

Zad. 1 Niech $\mathcal{A}$ będzie jak w treści zadania. Zauważmy, że $|\mathcal{P}_{sk}(\mathcal{A})| \leq \aleph_0$. Istotnie: jeśli liczba elementów $\mathcal{A}$ jest skończona, to $\mathcal{P}_{sk}(\mathcal{A})$ też jest skończony (wtedy $\mathcal{P}_{sk}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ ma moc $2^{|\mathcal{A}|}$). Jeśli $\mathcal{A}$ jest przeliczalny i nieskończony, to $\mathcal{P}_{sk}(\mathcal{A})$ też: jest co najwyżej przeliczalny, bo

$$|\mathcal{P}_{sk}(\mathcal{A})| \leq \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n \right| = \aleph_0$$

i nieskończony, bo zawiera nieskończenie wiele np. zbiorów jednoelementowych. Zatem

$$\bigcup_{X \in \mathcal{P}_{sk}(\mathcal{A})} \mathbb{N}^X =: \mathcal{C}$$

jest co najwyżej przeliczalną sumą pewnych zbiorów. Pokażemy, że każdy nich jest przeliczalny.

Zauważmy, że dla dowolnych A, B, C jeśli $|A| = |B|$, to $|C^A| = |C^B|$. Przeto dla dowolnego $X \in \mathcal{P}_{sk}(\mathcal{A})$ jeśli $|X| = n$, to $|\mathbb{N}^X| = |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$. Zatem $\mathcal{C}$ jest co najwyżej przeliczalną sumą zbiorów przeliczalnych, czyli jest zbiorem przeliczalnym.

□

Zad. 2 Niech $\mathcal{A}$ oznacza zbiór funkcji ściśle rosnących z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$. Oczywiście $|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$, gdyż $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Pozostaje nam do wykazania, że $|\mathcal{A}| \geq 2^{\aleph_0}$ i teza będzie wynikać z twierdzenia Cantora - Bernsteina.

Zauważmy, że (przy oznaczeniach jak w poprzednim zadaniu)

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{P}_{sk}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}.$$

Istotnie, różnica zbioru mocy kontinuum i zbioru co najwyżej przeliczalnego ma moc kontinuum, a w zadaniu 1 pokazaliśmy, że jeśli $\mathcal{B}$ jest co najwyżej przeliczalny, to $\mathcal{P}_{sk}(\mathcal{B})$ też. Połóżmy

$$\mathcal{C} := \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{P}_{sk}(\mathbb{N})$$

Pokażemy, że istnieje iniekcja $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, co zakończy dowód. Dla dowolnego $X \in \mathcal{C}$ niech $f(X)$ będzie funkcją $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zdefiniowaną ($g[X]$ oznacza obraz zbioru X przy funkcji g):

$$g(0) = \min X$$

$$g(n) = \min X \setminus g[\{0, \dots, n-1\}]$$

Na mocy twierdzenia o definiowaniu przez indukcję, oraz tego, że każdy $X \in \mathcal{C}$ jest przeliczalny, funkcje g są poprawnie zdefiniowane. Pokażemy, że f jest funkcją. Niech

$$g = f(X) \neq f(Y) = h.$$

Pokażemy, że $X \neq Y$. Niech $k := \min\{n \in \mathbb{N} \mid g(n) \neq h(n)\}$. Jeśli $k = 0$, to wtedy

$$\min X =: l \neq m := \min Y$$

i mamy $l < m$ lub $m < l$. W pierwszym przypadku $l \in X \setminus Y$ w drugim - $m \in Y \setminus X$. W obydwu przypadkach mamy $Y \neq X$. Jeśli $k > 0$, to powtarzamy powyższe rozumowanie dla

$$l := \min X \setminus g[\{0, \dots, n-1\}] \quad m := \min Y \setminus g[\{0, \dots, n-1\}].$$

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnego $X \in \mathcal{C}$, $f(X)$ jest funkcją rosnącą z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ (jeśli $a = \min X$, to $a < b = \min X \setminus \{a\}$). Łatwo także sprawdzić, że f jest 1-1. Istotnie, jeśli $f(X) = g = f(Y)$, to $X = g[\mathbb{N}] = Y$ na mocy definicji funkcji f .

□