

Podstawy matematyki – egzamin poprawkowy

19 lutego 2026

Część druga

2. Niech $D : \mathcal{P}(\{0, 1\}^*) \rightarrow \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$ będzie funkcją określoną równaniem¹:

$$D(A) = \{u \in \{0, 1\}^* \mid \exists w \in A. u \subseteq w\}.$$

- (a) Jaka jest moc zbioru wartości tej funkcji?
- (b) Czy dla każdych zbiorów A i B istnieje taki zbiór E , że $D(A) \cup D(B) = D(E)$?
- (c) Czy dla każdych zbiorów A i B istnieje taki zbiór C , że $D(A) \cap D(B) = D(C)$?
- (d) Czy istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$, że $D^{-1}(\{A\})$ ma moc $\aleph_0$?

3. Niech $\sqsubseteq$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ określoną jak niżej. (Uwaga na znak „ $>$ ”!)

$$f \sqsubseteq g \iff \forall n \in \mathbb{N} [f(n) \leq g(n) \wedge f(\{m \mid m > n\}) \subseteq g(\{m \mid m > n\})].$$

Wiadomo, że $\sqsubseteq$ jest relacją częściowego porządku.

- (a) Udowodnić, że elementy minimalne w $\sqsubseteq$ to wszystkie takie niemalejące funkcje f , że $f(0) = 0$. Czy są w tym porządku elementy maksymalne?
- (b) Czy ten porządek jest dobrze ufundowany?
- (c) Czy każdy skończony podzbiór $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ma kres górny?
- (d) (Męczydełko) Czy istnieje łańcuch mocy continuum?

Rozwiązania

2a: Zbiór $\text{Rg}(D)$ jest mocy continuum. Ograniczenie z góry jest oczywiste, bo $\text{Rg}(D) \subseteq \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$. Dla ograniczenia z dołu zauważmy, że słowa postaci $0^n 1$ tworzą nieskończony antyłańcuch w $\{0, 1\}^*$. Każdy podzbiór R tego antyłańcucha wyznacza zaś inny zbiór $D(R)$.

2b: Tak, na przykład $E = A \cup B$. Równoważność $x \in D(A \cup B) \leftrightarrow x \in D(A) \cup D(B)$ to szczególny przypadek schematu $\exists y (\alpha(x, y) \vee \beta(x, y)) \leftrightarrow \exists y \alpha(x, y) \vee \exists y \beta(x, y)$, w którym $\alpha(x, y)$ i $\beta(x, y)$ oznaczają odpowiednio $x \subseteq y \in A$ i $x \subseteq y \in B$.

2c: Tak, choć niekoniecznie dla $C = A \cap B$. Ale można przyjąć $C = D(A) \cap D(B)$. Pokażemy, że $D(C) = C$. Nierówność $C \subseteq D(C)$ jest oczywista, a dla wykazania, że $D(C) \subseteq C$ rozpatrzmy dowolne $u \in D(C)$. Po pierwsze istnieje takie $v \in C$, że $u \subseteq v$. Po drugie, skoro $v \in C = D(A) \cap D(B)$, to istnieją takie $w_1 \in A$ i $w_2 \in B$, że $v \subseteq w_1$ i $v \subseteq w_2$. Ale w takim razie u też jest prefiksem słowa w_1 z A i słowa w_2 z B zatem $u \in D(A) \cap D(B) = C$, co kończy dowód.

2d: Nie. Usadnienie jest całkiem takie samo jak w zadaniu 1e z pierwszego terminu.

3a: Niech f będzie funkcją niemalejącą i niech $f(0) = 0$. Przypuśćmy, że $g \sqsubseteq f$. Pokażemy, że $g(n) = f(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $g(0) = f(0) = 0$. Dla $n > 0$ wiemy, że $g(n) \leq f(n)$ i $g(\{n, n+1, \dots\}) \subseteq f(\{n, n+1, \dots\})$. Z ostatniego zawierania wynika w szczególności,

¹Przypomnijmy, że dla słów u, w zachodzi $u \subseteq w$ wtedy i tylko wtedy, gdy u jest prefiksem w to znaczy istnieje takie słowo v , że $u \cdot v = w$.

że $g(n) \in f(\{n, n+1, \dots\})$, a skoro f jest niemalejąca, to $f(n) = \min f(\{n, n+1, \dots\})$, czyli $g(n) \geq f(n)$.

W drugą stronę, jeśli $f(0) > 0$ lub f nie jest niemalejąca, to f nie jest minimalna. W pierwszym przypadku dla funkcji $f_0 = \lambda n. \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } f(n)$ w oczywisty sposób mamy $f_0 \sqsubset f$. W drugim przypadku założymy, że nierówność $f(i) > f(j)$ zachodzi dla pewnych $i < j$. Wtedy dla funkcji $g = \lambda n. \text{if } n = i \text{ then } f(j) \text{ else } f(n)$ mamy $g \sqsubset f$. Istotnie, dla dowolnego n nierówność $g(n) \leq f(n)$ jest oczywista. Dla dowodu zawierania $g(\{m \mid m > n\}) \subseteq f(\{m \mid m > n\})$ rozpatrzmy dwa przypadki: jeśli $n < i$, to każda wartość $g(m)$ dla $m > n$ jest równa albo $f(m)$, albo $f(j)$, gdzie $j > i$; tak czy owak $g(m) \in f(\{m \mid m > n\})$. Jeśli natomiast $n \geq i$, to zbiory $g(\{m \mid m > n\})$ i $f(\{m \mid m > n\})$ są po prostu równe.

Elementów maksymalnych nie ma. Każda funkcja f jest ostro mniejsza od funkcji

$$\lambda n. \text{if } n = 0 \text{ then } f(0) + 1 \text{ else } f(n).$$

3b: Porządek $\sqsubseteq$ nie jest dobrze ufundowany. Łatwo zdefiniować malejący ciąg funkcji. Na przykład $f_i = \lambda n. \text{if } 2 \mid n \text{ then } 0 \text{ else if } n < 2i \text{ then } 0 \text{ else } 1$. Istotnie, dla każdego n zachodzi $f_{i+1}(n) \leq f_i(n)$ (a w dodatku dla $n = 2i + 1$ nierówność jest ostra) oraz $f_{i+1}(\{m \mid m > n\}) = f_i(\{m \mid m > n\}) = \{0, 1\}$.

3c: Nie. Na przykład zbiór $\{f_0, f_1\}$, gdzie $f_0 = \lambda n.0$, $f_1 = \lambda n.1$, nie jest nawet ograniczony z góry. Istotnie, gdyby f było ograniczeniem górnym, to z nierówności $f_1 \sqsubseteq f$ wynika $\forall n \in \mathbb{N}. f(n) \geq 1$, a z kolei z warunku $f_0 \sqsubseteq f$ wynika $\forall n \in \mathbb{N}. f_0(\{m \mid m > n\}) \subseteq f(\{m \mid m > n\})$, co oznacza, że f przyjmuje wartość 0 nieskończenie wiele razy. Te dwa warunki są oczywiście sprzeczne ze sobą, co dowodzi, że zbiór ten nie ma ograniczenia górnego.

3d: Tak, zdefiniujemy taki łańcuch. Pomysł jest taki: co drugi poziom pełnego drzewa binarnego etykietujemy od lewej liczbami $0, 1, \dots, 2^k - 1$. A na każdym z pozostałych poziomów etykieta będzie stała, z tym, że każda liczba występuje na nieskończenie wielu poziomach. Patrz rysunek. Każda gałąź drzewa reprezentuje funkcję z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$. Im bardziej „na prawo” jest położona gałąź, tym większa (w sensie $\sqsubseteq$) jest odpowiadająca jej funkcja.

Ścisłej: dla $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ i $k \in \mathbb{N}$ niech $\alpha[k] = \sum_{i=0}^k \alpha(k-i) \cdot 2^i$. Sens: pierwsze $k+1$ wyrazów ciągu α stanowi zapis dwójkowy liczby $\alpha[k]$ (najbardziej znaczący bit to zawsze $\alpha(0)$). Teraz dla $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ niech

$$f_\alpha = \lambda n. \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else if } n = 2k + 1 \text{ then } \alpha[2k] \text{ else } \max\{d \mid (2^{d+1} \mid n)\}.$$

Trzeba jeszcze sprawdzić, że funkcje f_α są porównywalne i różne. Niech więc $\alpha \neq \beta$ i niech $n = \min\{k \mid \alpha(k) \neq \beta(k)\}$, powiedzmy $\alpha(n) = 0$ i $\beta(n) = 1$. Wtedy $\alpha[k] = \beta[k]$ dla $k < n$ oraz $\alpha[k] < \beta[k]$ dla $k \geq n$, bo decyduje bit na pozycji n . Stąd zawsze mamy $f_\alpha(n) \leq f_\beta(n)$ (a dla nieparzystych n większych od k nierówność jest ostra). Drugi warunek jest łatwy, bo dla wszystkich α i n mamy $f_\alpha(\{m \mid m > n\}) = \mathbb{N}$. (Dla każdego d istnieją dowolnie duże liczby postaci $2^{d+1} \cdot x$, gdzie x jest nieparzyste.)

