

Zadania domowe ze Wstępu do Matematyki
Grupa 5. Seria 11. Termin oddania 19.12.2012.

Uwaga. Zadania 1 i 3 to zwykłe zadanie z Serii 11 a pozostałe zadania 2, 4 i 5 są to zadania dodatkowe które można zrobić by poprawić swój dorobek punktowy. Nie zrobienie zadań dodatkowych nie powoduje żadnych negatywnych konsekwencji. Nie liczą się one do ogólnej liczby punktów które można zdobyć.

Notacja. Jeżeli r jest relacją, to fakt, że elementy x i y pozostają w tej relacji $\langle x, y \rangle \in r$ czasem zapisujemy tak $x r y$.

Zadanie 1.

Określamy relację r na zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tak, że

$$\langle x, y \rangle r \langle x', y' \rangle \quad \text{gdy} \quad x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

1. Udowodnij, że r jest relacją równoważności.
2. Opisz klasę abstrakcji elementu $\langle 1, 0 \rangle$.
3. Oblicz moc zbioru ilorazowego $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/r$.

Zadanie 2.

Określamy relację r na zbiorze $\mathbb{R}$ tak, że

$$x r y \quad \text{gdy} \quad x, y \in \mathbb{Z} \vee \exists k \in \mathbb{Z} \ x, y \in (k, k+1)$$

1. Udowodnij, że r jest relacją równoważności.
2. Opisz klasy abstrakcji tej relacji.
3. Oblicz moc zbioru ilorazowego $\mathbb{R}/r$.

Zadanie 3.

Dana jest relacja $r \subseteq X \times X$ na zbiorze X . Pokaż, że r jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy gdy

$$r = 1_X \cup r^o \cup (r \circ r)$$

Uwaga. r^o jest relacją odwrotną do r , tzn. dla dowolnych $x, y \in X$ mamy $\langle x, y \rangle \in r^o$ wtedy i tylko wtedy gdy $\langle y, x \rangle \in r$.

Zadanie 4.

Dana jest relacja $r \subseteq X \times Y$. Pokaż, że

1. r jest funkcją $r : X \rightarrow Y$ wtedy i tylko wtedy gdy $1_X \subseteq r^o \circ r$ oraz $r \circ r^o \subseteq 1_Y$.
2. funkcja $r : X \rightarrow Y$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy $1_X = r^o \circ r$.
3. funkcja $r : X \rightarrow Y$ jest 'na' wtedy i tylko wtedy gdy $r \circ r^o = 1_Y$.

Zadanie 5.

Udowodnij, że zbiór relacji równoważności na zbiorze $\mathbb{N}$ ma moc kontinuum.