

zad. 1 Niech funkcja f będzie jak w treści zadania.

(1) Twierdzimy, że $f((0, 1) \times [1, 2)) = (2, 4)$. Istotnie, zauważmy, że f jest ściśle rosnąca po obydwu współrzędnych, ciągła oraz $\inf_{\langle x, y \rangle \in (0, 1) \times [1, 2)} f(x, y) = f(0, 1) = 2$, $\sup_{\langle x, y \rangle \in (0, 1) \times [1, 2)} f(x, y) = f(1, 2) = 4$ (i funkcja nie przyjmuje swoich kresów na tym przedziale). To zaś znaczy, że dla dowolnego z , $z \in f((0, 1) \times [1, 2)) \Leftrightarrow \inf_{\langle x, y \rangle \in (0, 1) \times [1, 2)} f(x, y) < z < \sup_{\langle x, y \rangle \in (0, 1) \times [1, 2)} f(x, y) \Leftrightarrow 2 < z < 4 \Leftrightarrow z \in (2, 4)$.

□

(2) Korzystając z definicji przeciwobrazu $f^{-1}([1, 2]) = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 2^x + y \leq 2\} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - 2^x \leq y \leq 2 - 2^x\}$. Zatem jest to zbiór punktów płaszczyzny zawarty pomiędzy krzywymi $y = 1 - 2^x$ i $y = 2 - 2^x$ wraz z tymi krzywymi.

□

zad. 2 (2) $\Rightarrow$ (1) Przypuśćmy, że $f^{\rightarrow}$ jest 'na'. Wtedy w szczególności, dla każdego $y \in Y$ istnieje $A \subset X$ t., że $f^{\rightarrow}(A) = \{y\}$. Dla każdego $y \in Y$ definiujemy $A_y = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Zbiory A_y są rozłączne i niepuste (to wynika stąd, że f , $f^{\rightarrow}$ są funkcjami). Zatem, dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in A_y \subset X$ t., że $f(x) = y$. Stąd f jest 'na'.

(1) $\Rightarrow$ (3)

Przypuśćmy, że f jest 'na' i niech dla pewnych $A, B \subset Y$, $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)(*)$. Jeśli $A \triangle B$ (różnica symetryczna zbiorów A i B) jest niepusta, to istnieje $x \in X$ t., że dla pewnego $y \in Y$, $f(x) = y \in A \triangle B$. Ale wtedy, z definicji przeciwobrazu, $x \in f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$ (łatwo bowiem sprawdzić, że dla dowolnej funkcji g , $g^{-1}(A \cup B) = g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B)$, oraz $g^{-1}(A \cap B) = g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$), co prowadzi do sprzeczności z założeniem (*). Zatem $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$. Przeto, z dowolności A i B , f^{-1} jest 1-1.

(3) $\Rightarrow$ (2)

Przypuśćmy, że f^{-1} jest 1-1 i wybierzmy dowolny $A \subset Y$. Niech $B = f^{-1}(Y)$. Oczywiście $f^{\rightarrow}(B) \subset Y$. Ponieważ $f^{-1}(f^{\rightarrow}(B)) = f^{-1}(Y)$, to musi być $f^{\rightarrow}(B) = Y$, przeto $f^{\rightarrow}$ jest 'na'.

□

zad. 3 Niech $f, f^{-1}, f^{\rightarrow}, X, Y$ będą jak w poprzednim zadaniu. Wybierzmy dowolne $A \subset X$ i $B \subset Y$.

($\Rightarrow$) Niech $f^{\rightarrow}(A) \subset B$, a także $x \in A$. Z definicji funkcji obrazu $f(x) \in f^{\rightarrow}(A)$, a zatem $f(x) \in B$. Z definicji funkcji przeciwobrazu, $x \in f^{-1}(B)$.

($\Leftarrow$) Niech $A \subset f^{-1}(B)$, a także $y \in f^{\rightarrow}(A)$. Z definicji funkcji przeciwobrazu istnieje $x \in A$ t., że $f(x) = y$. Zatem z założenia $x \in f^{-1}(B)$, przeto $y = f(x) \in B$.

□