

Zad. 1

a Niech A oznacza zbiór bijekcji monotonicznych $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$. Zauważmy, że

$$|A| \leq |\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|.$$

(nierówność jest oczywista, a pierwsza równość wynika z ogólnego faktu, że jeśli $A \sim B, C \sim D$, to $|A^C| = |B^D|$). Wiemy już, że moc zbioru funkcji monotonicznych $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest równa kontinuum (oznaczmy ten zbiór przez B). Pokażemy, że każda taka funkcja rozszerza się do monotonicznej bijekcji $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$. Wybierzmy zatem dowolną $f \in B$. $\tilde{f} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ następująco:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x & x \in (-\infty, -1) \cap \mathbb{Q} \\ f(0)(1+x) + x & x \in [-1, 0) \cap \mathbb{Q} \\ (f(n+1) - f(n))(x - n) + f(n) & x \in [n, n+1) \cap \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Zauważmy, że $\tilde{f}$ ma następujące własności:

$$\tilde{f}|_{\mathbb{N}} = f$$

$$\tilde{f}|_{(-\infty, -1]} = id_{(-\infty, -1]}$$

$$x \in [n, n+1) \rightarrow \tilde{f}(x) \in [f(n), f(n+1))$$

Ponadto dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, $\tilde{f}$ jest monotoniczną bijekcją $[n, n+1) \cap \mathbb{Q} \rightarrow [f(n), f(n+1))$. Stąd już wynika, że dla dowolnego $f \in B$, $\tilde{f} \in A$, a zatem funkcja $F : B \rightarrow A, F(f) = \tilde{f}$ jest dobrze określona. Łatwo sprawdzić, że funkcja F jest różnowartościowa. Istotnie, przypuśćmy, że $f, g \in B, F(f) = F(g)$. Wtedy w szczególności dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$f(n) = F(f)(n) = F(g)(n) = g(n)$$

na mocy definicji funkcji $F(f)$. Przeto $|\mathbb{R}| = |B| \leq |A|$. Teza wynika z tw. Cantora-Bernsteina.

□

b Niech A oznacza zbiór monotonicznych funkcji $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Niech B oznacza zbiór monotonicznych funkcji $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Mamy oczywiście:

$$|\mathbb{R}| = |B| \leq |A| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|.$$

Przeto $|A| = |\mathbb{R}|$.

□

Zad. 2 Niech $O(p, r)$ oznacza okrag w $\mathbb{R}^2$ o środku w p i promieniu r . Przy-
 puśćmy, że teza nie zachodzi, tzn. istnieje $p \in \mathbb{R}^2$ t., że dla dowolnego $r \in \mathbb{R}_+$
 istnieje $q \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ $q \in O(p, r)$. Niech $O'(p, r) = O(p, r) \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Zauważmy, że
 rodzina $D := (O'(p, r))_{r \in \mathbb{R}_+}$ jest rodziną parami rozłącznych zbiorów. Na mocy
 Aksjomatu Wyboru istnieje selektor tej rodziny, tzn. zbiór S t., że dla dowol-
 nego r , $|O'(p, r) \cap S| = 1$. Oczywiście $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Ale $|S| = |D| = |\mathbb{R}_+| = |\mathbb{R}|$.
 Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

□