

Zad. 1 Niech A_n będą takie jak w treści zadania. Pokażemy, że $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k > 1 \wedge \forall n \in \mathbb{N} (n \mid k \Rightarrow n \in \{1, k\})\} (*)$ Oznaczmy zbiór po prawej stronie równości $(*)$ przez B .

$(\subseteq)$ Niech $x \notin B$. Wtedy istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $k \mid x$ i $k \neq x \wedge k \neq 1$. Niech p spełnia te warunki. Zauważmy, że wtedy $x \notin A_p$. Istotnie: $2 \leq p < n$ i $p \mid n$. Przeto $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

$(\supseteq)$ Niech $x \in B$. Wtedy $x \in A_x$, bo $2 \leq x \leq x$, oraz $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, n \neq x, x \in A_n$, gdyż x nie ma naturalnych dzielników poza 1 i samym sobą.

□

Zad. 2 Połóżmy $A_{i,j} = \{k \in \mathbb{R} \mid 0 < k \leq j \cdot i^{-1}\}, J = \mathbb{N}, I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wtedy dla ustalonego $j \in J$ mamy $\bigcap_{i \in I} A_{i,j} = \emptyset$, a zatem $\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_{i,j} = \emptyset$. Dla ustalonego i natomiast mamy: $\bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \mathbb{R}_+$, zatem $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \mathbb{R}_+$

Zad. 3 Niech rodzina $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia warunki podane w zadaniu. Dowodzimy, że

$$A_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n (*)$$

$(\subseteq)$ Niech $x \in A_0$. Zauważmy, że dla dowolnego y zachodzi dokładnie jeden z warunków:

(1) $\exists_n y \notin A_n$

(2) $\forall_n y \in A_n$

Jeśli dla x zachodzi (2) to oczywiście $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Przypuśćmy zatem, że zachodzi (1). Niech $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \notin A_n\}$. Z założenia $k > 0$. Wtedy oczywiście $x \in A_{k-1} \wedge x \notin A_k$, czyli $x \in A_{k-1} \setminus A_k$. Zatem $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{k-1} \setminus A_k)$. W obydwu przypadkach zatem $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

$(\supseteq)$ Oczywiście $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq A_0$. Przez trywialną indukcję można wykazać, że $\forall n \in \mathbb{N} A_n \subseteq A_0$. Zatem oczywiście $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}) \subseteq A_0$.

Dla dokończenia zadania zauważmy, że do powyższych dowodów przebowaliśmy jedynie założenia, że $\forall n \in \mathbb{N} A_n \subseteq A_0 (**)$. Zatem równość pozostanie prawdziwa jeśli założenie, że $\forall n \in \mathbb{N} A_{n+1} \subseteq A_n$ osłabimy do podanego linijkę wyżej.

(Dla dociekliwych)

Zauważmy jednak, że i to założenie można osłabić: rodzina $A_0 = \mathbb{N}, A_n = \mathbb{Z}$ dla n większych od 0 nie spełnia $(**)$, ale spełnia równość $(*)$, co wskazuje na to, że $(**)$ nie było warunkiem koniecznym. Pokażemy, że dla dowolnej przeliczalnej rodziny zbiorów indeksowanej liczbami naturalnymi

$$(A_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} (A_n \setminus A_0 \neq \emptyset \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N} (k > n \Rightarrow A_n \setminus A_0 \subseteq A_k))))$$

(intuicyjnie chodzi o to, że jeśli jakiś zbiór wystaje poza A_0 , to ta różnica jest zawarta we wszystkich zbiorach o większym indeksie). Ustalmy dowolną rodzinę $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

($\Rightarrow$) Przypuśćmy, że zachodzi (*) i istnieje k t., że

$$A_k \setminus A_0 \neq \emptyset \wedge \exists_{n > k} (A_k \setminus A_0) \setminus A_n \neq \emptyset.$$

Niech zatem $k = \min\{n \in \mathbb{N} | A_n \setminus A_0 \neq \emptyset\}$, $l = \min\{m \in \mathbb{N} | (A_k \setminus A_0) \setminus A_m \neq \emptyset\}$. Niech $x \in (A_k \setminus A_0) \setminus A_l$. Wtedy (korzystamy z założenia o l) $x \in (A_{l-1} \setminus A_0) \setminus A_l$ oraz $(A_{l-1} \setminus A_0) \setminus A_l = (A_{l-1} \setminus A_l) \setminus A_0 \subseteq (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \setminus A_0$, co daje sprzeczność z założeniem.

($\Leftarrow$) Przypuśćmy, że rodzina $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia

$$(\forall_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_0 \neq \emptyset \Rightarrow (\forall_{k \in \mathbb{N}} (k > n \Rightarrow A_n \setminus A_0 \subseteq A_k)))) . (\Delta)$$

Dowodzimy równości (*):

($\subseteq$) Dowód tej inkluzji przebiega tak samo jak poprzednio.

($\supseteq$) Niech $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Ponieważ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_0$ musimy rozpatrzyć jedynie przypadek $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1})$. Przypuśćmy, że $x \notin A_0$. Wtedy istnieje takie n , że $x \in (A_n \setminus A_{n+1}) \setminus A_0$. Niech $k \in \mathbb{N}$ spełnia ten warunek. Mamy wtedy jednak $A_k \setminus A_0 \neq \emptyset$ i $k+1 > k$, przeto (z war. (Δ)) $A_k \setminus A_0 \subseteq A_{k+1}$, czyli $(A_k \setminus A_{k+1}) \setminus A_0 = (A_k \setminus A_0) \setminus A_{k+1} = \emptyset$, co daje sprzeczność.

□