

zad. 1 (a) Zauważmy, że

$$p \vee q \iff \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

Na mocy II prawa De Morgana. Przyjmujemy to jako definicję.

(b) Sprawdźmy, że

$$p \rightarrow q$$

i

$$\neg(p \wedge \neg q)$$

są równoważne w KRZ. Porównamy tabelki prawdziwościowe obydwu formuł.

$$p \rightarrow q$$

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$\neg(p \wedge \neg q)$$

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Przyjmiemy zatem $p \rightarrow q =_{def} \neg(p \wedge \neg q)$

(c) Sprawdźmy, że tautologią KRZ jest

$$(p \iff q) \iff ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))(*)$$

p	q	$p \iff q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	(*)
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

Zatem, korzystając z (b), możemy przyjąć

$$(p \iff q) =_{def} ((\neg(p \wedge \neg q)) \wedge (\neg(q \wedge \neg p)))$$

Zad. 2 Oznaczmy przez ϕ_n formułę jak w treści zadania złożoną z $2n$ implikacji, a przez ψ_n formułę złożoną z $2n - 1$ implikacji. Niech ponadto $\mathcal{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

Pokażemy najpierw przez indukcję względem n , że dla dowolnego $n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ formuła ψ_n jest tautologią KRZ.

Dla $n = 1$

$$\psi_1 = p \rightarrow p$$

oczywiście jest tautologią KRZ. Ustalmy $n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ i założmy, że dla ψ_n teza zachodzi. Dowiedzimy tezy dla $n + 1$. Zauważmy, że

$$\psi_{n+1} = ((\psi_n \rightarrow p) \rightarrow p),$$

oraz ψ_n jest tautologią. Stąd już po bezpośrednim sprawdzeniu przekonujemy się, że i ψ_{n+1} jest tautologią. Zatem dla dowolnego $n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, ψ_n jest tautologią KRZ.

Pokażemy teraz, że dla dowolnego $n \in \mathcal{N}$, ϕ_n nie jest tautologią KRZ. Dla $n = 0$ teza oczywiście zachodzi. Ustalmy $n \geq 1$. Zauważmy, że

$$\phi_n = \psi_n \rightarrow p,$$

zatem, ponieważ wiemy już że ψ_n jest tautologią, kładąc $V(p) = 0$ mamy $V(\phi_n) = 0$, co kończy dowód.

Zad.3 (a) Zauważmy, że dla dowolnego x

$$x \in A \setminus (B \setminus C) \text{ wtw. } x \in A \wedge \neg(x \in B \setminus C) \text{ wtw. } x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge \neg(x \in C)) \text{ wtw.}$$

(korzystając z I prawa De Morgana i prawa podwójnej negacji)

$$x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee x \in C) \text{ wtw.}$$

(korzystając z rozdzielnosci koniunkcji względem alternatywy)

$$(x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in A \wedge x \in C) \text{ wtw.}$$

(z definicji)

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Zatem dla dowolnego x , $x \in A \setminus (B \setminus C)$ wtw. $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Przeto $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

(b) Dla dowolnego x mamy

$$x \in A \setminus (B \cap C) \text{ wtw. } x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \text{ wtw.}$$

wtw. (z II prawa De Morgana)

$$x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg x \in C)$$

wtw. (z prawa rozdzielnosci koniunkcji względem alternatywy)

$$(x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in A \wedge \neg(x \in C))$$

wtw. (z definicji)

$$x \in ((A \setminus B) \cup (A \setminus C))$$

. Zatem $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.