

Zad. 1 Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami. Określmy funkcję $F : (B \times C)^A \rightarrow (B^A \times C^A)$ następująco:

$$F(f) = \langle g, h \rangle \quad \text{wtw.} \quad \forall a \in A f(a) = \langle g(a), h(a) \rangle$$

. Sprawdźmy, że F jest funkcją. Przypuśćmy, że $F(f) = \langle j, h \rangle \neq \langle j', h' \rangle = F(g)$. Wtedy oczywiście $j \neq j'$ lub $h \neq h'$. B.o.o. załóżmy że $j \neq j'$. Wtedy istnieje $b \in A$ t. że $j(b) \neq j'(b)$. Z definicji funkcji F mamy wtedy:

$$f(b) = \langle j(b), h(b) \rangle \neq \langle j'(b), h'(b) \rangle = g(b),$$

przeto $f \neq g$.

Pokażemy teraz, że F jest bijekcją zbiorów $(B \times C)^A$ i $(B^A \times C^A)$. Dla wykazanie różnowartościowości przypuśćmy, że $f, g \in (B \times C)^A$ i $F(f) = \langle j, h \rangle = F(g)$. Z definicji funkcji F mamy wtedy:

$$\forall a \in A f(a) = \langle j(a), h(a) \rangle = g(a),$$

zatem $f = g$.

Sprawdźmy, że F jest surjekcją. Niech $a = \langle g, h \rangle \in (B^A \times C^A)$. Zauważmy, że wtedy f określone następująco:

$$\forall a \in A f(a) = \langle g(a), h(a) \rangle$$

jest pewną funkcją $A \rightarrow B \times C$. Istotnie: dziedzina i przeciwdziedzina się zgadzają, a dla dowolnych $a, b \in A$ jeśli $a = b$, to

$$f(a) = \langle g(a), h(a) \rangle = \langle g(b), h(b) \rangle = f(b),$$

ponieważ g i h są funkcjami.

Pokazaliśmy zatem, że tak określona F jest bijekcją zbiorów $(B \times C)^A$ i $(B^A \times C^A)$.

□

Zad.2 Niech A, A', B, B' będą jak w treści zadania. Ponieważ $A \sim B$, $A' \sim B'$, to istnieją bijekcje

$$f : A \rightarrow B, g : A' \rightarrow B'.$$

Położmy zatem

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A \\ g(x) & \text{dla } x \in A' \end{cases}$$

Zauważmy najpierw, że h jest dobrze określona ponieważ $A \cap A' = \emptyset$, oraz f i g są funkcjami. Pokażemy, że h jest szukaną bijekcją. Sprawdźmy najpierw, że h jest różnowartościowa. Przypuśćmy, że $h(x) = h(y)$. Ponieważ $B \cap B' = \emptyset$ zachodzi dokładnie jedno z dwojga: $h(x) = h(y) \in B$ lub $h(x) = h(y) \in B'$. B.o.o. załóżmy, że zachodzi to pierwsze. Wtedy $f(x) = f(y)$ (ponieważ tylko f przyjmuje wartości w B), a zatem (z różnowartościowości f) $x = y$.

To, że h jest surjekcją wynika od razu z tego, że f i g są surjekcjami. Zatem $A \cup A' \sim B \cup B'$

□