

zad. 1 Korzystając z definicji różnicy symetrycznej, dla dowolnego A mamy:

$$A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A)$$

Oczywiście dla dowolnego B $(\emptyset \setminus B) = \emptyset$ oraz $(B \setminus \emptyset) = B$. Dostajemy zatem

$$(A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = (A \cup \emptyset)$$

I ponieważ dla dowolnego B $(B \cup \emptyset) = B$ stąd już wynika teza.

zad. 2 Prawidłowa odpowiedź: dla dowolnych A, B, C,

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C) \Leftrightarrow B = C$$

Dowód:

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $B = C$. Wtedy oczywiście $(B \Delta C) = (B \Delta B) = \emptyset$, zatem

$$A \cap (B \Delta C) = \emptyset.$$

Przy tym założeniu także $(A \cup B) = (A \cup C)$, zatem

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \emptyset.$$

Przeto $A \cap (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$.

($\Rightarrow$) Przypuśćmy, że zachodzi $A \cap (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$ i $B \neq C$. Wtedy $B \setminus C \neq \emptyset$ lub $C \setminus B \neq \emptyset$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $B \setminus C \neq \emptyset$. Zauważmy dalej, że

$$A \cap (B \Delta C) = A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = (A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B)) = (A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B')$$

Po drodze korzystaliśmy z rozdzielności koniunkcji względem alternatywy i zależności $B \setminus C = B \cap C'$. Zauważmy dalej, że

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = ((A \cup B) \setminus (A \cup C)) \cup ((A \cup C) \setminus (A \cup B)).$$

I po łatwym przeliczeniu (korzystając z rozdzielności koniunkcji względem alternatywy i redukując zbędne składniki) otrzymujemy, że

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = (B \cap C' \cap A') \cup (C \cap B' \cap A').$$

Korzystając z założenia mamy więc następującą równość:

$$(*) (B \cap C' \cap A') \cup (C \cap B' \cap A') = (A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B').$$

Ponieważ dla dowolnych A, B, C zachodzi $A = B \Rightarrow A \cap C = B \cap C$, to (przecinając obydwa zbiory w (*)) z $B \neq C$

$$S_1 := (B \cap C' \cap A') = ((B \cap C' \cap A') \cup (C \cap B' \cap A')) \cap B = ((A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B')) \cap B = (A \cap B \cap C') =: S_2$$

Zauważmy, że zgodnie z założeniem S_1 i S_2 są niepuste. Istotnie: ponieważ $B \cap C'$ jest niepusty, to ma niepuste przecięcie z A lub A' . Bez straty ogólności niech $x \in S_1$. Wtedy $x \in A$, ale także (ponieważ $S_1 = S_2$) $x \in A'$, czyli $\neg(x \in A)$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

zad.3 1. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną rodziną zbiorów i B dowolnym zbiorem. Mamy pokazać, że

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(B) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \bigcup \mathcal{A} \subseteq B$$

Dowód:

($\Rightarrow$) Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Jeśli $x \in \bigcup \mathcal{A}$ to istnieje $A \in \mathcal{A}$ t., że $x \in A$. Z założenia $A \in \mathcal{P}(B)$, zatem $A \subseteq B$, czyli $x \in B$. Przeto dla dowolnego x mamy $x \in \bigcup \mathcal{A} \Rightarrow x \in B$. W takim razie $\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$.

($\Leftarrow$) Niech $\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$. Wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$. Istotnie, dla dowolnego x , jeśli $x \in A$ to $x \in \bigcup \mathcal{A}$, a zatem (z założenia) $x \in B$. Oznacza to, że $A \in \mathcal{P}(B)$, przeto, z dowolności $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(B)$.

2. (a) Przyjmując w udowodnionej równoważności $B = \bigcup \mathcal{A}$ otrzymujemy:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A}) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A}.$$

Ponieważ prawa strona jest prawdziwa dla dowolnej rodziny zbiorów, otrzymujemy tezę.

(b) Pokażemy najpierw inkluzję $\bigcup \mathcal{P}(B) \subseteq B$. Przyjmując w udowodnionej w punkcie 1 równoważności $\mathcal{A} = \mathcal{P}(B)$ otrzymujemy

$$\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(B) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \bigcup \mathcal{P}(B) \subseteq B.$$

Ponieważ lewa strona jest prawdziwa dla dowolnego B , wynika stąd dowodzona inkluzja.

Dla dowodu $B \subseteq \bigcup \mathcal{P}(B)$, zauważmy, że jeśli $x \in B$, to $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$, a zatem $x \in \bigcup \mathcal{P}(B)$, co kończy dowód.