

Podstawy matematyki – egzamin poprawkowy

19 lutego 2026

Część pierwsza

1. Relacja r w zbiorze $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_+$ (gdzie $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$) jest określona tak:¹

$$f r g \Leftrightarrow \forall n[\exists m(m \leq n \wedge f(n) | g(m)) \wedge \exists m(m \leq n \wedge g(n) | f(m))].$$

Wiadomo, że r to relacja równoważności.

- (a) Niech $R(f)(n) = \{k \mid \exists m(m \leq n \wedge k \mid f(m))\}$ dla dowolnych $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_+$ i $n \in \mathbb{N}$.
Udowodnić, że $f r g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R(f) = R(g)$ (czyli że $r = \ker R$).
- (b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_+)/r$?
- (c) Jakiej mocy jest klasa abstrakcji relacji r wyznaczona przez funkcję
 $g = \lambda i. \text{if } i = 0 \text{ then } 6 \text{ else } 2$?
- (d) Jakiej mocy jest klasa abstrakcji relacji r wyznaczona przez funkcję
 $h = \lambda i. \text{if } i = 0 \text{ then } 16 \text{ else } p_i$,
gdzie $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ to ciąg wszystkich liczb pierwszych ($p_1 = 2, p_2 = 3$, itd.)?
- (e) (Czekadełko) Udowodnić, że relacja r nie ma klas mocy $\aleph_0$.

Rozwiązania

1a: Przypuśćmy najpierw, że $f r g$. Jeśli $k \in R(f)(n)$, to $k \mid f(m)$ dla pewnego $m \leq n$. Ponieważ $f r g$, więc $f(m) \mid g(\ell)$ dla pewnego $\ell \leq m$. Ale wtedy $\ell \leq n$ i $k \mid g(\ell)$, skąd $k \in R(g)(n)$. A więc pokazaliśmy $R(f)(n) \subseteq R(g)(n)$, dla dowolnego n . Ponieważ inkluzja odwrotna jest analogiczna, więc $R(f) = R(g)$.

Założmy teraz, że $R(f) = R(g)$ i sprawdźmy, że $f r g$. Ponieważ $f(n) \mid f(n)$ oraz $n \leq n$, więc $f(n) \in R(f)(n) = R(g)(n)$. Zatem istnieje takie m , że $m \leq n$ oraz $f(n) \mid g(m)$, ale o to właśnie nam chodziło. Analogicznie sprawdzamy drugą część warunku.

1b: Zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji r jest mocy continuum. Ograniczenie górne wynika z tego, że dziedziną $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_+$ relacji r jest mocy $\mathfrak{C}$. Aby pokazać, że $\mathfrak{C}$ jest też ograniczeniem dolnym i zastosować twierdzenie Cantora-Bernsteina, zdefiniujemy injekcję $D : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_+)/r$ w następujący sposób: $D(\alpha) = [f_\alpha]_r$, gdzie $f_\alpha(n) = \text{if } \alpha(n) = 0 \text{ then } p_{2n+1} \text{ else } p_{2n+2}$, a $p_1, p_2, \dots$ to kolejne różne liczby pierwsze.

Aby wykazać różnowartościowość D , należy udowodnić, że jeśli $\alpha \neq \beta$, to $\langle f_\alpha, f_\beta \rangle \notin r$. Założmy, że $\alpha(n) \neq \beta(n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, np. przyjmijmy, że $\alpha(n) = 0$ i $\beta(n) = 1$. Wtedy nie znajdziemy takiego $m \leq n$, że $f_\alpha(n) \mid f_\beta(m)$, ponieważ $f_\alpha(n) = p_{2n+1}$, a każda z liczb pierwszych $f_\beta(0), \dots, f_\beta(n)$ jest różna od p_{2n+1} .

1c: Ta klasa jest mocy continuum. Należą do niej między innymi wszystkie funkcje postaci $f_A = \lambda n. \text{if } n = 0 \text{ then } 6 \text{ else if } n - 1 \in A \text{ then } 2 \text{ else } 3$, gdzie $A \subseteq \mathbb{N}$. Operacja $\lambda A. f_A$ jest injekcją z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ do $[g]_r$. Różnowartościowość jest oczywista, pozostaje zauważyć, że dla każdego A zachodzi $f_A r g$, bo $R(f_A) = \lambda n. \{1, 2, 3, 6\} = R(g)$.

1d: Ta klasa ma dokładnie pięć elementów $f_1, f_2, f_4, f_8, f_{16}$, gdzie

$$f_n = \lambda i. \text{if } i = 0 \text{ then } 16 \text{ else if } i = 1 \text{ then } n \text{ else } p_i.$$

¹Przypomnijmy, że $k \mid \ell$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists r \in \mathbb{N}. k \cdot r = \ell$.

Łatwo sprawdzić, że wszystkie pięć funkcji należy do tej samej klasy. Ale trzeba jeszcze sprawdzić, że nie ma innych. Przypuśćmy więc, że $f \mid f_{16}$ i zaczniemy od tego, że $f(0) = 16$. Nie ma innej opcji, bo muszą istnieć takie $m_1, m_2 \leq 0$, że $f_{16}(0) \mid f(m_1)$ i $f(0) \mid f_{16}(m_2)$. Ale wtedy $m_1, m_2 = 0$, więc $f(0) = 16$. Liczba $f(1)$ musi być dzielnikiem liczby $f_{16}(0) = 16$ lub liczby $f_{16}(1) = 2$, a więc $f(1) \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$. Dalej przez indukcję dowodzimy, że $f(n) = p_n$ dla wszystkich $n > 1$. Przypuśćmy, że $f(k) = p_k$ dla $1 < k < n$. Liczba $f_{16}(n) = p_n$ musi być dzielnikiem któregoś $f(m)$, gdzie $m \leq n$, ale nie jest dzielnikiem żadnego $f(m)$ dla $m < n$ (uwaga: $p_2 = 3$). Zatem $p_n \mid f(n)$. Ale wtedy $f(n)$ nie jest dzielnikiem żadnego $f_{16}(m)$ dla $m < n$ i jedyna możliwość to $f(n) \mid f_{16}(n) = p_n$. Stąd $f(n) = p_n$.

1e: Pokażemy, że są tylko klasy mocy continuum i skończone. Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_+$. Powiemy, że liczba $n > 0$ jest *argumentem sztywnym* funkcji f , gdy $R(f)(n) \neq R(f)(n-1)$. Zauważmy, że wtedy $R(f)(n-1) \subsetneq R(f)(n)$, co więcej $f(n) \notin R(f)(n-1)$. Jeśli więc $g \in [f]_r$, to $g(n) = f(n)$, co uzasadnimy podobnie jak w części 1d.

Przypadek 1: Prawie wszystkie argumenty funkcji f (większe od pewnego N) są sztywne. Wtedy każda funkcja g z klasy $[f]_r$ może się różnić od f tylko dla argumentów nie większych od N . Wartości przyjmowane przez g dla takich argumentów muszą należeć do skończonego zbioru $R(g)(N) = R(f)(N)$, a zatem w klasie $[f]_r$ jest tylko skończenie wiele funkcji.

Przypadek 2: Funkcja f jest stale równa 1. Wtedy łatwo widzieć, że jej klasa abstrakcji jest singletonem.

Przypadek 3: Funkcja f ma nieskończenie wiele argumentów niesztywnych i nie jest stale równa 1. Wtedy zbiór $R(f)(N)$ ma dla pewnego N co najmniej jeden element a różny od 1. Ustawmy w ciąg rosnący $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ wszystkie niesztywne argumenty większe od N . I zdefiniujmy injekcję $\Theta : (\mathbb{N} \rightarrow \{a, 1\}) \xrightarrow{1-1} [f]_r$ w ten sposób: $\Theta(\alpha)(n) = \text{if } n = k_i \text{ then } \alpha(i) \text{ else } f(n)$. Funkcje $\Theta(\alpha)$ są oczywiście różne dla różnych α . A więc w tym przypadku klasa jest nieprzeliczalna, bo wszystkie należą do klasy $[f]_r$. Istotnie, $R(\Theta(\alpha))(n) = R(f)(n)$ dla dowolnego n , co pokażemy przez indukcję. Dla uproszczenia notacji niech $\Theta(\alpha) = g$ i przypuśćmy, że $R(g)(k) = R(f)(k)$ dla wszystkich $k < n$. Jeśli $g(n) = f(n)$, to krok indukcyjny jest oczywisty, w przeciwnym razie n jest niesztywne i większe od N . Wtedy $f(n) \in R(f)(n-1) = R(g)(n-1)$, więc $f(n) \mid g(\ell)$ dla pewnego $\ell < n$. Ponadto $g(n) \in \{1, a\} \subseteq R(f)(N)$, więc $g(n) \mid f(\ell)$ dla pewnego $\ell \leq N < n$.