

Zad. 1 Niech A_r będą jak w treści zadania.

Odpowiedź: $\bigcup_{r \in \mathbb{R}_{>0}} A_r = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0) \}$ (*)

Oznaczmy zbiór po prawej stronie równości (*) przez B . Dowodzimy inkluzji w dwie strony.

($\subseteq$)

Niech $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ nie należą do B . Możemy bez utraty ogólności założyć, że $x \geq 0 \wedge y \leq 0$. Wtedy jednak $xy \leq 0$, a zatem dla dowolnego $r > 0$, $\langle x, y \rangle \notin A_r$.

Przeto $\langle x, y \rangle \notin \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{>0}} A_r$.

($\supseteq$)

Niech $\langle x, y \rangle \in B$. Połóżmy $p = xy$. Ponieważ $\langle x, y \rangle \in B$, to na mocy definicji zbioru B mamy $p = xy > 0$. Przeto $\langle x, y \rangle \in A_p$. W takim razie $\langle x, y \rangle \in \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{>0}} A_r$, co kończy dowód.

□

Zad. 2 Niech $A_{n,m}$ będą jak w treści zadania. Oznaczmy $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$ przez B . Wykażemy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, $x \notin B$, pokazując tym samym, że $B = \emptyset$ (ponieważ z warunków zadania wynika, że $B \subseteq \mathbb{R}$). Dla dowodu nie wprost przypuścimy, że istnieje $x \in \mathbb{R}$ t., że $x \in B$. Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$. Łatwo sprawdzić, że dla dowolnego n , $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m} = (n, +\infty)$. (Oznaczmy zbiór po lewej stronie równości przez C_n) Istotnie, ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Inkluzja $\subseteq$ jest oczywista, gdyż dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, $A_{n,m} \subseteq (n, +\infty)$. Dowodzimy inkluzji $\supseteq$. Niech $y \in (n, +\infty)$. Wtedy, ponieważ zbiór liczb naturalnych jest nieograniczony w zbiorze liczb rzeczywistych, istnieje $l \in \mathbb{N}$, t., że $y < l$. Przeto $y < l^2$ i $y \in A_{n,l}$ i tym bardziej $y \in C_n$. A zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $x \in (n, +\infty)$. Jest to jednak sprzeczne z tym, że zbiór liczb naturalnych jest nieograniczony w zbiorze liczb rzeczywistych.

□

Zad. 3 Niech $A_{q,n}$ będą jak w treści zadania.

(a) Zauważmy, że dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{q,n} = \{q\}$. Istotnie, ustalmy $q \in \mathbb{Q}$. Dowodzimy inkluzji w dwie strony. Oczywiście dla dowolnego n , $q \in A_{q,n}$, zatem należy też do $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{q,n}$, co dowodzi inkluzji $\supseteq$.

Dla dowodu przeciwnej inkluzji wybierzmy $x \neq q$ i niech $|x - q| = \delta$. Wtedy istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $\frac{1}{k} < \delta$ (wystarczy wziąć $k = \lceil \delta^{-1} \rceil + 1$, gdzie $\lceil x \rceil$ to najmniejsza liczba naturalna większa od x ("sufit" x)). Niech $k \in \mathbb{N}$ spełnia ten warunek. Łatwo sprawdzić, że $x \notin A_{q,k}$. Przeto tym bardziej $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{q,n}$. Skoro zatem $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{q,n} = \{q\}$, to oczywiście $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{q,n} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} = \mathbb{Q}$.

□

(b) Pokażemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_{q,n} = \mathbb{R}$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Inkluzja $\subseteq$ jest oczywista. Dla dowodu przeciwnej inkluzji wybierzmy $x \in \mathbb{R}$ i dobierzmy doń $q \in \mathbb{Q}$ tak żeby $|x - q| < \frac{1}{n+2}$. Takie q istnieje dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$

na mocy gęstości liczb wymiernych w liczbach rzeczywistych. Wtedy jednak $x \in A_{q,n}$, a zatem $x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_{q,n}$. Przeto dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_{q,n} = \mathbb{R}$. Oczywiście $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

□

Zad. 4 Ustalmy rodziny $A_i, B_i, i \in I$, gdzie I to dowolny zbiór indeksów. Zauważmy, że dla dowolnego x zachodzi:

$$x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \Leftrightarrow \exists_{i \in I} (x \in A_i \wedge x \in B_i) \Rightarrow \exists_{i \in I} x \in A_i \wedge \exists_{i \in I} x \in B_i \quad (*)$$

Warunek $\exists_{i \in I} x \in A_i \wedge \exists_{i \in I} x \in B_i$ jest zaś z definicji (sumy rodziny zbiorów i iloczynu zbiorów) równoważny temu, że $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{i \in I} B_i$.

Z powyższego zatem wynika, że $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{i \in I} B_i$. Pokażemy, że w ogólności pomiędzy tymi zbiorami nie zachodzi równość. Niech $I = \mathbb{N}$, $A_i = \{n \in \mathbb{N} | n = i\}$, $B_i = \{n \in \mathbb{N} | n = i+1\}$. Oczywiście dla dowolnego i , $A_i \cap B_i = \emptyset$. Mamy jednak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$ oraz $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a zatem $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.