka. Dla termu w kontekście $t(\vec{x} : \vec{X}) : X$ definiujemy morfizm

$$\llbracket t(\vec{x}) \rrbracket_M \ : \Pi_{i=1}^{n} M(X_i) \longrightarrow M(X)$$

indukcyjnie po budowie termu t w ustalonym kontekście $\vec{x} = \langle x_1, \ \ldots, x_n \rangle$:

1. jeśli $t = x_j$ to morfizm $\llbracket t(\vec{x}) \rrbracket_M = \pi_j \ : \ \Pi_{i=1}^{n} M(X_i) \longrightarrow M(X_k)$ jest rzutowaniem na j-ta współrzędną;
2. jeśli $t = f(t_1, \ldots, t_k)$, symbol funkcyjny f jest typu $f : Y_1, \ldots, Y_k \to X$, oraz $t_i : Y_i$ dla $i = 1, \ldots, k$ to morfizm $\llbracket t(\vec{x}) \rrbracket_M$ jest następującym złożeniem

$$\Pi_{i=1}^{n} M(X_i) \xrightarrow{\langle \llbracket t_1(\vec{x}) \rrbracket_M, \ldots, \llbracket t_k(\vec{x}) \rrbracket_M \rangle} \Pi_{j=1}^{k} M(Y_i) \xrightarrow{M(f)} M(Y)$$

Na przykład dla termu $x(x)$ mamy $\llbracket x(\vec{x}) \rrbracket_M = id_{M(\sharp x)}$.

Często, jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy opuszczali indeks M w interpretacji termu pisząc $\llbracket t(\vec{x}) \rrbracket$ zamiast $\llbracket t(\vec{x}) \rrbracket_M$.

Spełnianie Σ-struktura M *spełnia* równość w kontekście $s = t(\vec{x})$, oznaczenie $M \models s = t(\vec{x})$ wtedy i tylko wtedy gdy $\llbracket s(\vec{x}) \rrbracket_M = \llbracket t(\vec{x}) \rrbracket_M$.

T-algebra Niech M będzie Σ-struktura, a T teorią równościowa nad Σ. Wtedy M jest *modelem teorii* T, (lub T*-algebra*) wtedy i tylko wtedy gdy M spełnia wszystkie równości teorii T.

Homomorfizm T-algebr Niech T będzie teorią równościowa nad Σ. *Homomorfizm* T-algebr $h : M \to N$ jest to rodzina morfizmów $h_X : M(X) \to N(X)$ indeksowana sortami X z Σ taka, że dla dowolnego symbolu funkcyjnego $f : X_1, \ldots, X_n \to X$, kwadrat

$$\begin{tikzcd} \Pi_{i=1}^n M(X_i) \arrow[r, "\Pi_{i=1}^n M(h_{X_i})"] \arrow[d, "M(f)"'] & \Pi_{i=1}^n N(X_i) \arrow[d, "N(f)"] \\ M(X) \arrow[r, "h_X"'] & N(X) \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Mamy homomorfizm identycznościowy i złożenia homomorfizmów są homomorfizmami. Zatem mamy kategorię $Alg_{\mathcal{C}}(T)$ T-algebr w $\mathcal{C}$ czasem oznaczaną też $Mod(T, \mathcal{C})$.

Przykład. Teoria monoidów T ma jeden sort X, dwa symbole funkcyjne

$$e :\to X \quad \text{oraz} \quad \circ X, X \to X$$

oraz aksjomaty

$$\circ(e, x) = x = \circ(x, e) \quad (x)$$
$$\circ(\circ(x, x'), x'') = \circ(x, \circ(x', x'')) \quad (x, x', x'')$$

T-algebra M kategorii $\underset{5}{=}Set$ to zwykły monoid. $M(X)$ jest uniwersum monoidu, morfizm z obiektu końcowego $M(e) : 1 \to M(X)$ wyznacza element neutralny w $M(X)$ a funkcja $M(circ) : M(X) \times M(X) \to M(X)$ jest mnożeniem w monoidzie. Spełnianie równości $\circ(e, x) = x \quad (x)$ w M mówi, że trójkąt

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[r, "\langle \llbracket e(x) \rrbracket_M, x(x) \rrbracket_M \rangle"] \arrow[dr, "\llbracket x(x) \rrbracket_M"'] & M(X) \times M(X) \arrow[d, "M(\circ)"] \\ & M(X) \end{tikzcd}$$

jest przemienny, gdzie $\llbracket x(x) \rrbracket = id_{M(X)}$ a morfizm $\llbracket e(x) \rrbracket$ jest złożeniem

$$M(X) \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{M(e)} M(X)$$

Czyli jeśli ta równość jest spełniona to $M(e)$ jest elementem neutralnym z lewej strony ze względu na $M(\circ)$. Podobnie równość $\circ(\circ(x, x'), x'') = \circ(x, \circ(x', x'')) \quad (x, x', x'')$ jest spełniona w M gdy kwadrat

$$\begin{tikzcd} M(X) \times M(X) \times M(X) \arrow[r, "id_{M(X)} \times M(\circ)"] \arrow[d, "M(\circ) \times id_{M(X)}"'] & M(X) \times M(X) \arrow[d, "M(\circ)"] \\ M(X) \times M(X) \arrow[r, "M(\circ)"'] & M(X) \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Czyli gdy działanie $M(\circ)$ jest łączne.

System formalny

Reguły wnioskowania dla logiki równościowej są szczególnie proste. Pierwsze trzy mówią, że równość jest relacją równoważności. Reguła osłabiania mówi, że jeśli równość zachodzi w jakimś kontekście to zachodzi też w większym kontekście. Ostatnia reguła mówi, że jeśli podstawimy równe termy w to samo miejsce w równych termach to wyniki tego podstawienia też będą równe czyli, że równość jest kongruencją.

Regułu wnioskowania

zwrotność	symetria	przechodniość	osłabianie	podstawienie
$\dfrac{}{t{=}t(\vec{x})}$	$\dfrac{s{=}t(\vec{x})}{t{=}s(\vec{x})}$	$\dfrac{r{=}s(\vec{x}),\ s{=}t(\vec{x})}{t{=}t(\vec{x})}$	$\dfrac{s{=}t(\vec{x}),\ \vec{x}{\subseteq}\vec{y}}{s{=}t(\vec{y})}$	$\dfrac{s{=}s'(\vec{x}),\ t{=}t'(\vec{x},y)}{t[s/y]{=}t'[s'/y](\vec{x})}$

$\vec{x} \subseteq \vec{y}$ oznacza, że zmienne z $\vec{x}$ występują w $\vec{y}$, oraz $t[s/y]$ oznacza term powstały z termu t prze wstawienie termu s we wszystkie wystąpienia zmiennej y w termie t. Term $t[s/y]$ jest dobrze określony gdy sort y i s są zgodne tzn. $s : \sharp y$.

Dowód Niech teraz Φ będzie zbiorem równości a φ równością. *Dowód* φ ze zbioru Φ jest to ciąg równości taki, że ostatnią równością w tym ciągu jest φ, i każda równość w tym ciągu albo należy do zbioru Φ albo powstaje ze poprzednich równości przez zastosowanie jednej z powyższych reguł wnioskowania. Jeśli istnieje dowód φ ze zbioru Σ to piszemy $\Sigma \vdash \varphi$.

Twierdzenie Zbiór twierdzeń teorii równościowej T jest to najmniejszy zbiór równości zawierający aksjomaty teorii T oraz zamknięty na powyższe reguły wnioskowania.

Twierdzenie 7.1 (O adekwatności) *Niech M będzie Σ-strukturą, Φ będzie zbiorem równości a φ równością. Jeśli $\Phi \vdash \varphi$ oraz $M \models \Phi$ to $M \models \varphi$.*

Dowód: Należy pokazać, że równości spełniane w Σ-strukturze M są zamknięte na reguły wnioskowania. Zwrotność, symetria i przechodniość są oczywiste natomiast zamknięcie na reguły osłabiania i podstawienia wynikają z poniższych lematów.
Q.E.D.

Lemat 7.2 (O podstawianiu) *Niech M będzie Σ-strukturą. Niech $t(\vec{x})$ będzie termem w kontekście $\vec{x} = \langle x_1 : X_1, \ldots, x_n : X_n\rangle$, $s_i(\vec{y}) : X_i$ będzie termem w kontekście $\vec{y}$, dla $i = 1, \ldots, n$. Wtedy*

$$\llbracket t[\vec{s}/\vec{y}]\rrbracket = \llbracket t(\vec{x})\rrbracket \circ \langle \llbracket s_1(\vec{y})\rrbracket, \ldots, \llbracket s_n(\vec{y})\rrbracket\rangle$$

gdzie $t[\vec{s}/\vec{y}$ oznacza jednoczesne podstawienie termów $s_1, \ldots, s_n$ w miejsca zmiennych $x_1 \ldots, x_n$.

Dowód: Dowód lematu przeprowadzimy przez indukcję ze względu na budowę termu t.

Jeśli $t = x_i$ to mamy

$$\llbracket t(\vec{x})\rrbracket \circ \langle \llbracket s_1(\vec{y})\rrbracket, \ldots, \llbracket s_n(\vec{y})\rrbracket\rangle == \pi_i \circ \langle \llbracket s_1(\vec{y})\rrbracket, \ldots, \llbracket s_n(\vec{y})\rrbracket\rangle = \llbracket s_i(\vec{y})\rrbracket = \llbracket t[\vec{s}/\vec{y}]\rrbracket$$

Jeśli $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ to mamy

$$\llbracket t(\vec{x})\rrbracket \circ \langle \llbracket s_1(\vec{y})\rrbracket, \ldots, \llbracket s_n(\vec{y})\rrbracket\rangle =$$

$$= (M(f) \circ \langle \|t_1(\vec{x})\|, \ldots, \|t_k(\vec{x})\|\rangle) \circ \langle \|s_1(\vec{y})\|, \ldots, \|s_n(\vec{y})\|\rangle =$$
$$= M(f) \circ \langle \|t_1(\vec{x})\| \circ \langle \|s_1(\vec{y})\|, \ldots, \|s_n(\vec{y})\|\rangle, \ldots, \|t_k(\vec{x}) \circ \langle \|s_1(\vec{y})\|, \ldots, \|s_n(\vec{y})\|\rangle\|\rangle =$$
$$= M(f) \circ \langle \|t_1[\vec{s}/\vec{y}]\|, \ldots, \|t_k[\vec{s}/\vec{y}]\|\rangle = \|t[\vec{s}/\vec{y}]\|$$

Q.E.D.

Wniosek 7.3 *Równości spełniane w Σ-strukturze M są zamknięte na regułę podstawienia.*

Dowód: Załóżmy, że $\|s(\vec{x})\|_M = \|s'(\vec{x})\|_M$ oraz $\|t(\vec{x}, y)\|_M = \|t'(\vec{x}, y)\|_M$, $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$. Wtedy używając Lematu o podstawianiu otrzymujemy

$$\|t[s/y](\vec{x})\|_M = \|t[(\vec{x}, s)/(\vec{x}, y)](\vec{x})\| =$$
$$= \|t(\vec{x}, y)\| \circ \langle \|x_1(\vec{x})\|, \ldots, \|x_n(\vec{x})\|, \|s(\vec{x})\|\rangle =$$
$$= \|t'(\vec{x}, y)\| \circ \langle \|x_1(\vec{x})\|, \ldots, \|x_n(\vec{x})\|, \|s'(\vec{x})\|\rangle =$$
$$= \|t'[(\vec{x}, s')/(\vec{x}, y)](\vec{x})\| = \|t'[s'/y](\vec{x})\|_M.$$

Q.E.D.

Lemat 7.4 *Niech $t(\vec{x})$ będzie termem w kontekście oraz $\vec{x} \subseteq \vec{y}$. Wtedy $\|t(\vec{y})\| = \|t(\vec{x})\| \circ \pi$ gdzie π jest rzutowaniem*

$$\Pi_{j=1}^{n} M(Y_j) \xrightarrow{\langle \pi_{f(1)}, \ldots, \pi_{f(k)}\rangle} \Pi_{i=1}^{k} M(X_i)$$

$f : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ *oraz* $y_{f(i)} = x_i$ *dla* $i = 1, \ldots, k$.

Dowód: Wystarczy przyjąć w Lemacie o podstawianiu za termy s_i zmienne x_i. Q.E.D.

Wniosek 7.5 (Osłabianie) *Równości spełniane w Σ-strukturze M są zamknięte na regułę osłabiania.*

Dowód: Niech konteksty $\vec{x}$, $\vec{y}$ i mofizm π bedą jak w poprzednim lemacie, oraz $M \models t = t'(\vec{x})$. Wtedy

$$\|t(\vec{y})\|_M = \|t(\vec{x})\| \circ \pi = \|t'(\vec{x})\| \circ \pi = \|t'(\vec{y})\|_M$$

Q.E.D.

Przykład. Poniższy przykład pokazuje, że jeśli byśmy używali reguł bez kontekstu to nasz system nie był by adekwatny. Niech sygnatura Σ teorii T będzie taka jak na diagramie

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d, shift right, "a"'] \arrow[d, shift left, "b"] & \\
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, shift left, "m"] & Z \arrow[l, shift left, "e"]
\end{tikzcd}$$

To znaczy Σ ma trzy sorty X, Y, Z i pięć symboli funkcyjnych z których na przykład f prowadzi z sortu X do Y, natomiast a z produktu pustego w Y, itd.

A równości teorii T są następujące:

$$f(x) = a, \quad g(x) = b, \quad e(m(y)) = y, \quad m(f(x)) = m(g(x).$$

Wtedy mamy

$$a = f(x) = e(m(f(x))) = e(m(g(x))) = g(x) = b$$

czyli $T \vdash a = b$, to znaczy, że T dowodzi równosci $a = b$ bez kontekstu. Ale są modele teorii T w Set w których równość $a = b$ nie zachodzi. Niech M będzie następującą Σ-strukturą w Set:

$$M(X) = \emptyset, \quad M(Y) = M(Z) = \{0,1\},$$

$$M(a) = 0, \quad M(b) = 1, \quad M(m) = M(e) = id_{\{0,1\}}, \quad M(f) = M(g) = \emptyset$$

Natomiast, jeśli byśmy rozważali powyższą teorię z uwzględnieniem kontekstów to równość T wyglądały by tak

$$f(x) = a(x), \quad g(x) = b(x), \quad e(m(y)) = y(y), \quad m(f(x)) = m(g(x)(x)$$

i moglibyśmy co najwyżej udowodnić, równość w kontekście $a = b(x)$. To oznacza, że morfizm $! : M(X) \to 1$ ekwalizuje morfizmy $M(a)$ i $M(b)$, lub innymi słowy, że diagram

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[r, "!"'] & 1 \arrow[r, shift left, "M(a)"] \arrow[r, shift right, "M(b)"'] & M(Y) \end{tikzcd}$$

jest przemienny. I to jest prawdą w każdym modelu teorii T, choć w powyższym modelu jest to prawdą z tego powodu, że $M(X)$ jest zbiorem pustym.

Twierdzenie 7.6 (O zupełności względem Set**)** *Niech T będzie teorią równościowa nad sygnaturą Σ, φ równością nad Σ. Wtedy φ jest twierdzeniem teorii T wtedy i tylko wtedy gdy φ jest prawdziwe we wszystkich T-algebrach w Set.*

Dowód: Dla dowolnego kontekstu $(\vec{x} : \vec{A}) = (x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n)$, skonstruujemy T-algebrę $F_T(\vec{x})$ wolną o generatorach $(x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n)$ w Set o tej własności, że dla dowolnej równości $u = v(\vec{x})$ mamy

$$F_T(\vec{x}) \models u = v(\vec{x}) \qquad \text{wiw gdy} \qquad T \vdash u = v(\vec{x}) \tag{19}$$

czyli, że $F_T(\vec{x})$ spełnia dokładnie te równości w kontekście $\vec{x}$, które dowodzi teoria T.

Interpretacją sortu A sygnatury Σ jest zbiór termów typu A podzielony przez relacją dowodliwości w teorii T czyli

$$F_T(\vec{x})(A) = \{s(\vec{x}) \,|\, s \text{ term typu } A\}_{/\sim_T}$$

gdzie $\sim_T$ jest relacją równoważności taką, że

$$s(\vec{x}) \sim_T t(\vec{x}) \qquad \text{wiw gdy} \qquad T \vdash s = t(\vec{x}).$$

Interpretacją symbolu funkcyjnego $f : B_1, \dots B_m \to B$ sygnatury Σ jest funkcja

$$F_T(\vec{x})(f) : F_T(\vec{x})(B_1) \times \dots \times F_T(\vec{x})(B_m) \longrightarrow F_T(\vec{x})(B)$$

dana jest wzorem

$$F_T(\vec{x})(f)([s_1(\vec{x})]_{\sim_T}, \dots, [s_m(\vec{x})]_{\sim_T}) = [f(s_1, \dots, s_m)(\vec{x})]_{\sim_T}$$

dla $[s_1(\vec{x})]_{\sim_T} \in F_T(\vec{x})(B_1), \dots, [s_m(\vec{x})]_{\sim_T} \in F_T(\vec{x})(B_m)$. Zauważmy, ze jeśli

$$\frac{s_1 = s'_1(\vec{x}), \dots, s_m = s'_m(\vec{x}), \;\; f(\vec{y}) = f(\vec{y})\ (\vec{y})}{f(s_1, \dots, s_m) = f(s'_1, \dots, s'_m)(\vec{x})}$$

(gdzie y_j, s_j, s'_j maja tem sam sort) jest instancją reguły podstawienia. Zatem jeśli

$$s_1 \sim_T s'_1, \dots, s_m \sim_T s'_m \quad \text{to} \quad f(s_1, \dots, s_m) \sim_T f(s'_1, \dots, s'_m)$$

A to oznacza, że definicja $F_T(\vec{x})(f)$ nie zależy od wyboru reprezentantów.

Zauważmy, ze jeśli $T \vdash u = v(\vec{y})$ to dla dowolnych termów $s_1(\vec{x}), \dots, s_m(\vec{x})$ mających sorty takie jak zmienne $y_1, \dots, y_m$

$$\frac{s_1 = s_1(\vec{x}), \dots, s_m = s_m(\vec{x}), \;\; u = v\ (\vec{y})}{u(s_1, \dots, s_m) = v(s'_1, \dots, s'_m)(\vec{x})}$$

jest instancją reguły podstawienia. Zatem jeśli

$$u \sim_T v \quad \text{to} \quad u(s_1, \dots, s_m) \sim_T t(s_1, \dots, s_m)$$

A to oznacza, że definicja $F_T(\vec{x})$ spełnia wszystkie równości teorii T, czyli, ze $F_T(\vec{x})$ jest T-algebrą.

Z drugiej strony, $F_T(\vec{x}) \models u = v(\vec{x})$ oznacza, że funkcje

$$F_T(\vec{x})(u), F_T(\vec{x})(v) : F_T(\vec{x})(A_1) \times \dots \times F_T(\vec{x})(A_n) \longrightarrow F_T(\vec{x})(B)$$

są równe, gdzie B jest wspólnym sortem termów u i v. W szczególności dla termów $x_1(\vec{x}), \dots, x_n(\vec{x})$ mamy

$$[u(\vec{x})]_{\sim_T} = F_T(\vec{x})(u)([x_1(\vec{x})]_{\sim_T}, \dots, [x_n(\vec{x})]_{\sim_T}) =$$

$$= F_T(\vec{x})(v)([x_1(\vec{x})]_{\sim_T}, \dots, [x_n(\vec{x})]_{\sim_T}) = [v(\vec{x})]_{\sim_T}$$

czyli, że $T \vdash s = t(\vec{x})$. To kończy dowód (19) i całego twierdzenia.

Q.E.D.

7.3 Od teorii do kategorii, model generic

Poniższy fakt mówi, że modele można transportować z kategorii do kategorii przy pomocy funktorów zachowujących produkty.

Fakt 7.7 *Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będzie funktorem zachowującym skończone produkty, T teorią równościową nad Σ. Wtedy*

1. *Jeśli M jest T algebrą w $\mathcal{C}$ to $F(M)$, złożenie przyporządkowania M z funktorem F, jest T-algebrą w $\mathcal{D}$.*

2. *Jeśli $h : M \to N$ jest homomorfizmem T-algebr w $\mathcal{C}$ to $F(h) : F(M) \to F(N)$ jest homomorfizmem T-algebr w $\mathcal{D}$.*

3. *Jeśli M jest T algebrą w $\mathcal{C}$ i $\tau : F \to F'$ jest naturalna transformacją pomiędzy funktorami $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zachowującymi skończone produkty to rodzina $\tau_X : F(M) \to F'(M)$ dla X będącymi sortami Σ jest homomorfizmem T algebr w $\mathcal{D}$.*

Dowód: Intepretacja M sygnatury Σ w kategorii $\mathcal{C}$ używa skończonych produktów. Zatem jeśli $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zachowuje skończone produkty to $F(M)$ złożenie interpretacji M z funktorem F jest interpretacja Σ w $\mathcal{D}$. Ponadto interpretacja termów nad Σ w kategorii używa skończonych produktów, złożeń i identyczności. Jako że te operacje są zachowywane przez funktor F, dla dowolnego termu $t(\vec{x})$ nad Σ, mamy $F([\![t(\vec{x})]\!]_M) = [\![t(\vec{x})]\!]_{F(M)}$. W szczególności Σ-struktura $F(M)$ w $\mathcal{D}$ spełnia wszystkie te równości które spełniała Σ-struktura M w $\mathcal{C}$. To pokazuje punkt 1.

Punkty 2. i 3. są prostsze i zostawiamy je jako ćwiczenie. Q.E.D.

Wniosek 7.8 *Mamy 2-funktor*

$$FP \xrightarrow{\quad Mod(T,-)\quad} CAT$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, shift right=3, "F"'] \arrow[d, shift left=3, "F'"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\tau}"] \\ \mathcal{D} \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} Mod(T,\mathcal{C}) \arrow[d, shift right=6, "Mod(T,F)"'] \arrow[d, shift left=6, "Mod(T,F')"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{Mod(T,\tau)}"] \\ Mod(T,\mathcal{D}) \end{tikzcd}$$

gdzie FP jest 2-kategorią kategorii ze skończonymi produktami, funktorów zachowujących skończone produkty i naturalnych transformacji pomiędzy niemi, a CAT jest 2-kategorią kategorii, funktorów i naturalnych transformacji pomiędzy niemi.

Dowód: Przekształcenie opisane w powyższym fakcie przekształca kategorie na kategorie, funktory na funktory i transformacje naturalne na transformacje naturalne. Ponadto zachowuje dziedziny i przeciwdziedziny funktorów i naturalnych transformacji, identyczności na kategoriach i na funktorach, złożenia funktorów oraz wertykalne i horyzontalne złożenia naturalnych transformacji. To tyle ile w tym przypadku znaczy być 2-funktorem. Q.E.D.

Fakt 7.9 (Kategoria klasyfikująca i model generic) *Niech T będzie teorią równościową. Wtedy istnieje kategoria klasyfikująca $Cl[T]$ ze skończonymi produktami oraz model generic $\mathcal{G}_T$ teorii T w kategorii $Cl[T]$ takie, że dla dowolnej kategorii ze skończonymi produktami $\mathcal{E}$*

1. *dla dowolnej T-algebry M w $\mathcal{E}$ istnieje jedyny (z dokładnością do izomorfizmu) funktor $\overline{M} : Cl[T] \to \mathcal{E}$ zachowujący produkty taki, że M jest izomorficzny z $\overline{M}(\mathcal{G}_T)$.*

2. *dla dowolnego homomorfizmu T-algebr $h : M \to N$ w $\mathcal{E}$ istnieje jedyna transformacja naturalna $\overline{h} : \overline{M} \to \overline{N}$ uprzemienniająca diagram*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\cong"'] & N \arrow[d, "\cong"] \\ \overline{M}(\mathcal{G}_T) \arrow[r, "\overline{h}_{\mathcal{G}_T}"'] & \overline{N}(\mathcal{G}_T) \end{tikzcd}$$

Dowód: Niech T będzie teorią równościową nad sygnaturą Σ. Obiektami kategorii $Cl[T]$ są konteksty $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$ nad Σ. Jeśli $\vec{y} = y_1, \ldots, y_m$ jest innym kontekstem nad Σ to morfizm z $\vec{x}$ do $\vec{y}$

$$[\vec{t}(\vec{x})]_\sim = [t_1(\vec{x}), \ldots, t_m(\vec{x})]_\sim : \vec{x} \longrightarrow \vec{y}$$

jest klasą abstrakcji m-tki termów $t_1(\vec{x}), \ldots, t_m(\vec{x})$ w kontekście $\vec{x}$, takich że sort termu t_i jest taki sam jak sort zmiennej y_i, dla $i = 1, \ldots, m$. Dwie m-tki $t_1(\vec{x}), \ldots, t_m(\vec{x})$ oraz $s_1(\vec{x}), \ldots, s_m(\vec{x})$ utożsamiamy gdy $T \vdash t_i = s_i(\vec{x})$, dla $i = 1, \ldots, m$.

Wtedy morfizm

$$[x_1(\vec{x}), \ldots, x_n(\vec{x})]_\sim : \vec{x} \longrightarrow \vec{x}$$

jest morfizmem identycznościowym. Złożenie jest definiowane jako podstawienie termów w termach[6]

$$\begin{tikzcd} & \vec{y} \arrow[dr, "{[\vec{t}(\vec{y})]_\sim}"] & \\ \vec{x} \arrow[ur, "{[\vec{s}(\vec{x})]_\sim}"] \arrow[rr, "{[\vec{t}(\vec{s}/\vec{y})(\vec{x})]_\sim}"'] & & \vec{z} \end{tikzcd}$$

Używając systemu formalnego łatwo pokazać, że w ten sposób zdefiniowane złożenia sa dobrze określone (nie zależą od wyboru reprezentantów), identyczności są rzeczywiście neutralne ze względu na złożenia oraz, że złożenia sa łączne.

Obiektem końcowym w kategorii $Cl[T]$ jest kontekst pusty, a produktem binarnym kontekstów $\vec{x}$ i $\vec{y}$ jest urozłączniona konkatenacja $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Dokładniej niech $\vec{x'}$ i $\vec{y'}$ będą kontekstami mającymi zmienne tych samych typów co $\vec{x}$ i $\vec{y}$ ale tak by ciąg $\vec{x'}, \vec{y'}$ był ciagiem różnych zmiennych, czyli żeby był kontekstem. Wtedy diagram

$$\begin{tikzcd} & \vec{x'}, \vec{y'} \arrow[dl, "{[\vec{x'}(\vec{x'}, \vec{y'})]_\sim}"'] \arrow[dr, "{[\vec{y'}(\vec{x'}, \vec{y'})]_\sim}"] & \\ \vec{x} & & \vec{y} \end{tikzcd}$$

jest produktem $\vec{x}$ i $\vec{y}$ w kategorii $Cl[T]$.

Model generic $\mathcal{G}_T$ teorii T w kategorii $Cl[T]$ interpretuje sort X sygnatury Σ jako kontekst $x : X$, dla pewnej zmiennej x sortu X, a symbol funkcyjny $f : X_1, \ldots, X_n \to Y$ jako morfizm $[f(\vec{x})]_\sim : \vec{x} \longrightarrow y$, gdzie $\vec{x} : \vec{X}$ oraz $y : Y$.

Jeśli M jest T-algebrą w kategorii $\mathcal{E}$ ze skończonymi produktami to definiując

$$\overline{M} : Cl[T] \longrightarrow \mathcal{E}$$

tak, że

$$\overline{M}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} M(X_i), \qquad \overline{M}([t(\vec{x})]_\sim) = [\![t(\vec{x})]\!]_M$$

otrzymujemy funktor $\overline{M}$ zachowujący produkty i taki, że $\overline{M}(\mathcal{G}_T)$ jest izomorficzne z M, czyli że diagram

[6] Pomysł interpretacji jako podstawienia pochodzi z tezy doktorskiej F.W.Lawvere'a z 1963 roku.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[rr, "\mathcal{G}_T"] \arrow[drr, "M"'] & & Cl[T] \arrow[d, "\overline{M}"] \\
& & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

jest przemienny z dokładnością do izomorfizmu. Q.E.D.

Uwaga. Kategoria $Cl[T]$ skonstruowana w powyższym dowodzie jest równoważna z kategorią dualną do kategorii T-algebr wolnych o skończonej liczbie generatorów.

Wniosek 7.10 (Modele jako funktory) *Niech T będzie teorią równościową a $\mathcal{E}$ kategorii ze skończonymi produktami. Wtedy*

1. *istnieje naturalna równoważność kategorii pomiędzy kategorią $Mod(T, \mathcal{E})$ modeli teorii T w $\mathcal{E}$ oraz kategorią $FP(Cl[T]), \mathcal{E})$ funktorów zachowujących produkty z kategorii klasyfikującej T w $\mathcal{E}$.*

2. *powyższa równoważność jest naturalna w $\mathcal{E}$ i 2-funktor*

$$Mod(T, -) : FP \longrightarrow CAT$$

jest reprezentowalny przez kategorię $Cl[T]$.

Dowód: Wniosek jest w istocie przeformułowaniem powyższego faktu. Q.E.D.

Przykład. **Teorie Lawvere'a** Na teorie Lawvere'a można patrzyć jak na 'bardzo oszczędnie konstruowane' kategorie klasyfikujące teorie równościowe, które maja dokładnie jeden sort.

Teoria Lawvere'a jest to kategoria $\mathbf{T}$, której obiektami są liczby naturalne $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ taka, że dla dowolnego $n \in \omega$ istnieje n rzutowań $\pi_i^n : n \to 1$ dla $i = 1, \ldots, n$ tak, że n wraz z tymi rzutowaniami jest n-krotnym produktem obiektu 1, to znaczy $n = 1^n$ dla $n \in \omega$.

Zatem by zdefiniować teorię Lawvere'a $\mathbf{T}$ wystarczy określić zbiory $hom_{\mathbf{T}}(n, m)$ dla dowolnych $m, n \in \omega$ oraz operacje złożenia.

By pokazać przykład konkretny określimy $hom_{\mathbf{T}}(n, m)$ jako m-tki wielomianów o współczynnikach całkowitych od n-zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ a złożenie jako podstawienie wielomianów do wielomianów. Wtedy taka kategoria $\mathbf{T}$ jest teorią pierścieni, w tym sensie że dla dowolnej kategorii ze skończonymi produktami $\mathcal{E}$, kategoria pierścieni w $\mathcal{E}$ jest równoważna z kategorią funktorów z $\mathbf{T}$ do $\mathcal{E}$ zachowujących skończone produkty.

Można pokazać, że jeśli dowolnej teorii równościowej (jednosortowej) odpowiada teoria Lawvere'a i jest ona równoważna z kategorią dualna do kategorii skończenie generowanych algebr wolnych.

Uwaga. Teraz wiedząc, że modele teorii T odpowiadają funktorom zachowującym produkty skończone z $Cl[T]$ w kategorie ze skończonymi produktami zupełności względem Set można otrzymać z Lematu Yonedy. Wystarczy pokazać, że dla dowolnej pary różnych morfizmów $[\vec{t}(\vec{x})]_\sim$, $[\vec{t}(\vec{x})]_\sim$ w $Cl[T]$ istnieje funktor zachowujący produkty $M : Cl[T] \longrightarrow Set$ teorii T taki, że

$$M([\vec{t}(\vec{x})]_\sim) \neq M([\vec{s}(\vec{x})]_\sim) \tag{20}$$

Włożenie Yonedy $Y : Cl[T] \longrightarrow Set^{Cl[T]^{op}}$ jest wierne i zachowuje wszystkie istniejące granice. Istnieje zatem $Y([\vec{t}(\vec{x})]_\sim) \neq Y([\vec{s}(\vec{x})]_\sim)$ i stnieje obiekt c w $\mathcal{C}$ taki, że $Y([\vec{t}(\vec{x})]_\sim)_c \neq Y([\vec{s}(\vec{x})]_\sim)_c$. A to oznacza, że dla funktora $M = ev_c \circ Y : Cl[T] :\rightarrow Set$ zachowującego skończone produkty mamy (20).

7.4 Od kategorii do teorii

Tak jak dla teorii równościowej T możemy zdefiniować jej kategorię klasyfikująca $Cl[T]$, tak też mając kategorię ze skończonymi produktami $\mathbf{C}$ możemy zdefiniować teorię równościową $Th(\mathcal{C})$ o tej własności, że dla dowolnej kategorii ze skończonymi produktami $\mathcal{E}$, kategoria modeli $Th(\mathcal{C})$ w $\mathcal{E}$ jest równoważna kategorii funktorów zachowujących produkty z $\mathbf{C}$ w $\mathcal{E}$. Ponadto teoria $Th(\mathbf{C})$ ma model generic $\mathcal{G}_{\mathbf{C}}$ w kategorii $\mathbf{C}$, który ustala tą równoważność. By opisać teorię $Th(\mathcal{C})$ musimy najpierw opisać sygnaturę $\Sigma_{\mathbf{C}}$ języka wewnętrznego kategorii $\mathbf{C}$.

Sygnatura $\Sigma_{\mathbf{C}}$ składa się z:

1. jednego sortu X dla każdego obiektu X kategorii $\mathbf{C}$,
2. jednego symbolu funkcyjnego $f : X_1, \ldots, X_n \to Y$ dla każdego morfizmu $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ kategorii $\mathbf{C}$.

Język wewnętrzny kategorii $\mathbf{C}$ (ze skończonymi produktami) stanowią termy nad sygnaturą $\Sigma_{\mathbf{C}}$. Mamy wyróżnioną $\Sigma_{\mathbf{C}}$-strukturę $M_{\mathbf{C}}$ w kategorii $\mathbf{C}$ która interpretuje każdy sort X sygnatury $\Sigma_{\mathbf{C}}$ jako ten sam sort X (ale rozważany jako obiekty $\mathbf{C}$) i każdy symbol funkcyjny $f : X_1, \ldots, X_n \to Y$ jako ten sam symbol funkcyjny (ale rozważany jako morfizm $\mathbf{C}$). Jako aksjomaty teorii $Th(\mathbf{C})$ przyjmujemy wszystkie równości w kontekście które są spełnione w $\mathbf{M_C}$.

Fakt 7.11 *Dla dowolnej kategorii (małej) ze skończonymi produktami $\mathbf{C}$, kategoria klasyfikująca teorię $Th(\mathbf{C})$ jest równoważna z $\mathbf{C}$. Ponadto*

1. *$f : X \to X$ jest morfizmem identycznościowym wtedy i tylko wtedy gdy $M_{\mathbf{C}} \models f(x) = x(x)$,*
2. *$h : X \to Z$ jest złożeniem morfizmów $g : Y \to Z$ i $f : X \to Y$ wtedy i tylko wtedy gdy $M_{\mathbf{C}} \models h(x) = g(h(x))(x)$,*
3. *obiekt T jest obiektem końcowym wtedy i tylko wtedy gdy istniej morfizm $t : 1 \to T$ taki, że $M_{\mathbf{C}} \models t = x(x)$, gdzie $x : T$,*
4. *diagram*

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{q} Y$$

jest produktem binarnym tylko wtedy gdy istniej morfizm $r : X \times Y \to Z$ taki, że

$$M_{\mathbf{C}} \models p(r(x,y)) = x(x,y),\ M_{\mathbf{C}} \models q(r(x,y)) = y(x,y),$$
$$M_{\mathbf{C}} \models r(p(z), p(z)) = z(z).$$

Dowód: Kategoria klasyfikująca $Cl[Th(\mathbf{C})]$ jest kreślona z dokładnością do równoważności kategorii a model generic $\mathcal{G}_{Th(\mathbf{C})}$ jest określony z dokładnością do izomorfizmu (w ustalonej kategorii klasyfikującej). W tym sensie $\mathbf{C}$ jest kategoria klasyfikującą z $M_{\mathbf{C}}$ jako modelem generic.

Ad 1. Interpretacja $[\![x(x)]\!]_{M_{\mathbf{C}}}$ jest identycznością na M(X) a interpretacja $[\![f(x)(x)]\!]_{M_{\mathbf{C}}}$ jest równa f. Z definicji spełniania, $M_{\mathbf{C}} \models f(x) = x(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy $[\![x(x)]\!]_{M_{\mathbf{C}}} = [\![f(x)(x)]\!]_{M_{\mathbf{C}}}$. Zatem $M_{\mathbf{C}} \models f(x) = x(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy f identycznością.

Pozostałe punkty pozostawiam jako ćwiczenie. Q.E.D.

Z powyższego faktu wynika, że fakty dotyczące kategorii ze skończonymi produktami można wyrażać w języku teorii równościowych. Można też używać logiki równościowej by takie fakty dowodzić.

7.5 Interpretacje jako morfizmy teorii

Do tej pory pokazaliśmy, że mamy 'pewną odpowiedniość' pomiędzy teoriami równościowymi wielosortowymi a kategoriami ze skończonymi produktami. By można tą 'odpowiedniość' wogóle wyrazić jako fakt matematyczny, jako 'coś w rodzaju równoważności kategorii' musimy zobaczyć jak wyglądają morfizmy pomiędzy takimi strukturami. W przypadku kategorii ze skończonymi produktami sprawa jest jasna. Morfizmy zachowujące strukturę to funktory zachowujące skończone produkty. Ponadto widzimy, że pomiędzy takimi morfizmami mamy jeszcze jeden poziom morfizmów: naturalne transformacje. W ten sposób kategorie ze skończonymi produktami, funktory zachowujące skończone produkty oraz naturalne transformacje tworzą strukturę którą nazywamy 2-kategorią.

Pojęcie morfizmu teorii równościowych jest bardziej skomplikowane. MOrfizmy takie to tak zwane interpretacje. Niech T i T' będą teoriami równościowymi nad sygnaturami Σ i Σ', odpowiednio. *Interpretacją* $I : T \to T'$ teorii T w teorii T' nazywamy przyporządkowanie

1. sortom X z Σ ciągu sortów $I(X) = Y_1, \ldots, Y_n$ z Σ',

2. symbolom funkcyjnym $f : X_1, \ldots, X_k \to X$ ciągu symboli funkcyjnych $I(f)_i : I(X_1), \ldots, I(X_k) \to Y_i$, dla $i = 1, \ldots, n$, gdzie $I(X) = Y_1, \ldots, Y_n$

takie, że jeśli $s = t(\vec{x})$ jest aksjomatem teorii T to $T' \vdash I(s) = I(t)(I(\vec{x}))$ czyli, że aksjomaty teorii T są tłumaczone na twiedzenia teorii T'.

Ponadto interpretacje można porównywać, to znaczy można zdefiniować morfizmy pomiędzy interpretacjami tak by otrzymać 2-kategorię TA teorii równościowych, interpretacji, i morfizmów porównujących interpretacje. Wtedy konstrukcja kategorii klasyfikującej $Cl[T]$ dla teorii rozszerza się do homomorfizmu bikategorii

$$TA \xrightarrow{\quad Cl[-] \quad} FP$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, shift right=4, "I"'] \arrow[d, shift left=4, "I'"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\tau}"] \\ T' \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} Cl[T] \arrow[d, shift right=6, "Cl[I]"'] \arrow[d, shift left=6, "Cl[I]"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{Cl[\tau]}"] \\ Cl[T'] \end{tikzcd}$$

który jest równoważnością w sensie 2-kategorii.

8 Zadania

8.1 Kategorie, funktory, naturalne transformacje, epi, mono, izo

1. Podaj charakteryzację monomorfizmów i epimorfizmów w kategorii Set.

2. Pokaż, że w Set każdy morfizm który jest mono i epi jest też izo.

3. Niech $f : X \to Y$ będzie morfizmem w kategorii $\mathcal{C}$. Pokaż, że

   (a) Jeśli f jest split epi i mono to jest izo.

   (b) Jeśli f jest split mono i epi to jest izo.

4. Niech $f : X \to X$ będzie epimorfizmem w kategorii $\mathcal{C}$ takim, że $f \circ f = f$. Pokaż, że $f = 1_X$.

5. Podaj przykład morfizmu, który jest monomorfizmem i epimorfizmem ale nie jest izomorfizmem.

6. Podaj przykład morfizmu w kategorii monoidów Mon i kategorii pierścieni Rng, który jest monomorfizmem i epimorfizmem ale nie jest izomorfizmem.

7. Pokaż, że złożenie dwóch epimorfizmów (monomorfizmów, izomorfizmów) jest epimorfizmem (monomorfizmem, izomorfizmem).

8. Pokaż, że jeśli złożenie morfizmów $g \circ f$ jest epi to g też jest epi.

9. Pokaż, że jeśli złożenie morfizmów $g \circ f$ jest mono to f też jest mono.

10. Opisz epimorfizmy regularne w $Alg(t)$ dla dowolnej teorii równościowej T.

11. Opisz epimorfizmy regularne w kategorii częściowych porządków $Poset$.

12. Pokaż, że złożenie funktorów jest funktorem.

13. Pokaż, że funktor zapominania $U : Top \to Set$ jest wierny ale nie jest pełny.

14. Pokaż, że funktor rzutowania $\pi_0 : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest wierny wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{C}$ jest praporządkiem.

15. Pokaż, że każdy funktor zachowuje izomorfizmy, split epi i split mono.

16. Pokaż, że każdy wierny funktor odbija epimorfizmy i monomorfizmy.

17. Pokaż, że jeśli funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest wierny i pełny oraz X, Y są obiektami w $\mathcal{C}$ takimi, że $F(X) \cong F(Y)$ to $X \cong Y$. W szczególności, pokaż, że funktor wierny i pełny odbija izomorfizmy.

18. Pokaż, że złożenie naturalnych transformacji jest naturalną transformacją.

19. Niech $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ będą funktorami. Pokaż, że naturalna transformacja $\tau : F \to G$ jest naturalnym izomorfizmem wtedu i tylko wtedy gdy każda składowa τ_a, dla $a \in \mathcal{A}$ jest izomorfizmem.

20. Niech $Vect_{K,fin}$ będzie kategorią skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad ciałem K, $\mathcal{M}$ kategoria której obiektami są liczby naturalne a morfizmami z m do n macierze $n \times m$ współczynnikach z K. Złożenie macierzy to zwykłe monożenie macierzy. Pokazać, że te kategorie są równoważne.

21. Pokaż, że kategorie Gr_{fin} i Gr^{ω}_{fin} są równoważne.

22. Kategoria $\mathcal{A}$ jest *szkieletowa* o ile dla dowolnych obiektów $A, B \in \mathcal{A}$, jeżeli $A \cong B$ to $A = B$. Pokaż, że każda kategoria jest równoważna kategorii szkieletowej.

23. Niech $Vec_{k,fin}$ będzie kategorią skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad ciałem k i przekształceń liniowych. Pokaż, że kategorie $Vec_{k,fin}$ oraz $Vec^{op}_{k,fin}$ są równoważne.

24. Niech G będzie grupą, $G - Set$ będzie kategorią działań grupu G na zbiorach i przekształceń G-ekwiwariantnych, Set^G kategoria funktorów z grupy G (rozważanej jako kategoria z jednym obiektem) w kategorię Set i transformacji naturalnych. Pokaż, że kategorie $G - Set$ i Set^G są równoważne.

25. Niech Rel będzie kategorią zbiorów i relacji, tzn $Rel(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$ (relacje składamy w zwykły sposób). Pokaż, że kategorie Rel oraz Rel^{op} są równoważne.

26. *Kratą* nazywamy częściowy porządek w którym są skończone kresy ($\wedge$ górny i $\vee$ dolny). Krata A jest *dystrybutywna* o ile dla dowolnych $a, b, c \in A$ zachodzi równość:
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
Algebra Boole'a to krata dystrybutywna w której każdy element a ma uzupełnienia $-a$ takie, że
$$a \vee -a = 1 \quad a \wedge -a = 0$$
Pokaż, że kategoria skończonych algebr Boole'a jest równoważna z kategorią dualną do kategorii zbiorów skończonych.

8.2 2-kategoria Cat

1. Pokaż, że złożenie horyzontalne jest łączne.

2. (Eckmann-Hilton) Niech $\circ$ i $*$ będą dwiema operacjami binarnymi na tym samym zbiorze X z tą samą jedynką $1 \in X$ oraz spełniającymi równość
$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d).$$
Pokaż, że działania te są sobie równe, przemienne i łączne.

3. Dane są kategorie, funktory, i transformacje naturalne jak na poniższym diagramie
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_0 \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left=50, "G_0"] \arrow[r, "G_1"] \arrow[r, bend right=50, "G_2"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\sigma \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\tau \Downarrow"] & \mathcal{C}_2 \arrow[r, "K"] & \mathcal{C}_3 \end{tikzcd}$$
Pokaż, że zachodzą następujące równości
   (a) $K(\sigma_F) = K(\sigma)_F$;
   (b) $K(\tau \circ \sigma) = K(\tau) \circ K(\sigma)$;
   (c) $(\tau \circ \sigma)_F = \tau_F \circ \sigma_F$.

4. (MEL - Middle Exchange Law - Prawo wymiany środkowej) Pokaż, że mając diagram kategorii, funktorów, i transformacji naturalnych

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\bullet \arrow[r, bend left=40] \arrow[r] \arrow[r, bend right=40] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\sigma_0 \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\tau_0 \Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left=40] \arrow[r] \arrow[r, bend right=40] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\sigma_1 \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\tau_1 \Downarrow"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

zachodzi następujące prawo

$$(\tau_1 * \tau_0) \circ (\sigma_1 * \sigma_0) = (\tau_1 \circ \sigma_1) * (\tau_0 \circ \sigma_0)$$

5. Pokaż, używając poprzednich zadań, że jeśli mamy dwie naturalne transformacje z funktora identycznościowego w funktor identycznościowy $\tau, \sigma : 1_\mathcal{C} \to 1_\mathcal{C}$ to

$$\tau \circ \sigma = \tau * \sigma = \sigma * \tau$$

6. Transformacje naturalne z funktora identycznościowego w funktor identycznościowy $\tau : 1_\mathcal{C} \to 1_\mathcal{C}$ tworzą monoid (choć nie musi być to monoid mały). Opisz ten monoid dla kategorii $\mathcal{C}$ równej Gr, Ab, Mon, Set.

8.3 Funktory reprezentowalne

1. Pokaż, że funktory $2^{(-)}, \mathcal{P} : Set^{op} \to Set$ są naturalnie izomorficzne. Wywnioskuj stąd, że $\mathcal{P}$ jest reprezentowalny.

2. Pokaż, że funktor zapominania z kategorii grup Gr w kategorię zbiorów Set jest reprezentowalny.

3. Niech N będzie kategorią, której obiektami są liczby naturalne, a morfizm pomiędzy dwoma obiektami m i n z N istnieje gdy $m \leq n$.

   (a) Dla $n \in N$ opisz funktor reprezentowalny $N(n, -) : N \to Set$.

   (b) Dla dowolnego funktora $F : N \to Set$ i $n \in N$ opisz transformacje z $N(n, -)$ w F.

   (c) Dla $n \in N$ opisz funktor reprezentowalny $N(-, n) : N^{op} \to Set$.

   (d) Dla dowolnego funktora $G : N^{op} \to Set$ i $n \in N$ opisz transformacje z $N(-, n)$ w G.

4. Niech G będzie grupą (tzn. kategorią z jednym obiektem $*$ w której każdy morfizm jest izomorfizmem). Pokaż, że funktor $F : G \to Set$ odpowiada działaniu grupy G na zbiorze $F(*)$. Opisz transformacje naturalne z $G(*, -)$ do dowolnego $F : G \to Set$.

5. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią a obiektem w $\mathcal{C}$. Definiujemy funktory

$$Sub(-) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Set, \qquad Sub(a \times (-)) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Set$$

   (drugi z funktorów możemy zdefiniować tylko w kategorii z produktami binarnymi). Pokaż, że te funktory są reprezentowalne w Set, $Set^{\to}$, $G - Set$.

6. Pokaż, że funktory podobiektów $Sub(-) : Set \to Set^{op}$ oraz $Sub(-) : (Set^{\to})^{op} \to Set$ są reprezentowalne.

7. Niech c będzie obiektem kategorii $\mathcal{C}$. Pokaż, że funktory reprezentowalne

$$\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \longrightarrow Set, \qquad \mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Set$$

   zachowują wszystkie granice.

8.4 Kategorie kartezjańsko domknięte

1. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią kartezjańsko zamkniętą, A, B, C obiekty $\mathcal{C}$. Wykaż, że

   (a) $A \times B \cong B \times A$;

   (b) $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$;

   (c) $A \times 1 \cong 1 \times A \cong A \cong A^1$;

   (d) $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.

2. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią kartezjańsko zamkniętą z obiektem początkowym i koproduktami binarnymi, A, B, C obiekty $\mathcal{C}$. Wykaż, że

   (a) $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$;

   (b) $A^{B+C} \cong A^B \times A^C$;

   (c) $A \times 0 \cong 0$;

   (d) $A^0 \cong 1$.

3. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią kartezjańsko zamkniętą, A, B, C obiekty $\mathcal{C}$. Określ morfizmy 'złożenia wewnętrznego' $\circ : B^A \times C^B \to C^A$ i 'identyczności wewnętrznej' $e_A : 1 \to A^A$ w $\mathcal{C}$. Sformułuj przy pomocy diagramów i wykaż następujące prawa dla kategorii kartezjańsko zamkniętych

   (a) Sformułuj przy pomocy diagramów i wykaż, że złożenie wewnętrzne jest łączne;

   (b) Sformułuj przy pomocy diagramów i wykaż, że identyczność wewnętrzna jest 'elementem' neutralnym dla operacji składania morfizmów.

   (c) Jak utworzyć, obiekt wewnętrznych izomorfizmów (monomorfizmów, epimorfizmów) z A do B?

   (d) Jak wyrazić, że obiekty A i B są 'wewnętrznie izomorficzne'?

4. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią kartezjańsko zamkniętą, A, B obiekty $\mathcal{C}$. Określ włożenie $B \to B^A$ jako 'funkcji stałych'. Pokaż, że 'złożenie wewnętrzne' dowolnej funkcji z funkcją stałą jest funkcją stałą.

5. Udowodnij, że poniższe kategorie są kartezjańsko domknięte:

   (a) Set - kategoria zbiorów;

   (b) Set_{fin} - kategoria zbiorów skończonych;

   (c) $G - Set$ - kategoria prawych akcji grupy G na zbiorach;

   (d) $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ - kategoria presnopów na kategorii małej $\mathcal{C}$;

   (e) Cat -kategoria wszystkich małych kategorii;

   (f) Dowolna skończona *krata dystrybutywna* L, tzn. skończony częściowy porządek, w którym każdy skończony zbiór ma kres dolny i górny oraz dla dowolnych elementów $x, y, z \in L$ zachodzi $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;

   (g) Dowolna zupełna krata L, w której dowolne kresy górne są rozdzielne względem binarnych kresów dolnych, tzn. jeśli $x \in L$, $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq L$ to zachodzi $x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I}(x \wedge y_i)$.

   Które z tych kategorii są bikartezjańsko domknięte?

6. Udowodnij, że poniższe kategorie nie są kartezjańsko domknięte:
   (a) Ab - kategoria grup abelowych;
   (b) Set_{inf} - kategoria zbiorów nieskończonych;
   (c) $Vect_K$ - przestrzeni wektorowych nad ciałem K;
   (d) $Vect_{K,fin}$ - przestrzeni wektorowych skończenie wymiarowych nad ciałem K;
   (e) Set^{op} - kategoria dualna do kategorii zbiorów.

7. Kategoria ω-posetów $\omega - Poset$ jest zdefiniowana jak następuje. Obiekty ω-Poset są częściowymi porządkami $(P, \leq)$ w których każdy niemalejący ciąg długości ω ma kres górny, tzn. jeśli $\{p_n\}_{n\in\omega} \subseteq P$, oraz $p_i \leq p_{i+1}$ dla $i \in \omega$ to istnieje najmniejsze ograniczenie górne zbioru $\{p_n\}_{n\in\omega}$. Morfizm $f : (P, \leq) \to (Q, \leq)$ w $\omega - Poset$ jest to funkcja $f : P \to Q$, która zachowuje te kresy. Udowodnij, że $\omega - Poset$ jest kategorią kartezjańsko domkniętą.

8. Przestrzenią 'ciągową' w sensie Kuratowskiego nazywamy zbiór X wraz z funkcją częściową $\lim : X^\omega \to X$. Jeśli $lim_{n\in\omega}x_n$ jest określona to ciąg $\{x_n\}_{n\in\omega}$ nazywamy zbieżnym. Ponadto spełnione są następujące aksjomaty.
   (a) $lim_{n\in\omega}x_{=}x$ (granica ciągu stałego równego x jest równa x).
   (b) Jeśli granica ciągu jest równa x to granica każdego jego podciągu też jest równa x.
   (c) Jeśli każdy podciąg ciągu $\{x_n\}_{n\in\omega}$ zawiera podciąg który jest zbieżny to cały ciąg $\{x_n\}_{n\in\omega}$ też jest zbieżny.

   Morfizm przestrzeni ciągowych w sensie Kuratowskiego $f : (X, \lim) \longrightarrow (Y, \lim)$ jest to funkcja $f : X \to Y$ zachowująca granice, tzn. jeśli $lim_{n\in\omega}x_n = x$ to $lim_{n\in\omega}f(x_n) = f(x)$ dla dowolnego ciągu z X^ω.

   Udowodnij, że kategoria przestrzeni ciągowych w sensie Kuratowskiego jest kategorią kartezjańsko domkniętą.

9. Niech Top_{loc} będzie kategorią przestrzeni topologicznych i lokalnych homeomorfizmów. Pokazać, że Top_{loc}nie jest kartezjańsko domknięta ale każdy jej płat jest kartezjańsko domknięty.

   Niech $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ będzie funktorem zachowyjącym produkty pomiędzy kartezjańsko domkniętymi kategoriami $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Wtedy F jest *funktorem kartezjańsko domkniętym* (*funktorem ccc*) gdy dla dowolnych obiektów X, Y w $\mathcal{A}$, $F(Y^X)$ jest obiektem wykładniczym $F(X)$ i $F(Y)$ oraz morfizm

$$F(X) \times F(Y^X) \cong F(X \times Y^X) \xrightarrow{F(ev_{X,Y})} F(Y)$$

   jest morfizmem ewaluacji $ev_{F(X),F(Y)}$ (to znaczy kojedności sprzężenia $F(X) \times - \dashv (-)^{F(X)}$). Niech $\mathcal{C}$ będzie małą kategorią kartezjańsko domknietą. Pokaż, że włożenie Yonedy $Y : \mathcal{C} \longrightarrow Set^{\mathcal{C}^{op}}$ jest funktorem kartezjańsko domkniętym.

10. Niech $\mathcal{E}$ będzie kategorią kartezjańsko domknietą $\tau : \mathcal{E} \to Set$ funktorem zachowującym skończone produkty. Kategoria $\mathcal{E}^\tau$ ma te same obiekty co kategoria $\mathcal{E}$. Definiujemy zbióry morfizmów pomiędzy obiektami A i B w $\mathcal{E}^\tau$ jako zbiór

$$\mathcal{E}^\tau(A, B) = \tau(B^A).$$

(a) Zdefiniuj identycznosci i złożenia takich morfizmów w $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ i udowodnij, że jest to dobrze określona kategoria.

(b) Zdefiniuj 'naturalny' funktor z $\mathcal{E}$ do $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$.

Pokaż zdefiniować identycznosci i złożenia takich morfizmów w $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ i udowodnij, że jest to dobrze zdefiniowana kategoria.

8.5 Granice i kogranice

1. Pokaż, że $1_a \times 1_b \cong 1_{a\times b}$.

2. Pokaż, że jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma pulbeki i obiekt końcowy to ma wszystkie skończone granice.

3. Pokaż, że jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma pulbeki i ekwalizatory to ma wszystkie skończone granice spójne.

4. Pokaż bezpośrednio, że jeśli kategoria ma produkty binarne i ekwalizatory to ma też pulbeki.

5. Przedstaw obiekt końcowy, produkty, pulbeki i ekwalizatory jako granice funktorów.

6. Pokaż, że obiekt końcowy jest granicą funktora pustego.

7. Pokaż, że granica funktora z kategorii dyskretnej dwuelementowej jest produktem binarnym.

8. Pokaż bezpośrednio, że jeżeli w kategorii $\mathcal{C}$ jest obiekt końcowy i pulbeki to są też produkty binarne.

9. Pokaż, że ekwalizator jest monomorfizmem. Takie monomorfizmy nazywamy *regularnymi monomorfizmami.*

10. Pokaż, że jeśli monomorfizm regularny jest epimorfizmem to jest on izomorfizmem.

11. Opisz monomorfizmy regularne w kategoriach Set i $Poset$.

12. Opisz epimorfizmy regularne w Set, $Poset$, Top i $Alg(T)$.

13. Pokaż, że morfizm $f : A \to B$ jest mono wtedy i tylko wtedy gdy kwadrat

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

jest pulbekiem.

14. Pokaż, że pulbek mono jest mono, tzn. jeśli diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "m"'] & D \end{tikzcd}$$

jest pulbekiem oraz morfizm m jest mono to morfizm m' też jest mono.

15. Pokaż, że morfizm $f : A \to B$ jest epi wtedy i tylko wtedy gdy kwadrat

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "1_A"] \\ B \arrow[r, "1_A"'] & B \end{tikzcd}$$

jest puszautem.

16. Pokaż, że obiekt początkowy jest kogranicą funktora pustego.

17. Pokaż, że pulbek mono regularnego jest mono regularnym. Monomorfizm jest regularny gdy jest ekwalizatorem pary morfizmów.

18. Pokaż przykład takiego produktu w kategorii z którego rzutowania nie są epimorfizmami.

19. (Lemat o pulbekach) W diagramie przemiennym

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"] & C \arrow[d, "e"] \\ D \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F \end{tikzcd}$$

   (a) jeśli lewy i prawy kwadrat są pulbekami to zewnętrzny kwadrat też jest pulbekiem;

   (b) jeśli prawy i zewnętrzny kwadrat są pulbekami to lewy kwadrat też jest pulbekiem.

20. Niech $f : A \to B$ będzie morfizmem w kategorii $\mathcal{C}$. Pokaż, żę płat $\mathcal{C}_{/A}$ kategorii $\mathcal{C}$ jest równoważny podwujnemu płatowi $\mathcal{C}_{/B/f}$.

21. Niech $\mathcal{C}$ kategoria z produktami binarnymi, A obiekt $\mathcal{C}$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne

   (a) przekątna $A \to A \times A$ jest izomorfizmem;

   (b) rzutowania $\pi_1, \pi_2 : A \times A \to A$ są równe;

   (c) morfizm $A \to 1$ jest monomorfizmem.

22. Niech $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oraz $G, G' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktory takie, ze $F \dashv G$ oraz $F' \dashv G'$. Pokaż, że isnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy naturalnymi transformacjami $\sigma : F \to F'$ oraz $\tau : G' \to G$.

23. Pokaż, że jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma skończone granice i c jest obiektem $\mathcal{C}$ to płat $\mathcal{C} \downarrow c$ kategorii $\mathcal{C}$ też ma skończone granice.

24. Pokaż, że jeśli kategoria $\mathcal{J}$ ma obiekt początkowy 0 to granica $\lim F$ funktora $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ jest izomorficzna z $F(0)$.

25. Niech $End(\omega)$ będzie kategorią (moniodem) funkcji w ω w ω. Pokaż, że $End(\omega)$ ma skończone produkty.

26. Podaj przykład takiego funktora $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pomiędzy kategoriami z produktami binarnymi, że dla dowolnej pary obiektów a, b kategorii $\mathcal{C}$ istnieje izomorfizm $F(a \times b) \cong F(a) \times F(b)$ ale F nie zachowuje produktów.

27. Pokaż, że włożenie Yonedy $Y : \mathcal{C} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ zachowuje wszystkie istniejące granice w $\mathcal{C}$.

28. Pokaż, że dla dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ i obiektu $c \in \mathcal{C}$ funktor reprezentowalny kowariantny $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \to Set$ zachowuje wszystkie istniejące granice w $\mathcal{C}$.

29. Sformułuj co to znaczy, że funktor zachowuje obiekty wykładnicze. Pokaż, że włożenie Yonedy $Y : \mathcal{C} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ zachowuje wszystkie istniejące obiekty wykładnicze w $\mathcal{C}$.

30. Morfizm $i : x \to x$ nazywamy *idempotentem* jeśli jeśli $i \circ i = i$. Idempotent jest *rozszczepiony* jeśli istnieje para morfizmów $e : x \to y$ i $m : y \to x$ taka, że $i = m \circ e$ oraz $e \circ m = 1_y$. Pokaż, że jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma ekwalizatory lub koekwalizatory to każdy idempotent w $\mathcal{C}$ jest rozszczepiony.

31. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią z jednym obiektem x i jednym nieidentycznościowym morfizmem $i : x \to x$, który jest idempotentem (tzn. $i \circ i = i$). Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią z dwoma obiektami x, y i morfizmami generowanymi przez parę morfizmów, $e : x \to y$ i $m : y \to x$ taką, że $e \circ m = 1_y$. Mamy funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ taki, że $F(i) = m \circ e$. Pokaż, że F jest rzeczywiście dobrze określonym funktorem. Funktor F indukuje przez złożenie funktor na kategorii presnopów
$$F^* : Set^{\mathcal{D}^{op}} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$$
taki, że dla $G \in Set^{\mathcal{D}^{op}}$, $F^*(G) = G \circ F$. Dla $\tau : G \to H \in Set^{\mathcal{D}^{op}}$, $F^*(\tau) = \tau_F$ (złożenie funktora z transformacją naturalną τ_F zostanie zdefiniowane na wykładzie). Pokaż, że F^* jest równoważnością kategorii.

32. Pokaż, że każdy płat kategorii presnopów jest kategorią presnopów.

33. Pokaż, że kategoria mała, która ma wszystkie granice jest równoważna z częściowym porządkiem.

34. Pokaż, że funktor zapominania $|-| : Gr \longrightarrow Set$ kreuje wszystkie granice.

35. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią małą. Opisz granice i kogranice w kategorii presnopów $Set^{\mathcal{C}^{op}}$.

36. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią małą. Pokaż, że funktor zapominania $|-| : Set^{\mathcal{C}^{op}} \longrightarrow Set^{Ob(\mathcal{C})}$ kreuje wszystkie granice i kogranice.

37. Niech c będzie obiektem kategorii $\mathcal{C}$. Funktor ewaluacji $ev_c : Set^{\mathcal{C}^{op}} \to Set$ dla naturalnej transformacji $\tau : F \to G \in Set^{\mathcal{C}^{op}}$ przyjmuje wartość c-tej składowej τ, tzn. $ev_c(\tau) = \tau_c : F(c) \to G(c)$. Pokaż, że funktor ewaluacji zachowuje granice i kogranice.

38. Opisz granice w Cat. *Wskazówka.* Funktory z kategorii $\mathbf{1}$ w dowolną kategorię $\mathcal{C}$ odpowiadają obiektom $\mathcal{C}$, a funktory z kategorii $\mathbf{2}$ w $\mathcal{C}$ odpowiadają morfizmom $\mathcal{C}$.

39. Pokaż, że w kategorii grup abelowych obiekt początkowy jest jednocześnie obiektem końcowym a produkt binarny jest jednocześnie koproduktem binarnym.

40. Pokaż, że w kategorii pierścieni przemiennych koprodukt binarny jest iloczynem tensorowym nad pierścieniem liczb całkowitych Z.

41. Pokaż, że w kategorii K-algebr koprodukt binarny jest iloczynem tensorowym nad K (K-może być pierścieniem przemiennym).

42. Dany jest diagram przemienny w kategorii Set

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & a_n \arrow[r, "\alpha_n"] & a_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & a_\omega \\
\cdots \arrow[r, "\gamma_{n-1}"] & c_n \arrow[u, "\pi_{a_n}"'] \arrow[d, "\pi_{b_n}"] \arrow[r, "\gamma_n"] & c_{n+1} \arrow[u, "\pi_{a_{n+1}}"'] \arrow[d, "\pi_{b_{n+1}}"] \arrow[r, "\gamma_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & c_\omega \arrow[u, "\pi_{a_\omega}"'] \arrow[d, "\pi_{b_\omega}"] \\
\cdots \arrow[r, "\beta_{n+1}"'] & b_n \arrow[r, "\beta_n"'] & b_{n+1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"'] & \cdots \arrow[r] & b_\omega
\end{tikzcd}$$

którym wiersze są kostożkami kogranicznymi a kolumny są produktami binarnymi dla $n \in \omega$. Pokaż, że wtedy diagram

$$a_\omega \xleftarrow{\pi_{a_\omega}} c_\omega \xrightarrow{\pi_{b_\omega}} b_\omega$$

też jest produktem binarnym.

43. Pokaż, że funktor $I : Set \to Set$ przeprowadzający zbiory niepuste na zbiór jednoelementowy $\{0\}$ a zbiór pusty na siebie (czyli $I(X) = \{0 : X \neq \emptyset\}$) zachowuje produkty ale nie zachowuje ekwalizatorów. Pokaż, też że jeśli funktor $F : Set \to Set$ zachowuje produkty i nie jest izomorficzny z I to zachowuje wszystkie granice.

44. Pokaż, że funktor monoidu wolnego $\mathcal{M} : Set \to Mon$ zachowuje pulbeki (i wszystkie inne spójne granice). Granica funktora $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ jest *spójna* o ile kategoria $\mathcal{J}$ jest *spójna*. Kategoria $\mathcal{J}$ jest *spójna* jeśli jest niepusta i każde dwa obiekty w $\mathcal{J}$ są połączone ciągiem morfizmów (niekoniecznie skierowanych w tą samą stronę). Na przykład pulbeki i ekwalizatory są granicami spójnymi a produkty nie są granicami spójnymi.

45. Pokaż, że funktory monoidu abelowego wolnego $\mathcal{M} : Set \to Amon$ nie zachowuje pulbeków.

46. Kategoria $\mathcal{A}$ jest *filtrująca* jeśli:

    (a) dla dowolnej skończonej rodziny obiektów $\{a_1, \ldots, a_n\}$ istnieje obiekt a i morfizmy $a_i \to a$ w $\mathcal{A}$;

    (b) dla dowolnej pary morfizmów $f, g : a \to b$ istnieje morfizm $h : b \to c$ taki, że $h \circ f = h \circ g$.

    Pokaż, że każdy zbiór jest kogranicą filtrującą zbiorów skończonych.

47. Niech $F : \mathcal{C}^{op} \to Set$ będzie funktorem, $\int_{\mathcal{C}} F$ kategorią elementów F. Pokaż, że

(a) F jest reprezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy $\int_{\mathcal{C}} F$ ma obiekt początkowy;

(b) jeśli $\mathcal{C}$ ma skończone granice to F zachowuje skończone granice wtedy i tylko wtedy gdy $\int_{\mathcal{C}} F$ jest kategorią filtrującą.

48. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią kozupełną i $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Set$ funktorem zachowującym granice. Pokaż, że $\int_{\mathcal{C}} F$ też jest kategorią zupełną.

49. Pokaż, że każda grupa jest kogranicą filtrującą grup skończenie prezentowalnych. Grupa jest skończenie prezentowalna o ile jest izomorficzna z grupą wolną o skończonej liczbie generatorów podzieloną przez skończenie wiele równości.

50. Pokaż, że grupa G, jest skończenie prezentowalna iff funktor reprezentowalny z kategorii grup $Gr(G, -) : Gr \to Set$ zachowuje filtrujące kogranice.

51. Pokaż, że każda T-algebra, dla (finitarnej) teorii równościowej pierwszego rzędu, jest kogranicą filtrującą T-algebr skończenie prezentowalnych. T-algebra jest *skończenie prezentowalna* jeśli powstaje z skończenie generowanej T-algebry wolnej przez podzielenie przez skończenie wiele równości.

52. Pokaż, że T-algebra A, jest skończenie prezentowalna iff funktor reprezentowalny $Hom_T(A, -) : Alg(T) \to Set$ zachowuje filtrujące kogranice.

53. Niech $\mathcal{C}$ kategoria mała. Pokaż, że odwzorowanie obiektowe

$$Set^{\mathcal{C}^{op}} \longrightarrow Cat_{/\mathcal{C}}$$

$$F \mapsto \pi_F : \int_{\mathcal{C}} F \longrightarrow \mathcal{C}$$

rozszerza się do funktora (gdzie $\int_{\mathcal{C}} F$ jest kategorią elementów funktora F).

8.6 Funktory sprzężone

1. funktor $\mathcal{D} \to \mathbf{1}$ ma prawy sprzężony iff $\mathcal{D}$ ma obiekt końcowy i ma lewy sprzężony iff $\mathcal{D}$ ma obiekt początkowy.

2. Pokaż, że mając dane funktory

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift right, "G"'] & \mathcal{B} \arrow[l, shift right, "F"'] \arrow[r, shift right, "G'"'] & \mathcal{C} \arrow[l, shift right, "F'"'] \end{tikzcd}$$

jeśli $F \dashv G$ i $F' \dashv G'$ to $F' \circ F \dashv G \circ G'$.

3. Sprawdź czy funktor $\Delta : Set \longrightarrow G-Set$, z kategorii zbiorów do kategorii akcji grupy G taki, że $\Delta(X) = \pi_X : G \times X \to X$ (to znaczy przyporządkowujący zbiorowi akcję trywialną na tym zbiorze) ma oba funktory sprzężone.

4. Homomorfizmem grup $f : G \to H$ indukuje funktor $f^* : H - Set \longrightarrow G - Set$ 'obcięcia działania grupy wzdłuż homomorfizmu h ma oba funktory sprzężone. W szczególności dwa homomofizmy pomiędzy dowolną grupą G a grupą jednoelementową $\mathbf{1}$ indukują sześć funktorów pomiędzy kategoriami Set i Set^G. Opisz te funktory.

5. Niech $\mathcal{J}$ będzie kategorią małą, $\mathcal{C}$ dowolną kategorią. Pokaż, że funktor diagonalny $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ przyporządkowujący obiektom $\mathcal{C}$ funktory stałe ma

(a) lewy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{C}$ ma kogranice indeksowane kategorią $\mathcal{J}$;

(b) prawy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{C}$ ma granice indeksowane kategorią $\mathcal{J}$.

6. Pokaż, że dla dowolnej funkcji $f : X \longrightarrow Y$ pulbek funktor

$$f^* : Set_{/Y} \longrightarrow Set_{/X}$$

dany wzorem (na obiektach): $p \mapsto f^*(p)$ gdzie kwadrat

$$\begin{tikzcd} A \times_Y X \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "f^*(p)"'] & A \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

jest pulbekiem, ma lewy i prawy sprzężony. Wskazówka: na początek można przyjąć, że $Y = 1$.

7. Pokaż, że kategoria Set^{op} nie jest kartezjańsko zamknięta. Wskazówka: pokaż, że funktor $X + (-) : Set \to Set$ nie zachowuje kogranic.

8. Pokaż, że funktor wzłożenia $i : Gr \longrightarrow Mon$ z kategorii grup do kategorii monoidów ma oba funktory sprzężone.

9. Niech k będzie ciałem. Opisz funktor lewy sprzężony do funktora $U : k - Alg \longrightarrow Mon$ z kategorii k-algebr w kategorię monoidów zapominającego o dodawaniu. Jaka jest wartość tego funktora na

   (a) przemiennym monoidzie wolnym o n generatorach $x_1, \ldots, x_n$;

   (b) monoidzie wolnym o n generatorach $x_1, \ldots, x_n$;

10. Niech k będzie ciałem. Dany jest następujący kwadrat przemienny funktorów zapominania

$$\begin{tikzcd} k - Alg \arrow[r] \arrow[d] & Mon \arrow[d] \\ Vect_k \arrow[r] & Set \end{tikzcd}$$

(funktor $k - Alg \to Mon$ zapomina o dodawaniu). Opisz lewe sprzężone do tych funktorów. Używając poprzedniego zadania wywnioskuj, że algebra tensorowa nad przestzenią n-wymiarową jest izomorficzna z algebrą wielomianów nieprzemiennych n zmiennych.

11. Pokaż, że funktor zapominania z $Cat \to Set$ przyporządkowujący kategoriom zbiory obiektów ma oba funktory sprzężone. Funktor lewy sprzężony nazywany jest *dyskretnym* a prawy sprzężony nazywany jest *chaotycznym*. Czy funktor dyskretny ma lewy sprzężony? Czy funktor chaotyczny ma prawy sprzężony?

12. Niech A i B będą częściowymi porządkami, $f : A \to B$ i $g : B \to A$ funkcjami monotonicznymi.

(a) Pokaż,że $f \dashv g$ wtedy i tylko wtedy $a \leq gf(a)$, dla $a \in A$, oraz $fg(b) \leq b$, dla $b \in B$.

(b) Niech $f \dashv g$, $Fix(A) = \{a \in A : gf(a) = a\}$ oraz $Fix(B) = \{b \in B : fg(b) = b\}$. Pokaż, że funkcje f i g obcięte do zbiorów $Fix(A)$ i $Fix(B)$ są wzajemnie odwrotne i ustalaja bijekcję tych zbiorów.

13. *Związki Galois.* Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie relacją binarną, $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ i $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(Y), \subseteq)^{op}$ częściowymi porządkami. Relacja r indukuje dwie funkcje monotoniczne

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}, \quad G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

takie, że dla $X_0 \subset X$ oraz $Y_0 \subset Y$ mamy

$$F(X_0) = \{y \in Y |\, X_0 \times \{y\} \subseteq R\}, \qquad G(Y_0) = \{x \in X |\, \{x\} \times Y_0 \subseteq R\}.$$

(a) Pokaż, że $F \dashv G$.

(b) Niech $R \subset \mathbf{R}^2 \times H$ będzie relacją należenia pomiędzy punktami na płaszczyźnie a półpłszczyznami. Opisz zbiory $Fix(\mathcal{P}(\mathbf{R}^2))$ i$Fix(\mathcal{P}(H)$. $\mathbf{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych.

14. *Krata zupełna* jest to częściowy porządek, który jest zupełny jako kategoria.

(a) Pokaż, że krata zupełna ma wszystkie kresy górne.

(b) Pokaż, że funkcja monotoniczna $f : A \to B$ z kraty zupełnej A w częściowy porządek B, która zachowuje kresy ma prawy sprzężony $g : B \to A$ dany wzorem

$$g(b) = \bigvee \{a \in A |\, f(a) \leq b\}, \ \text{ dla } b \in B$$

(c) Niech $\mathcal{O}_X$ będzie topologia na zbiorze X. Pokaż, że włożenie $i : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ma funktor prawy sprzężony.

(d) Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją. Funktor przeciwobrazu $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ma oba funktory sprzężone $\exists_f \dashv f^{-1} \dashv \forall_f$. Opisz te funktory.

(e) Podaj przykład funkcji monotonicznej $F : (\mathcal{P}(X) \subseteq) \longrightarrow (\mathcal{P}(X) \subseteq)$ która zachowuje skończone sumy ale nie ma prawego sprzężonego.

15. Sformułuj pojęcie morfizmu kouniwersalnego.

16. Pokaż, że sprzężenie jest jednoznacznie wyznaczone przez funktory F, G i transformację naturalną $\eta : FG \to id_{\mathcal{D}}$ taką, że dla $d \in \mathcal{D}$, para $(G(d), \varepsilon_d)$ jest morfizmem kouniwersalnym z funktor F w obiekt d.

17. Pokaż, że sprzężenie jest jednoznacznie wyznaczone przez funktor F, przyporządkowanie obiektowe $G_0 : Ob(\mathcal{D}) \to Ob(\mathcal{C})$ i transformację naturalną $\varepsilon : FG \to id_{\mathcal{D}}$ taką, że dla $d \in \mathcal{D}$, para $(G_0(d), \varepsilon_d)$ jest morfizme kouniwersalnym z funktor F w obiekt d.

18. Pokaż, że funktor $A \times (-) : Set \to Set$ ma lewy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy A jest singletonem.

Wskazówka. Rozważ zachowanie funktora na skończonych produktach.

19. Pokaż, że funktor $(-)^A : Set \to Set$ ma prawy sprzężony wtedy i tylko wtedy gdy zbiór A jest singletonem.

Wskazówka. Rozważ zachowanie kogranic przez funktora $(-)^A$.

20. Pokaż, że funktor zapominania $Pos \to Set$ ma lewy sprzężony ale nie ma prawego sprzężonego.

21. Niech $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ bedzie funktorem diagonalnym. Pokaż, że

    (a) jeśli kategoria $\mathcal{D}$ ma obiekt końcowy 1 to Δ ma lewy sprzężony $T : \mathcal{C}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{C}$ taki, że $T(F) = F(1)$ dla $F \in \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$.

    (b) jeśli kategoria $\mathcal{D}$ ma obiekt początkowy 0 to Δ ma prawy sprzężony $I : \mathcal{C}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{C}$ taki, że $I(F) = F(0)$ dla $F \in \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$.

22. Podaj przykład pary funktorów F i G takich, że $F \dashv G$ i $G \dashv F$.

    Wskazówka. Skorzystaj z poprzedniego ćwiczenia.

8.7 Algebra w kategoriach

1. Niech $\mathcal{U} : Rng \longrightarrow Set$ będzie funktorem zapominania z kategorii pierścieni w Set. Pokaż, że $\mathcal{U}$ jest pierścieniem w kategorii Set^{Rng}. Pokaż, że to samo jest prawdą dla dowolnej podkategorii pełnej, kategorii Rng.

2. Używając Lematu Yonedy i powyższego zadania pokaż, że $Z[x]$ jest pierścieniem w kategorii Rng^{op}, tzn. kopierścieniem w Rng.

3. Pokaż, że funktor 'okręgu jednostkowego' z kategorii pierścieni w Set

$$S^1 : Rng \longrightarrow Set$$

   taki, że

$$S^1(R) = \{\langle x, y\rangle \in R \times R : x^2 + y^2 = 1\}$$

   jest funktorem reprezentowalnym. Pokaż, że S^1 jako obiekt w Set^{Rng} ma naturalną strukturę grupy.

4. Pokaż, że kategoria grup w kategorii grup jest równoważna z kategorią grup abelowych.

5.* Opisz dowolne kogranice w kategoriach $Alg(T)$.

Indeks