Rachunek sekwentów dla klasycznej logiki zdaniowej

Sekwent: napis postaci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi_1, \ldots, \psi_m$, gdzie φ_i i ψ_j są formułami. Zarówno m jak n może być zerem.

Aksjomaty: sekwenty postaci $\varphi \vdash \varphi$.

Reguły należy rozumieć tak: jeśli sekwent górny jest dowodliwy to sekwent dolny też. Notacja: duże litery greckie oznaczają ciągi formuł; napis Γ, φ oznacza ciąg powstały przez dopisanie φ do ciągu Γ, etc.

Wymiana:
$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma}\text{(LW)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}\text{(PW)}$$

Osłabianie:
$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}\text{(LO)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Pi}{\Gamma \vdash \varphi, \Pi}\text{(PO)}$$

Skracanie:
$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}\text{(LS)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}\text{(PS)}$$

Koniunkcja:
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Sigma}\text{(LK)} \ \frac{\Gamma, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Gamma \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Sigma}\text{(PK)}$$

Alternatywa:
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Sigma}\text{(LA)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Sigma}\text{(PA)}\frac{\Gamma \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Sigma}$$

Implikacja:
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta, \psi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta, \varphi \to \psi \vdash \Sigma, \Pi}\text{(LI)} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Sigma}\text{(PI)}$$

Negacja:
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Pi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Pi}\text{(LN)} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Pi}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Pi}\text{(PN)}$$

Prawda i fałsz: $\Gamma, \mathbf{ff} \vdash$ (LF) $\qquad \Gamma \vdash \mathbf{tt}, \Sigma$ (PP) (nie ma (PF) ani (LP))

Cięcie:
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Pi \quad \Delta, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \Delta \vdash \Pi, \Sigma}\text{(Ciach!)}$$

Wariant intuicjonistyczny dopuszcza tylko sekwenty postaci $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \vdash \varnothing$, gdzie $\varnothing$ oznacza ciąg pusty. Reguły (PW) i (PS) tracą sens. W pozostałych regułach należy przyjąć, że ciąg Σ ma co najwyżej jeden element, a ciąg Π jest pusty.

Reguły multiplikatywne (bezkontekstowe):

Koniunkcja:
$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Sigma}\ (\mathrm{L}\wedge) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta \vdash \psi, \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \psi, \Sigma, \Pi}\ (\mathrm{P}\wedge)$$

Alternatywa:
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma \quad \Delta, \psi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi \vdash \Sigma, \Pi}\ (\mathrm{L}\vee) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Sigma}\ (\mathrm{R}\vee)$$

Prawda:
$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \mathbf{tt} \vdash \Sigma}\ (\mathrm{L}\mathbf{tt}) \qquad \vdash \mathbf{tt}\ (\mathrm{P}\mathbf{tt})$$

Fałsz:
$$\mathbf{ff} \vdash\ (\mathrm{L}\mathbf{tt}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Pi}{\Gamma \vdash \mathbf{ff}, \Pi}\ (\mathrm{P}\mathbf{ff})$$