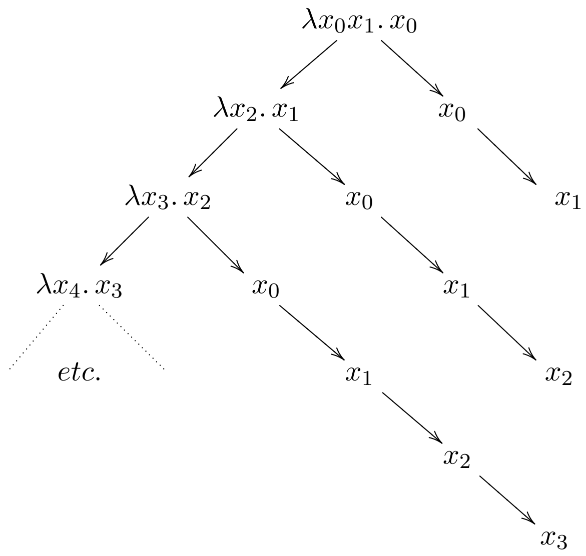
Egzamin z rachunku lambda, 30 stycznia 2026

1. Proszę skonstruować taki term M, że (patrz rysunek):

   – drzewo $\mathrm{BT}(M)$ ma korzeń $\lambda x_0 x_1.\, x_0$ i jedną gałąź nieskończoną (w lewo);
   – każdy wierzchołek na tej gałęzi na poziomie $n > 0$ ma etykietę $\lambda x_{n+1}.\, x_n$;
   – z wierzchołka $\lambda x_{n+1}.\, x_n$ wyrasta gałązka długości $n{+}1$ o wierzchołkach $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$.



2. Niech $M = \lambda xy.\, x(xyy)(xy)$, $N = \lambda xy.\, x(xyy)(xyy)$.

   (a) Proszę skonstruować taki term G, że $GM =_\beta \mathbf{K}$ oraz $GN =_\beta \mathbf{S}$.

   (b) Które z termów M, N są typowalne w rachunku lambda z typami prostymi? Polimorficznymi? Iloczynowymi bez omegi?

3. Proszę skonstruować lambda-term F, który w rachunku z typami prostymi skośnie definiuje ciąg Fibonacciego: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(n+2) = f(n) + f(n+1)$. Jakiego typu jest term F? Czy istnieje taki term, który ma typ $\omega_p \to \omega_p$?

4. W polimorficznym rachunku lambda można reprezentować listy elementów typu τ jako termy typu[1] $L_\tau = \forall p((\tau \to p \to p) \to p \to p)$, w ten sposób, że $nil = \Lambda p \lambda f x.\, x$ oraz $a :: \ell = \Lambda p \lambda f x.\, f a(\ell p f x)$.

   (a) Proszę zdefiniować taką operację R, że $R(a_1 :: \cdots :: a_n) =_\beta a_n :: \cdots :: a_1$.

   (b) Czy każdy kombinator M typu L_τ jest postaci $N_1 :: N_2 :: \cdots :: N_k$, gdzie N_i są kombinatorami typu τ?

[1] Tu brakowało zastrzeżenia $p \notin \mathrm{FV}(\tau)$.

Przykładowe rozwiązania:

1: Jeśli przez T_n oznaczymy drzewo zaczepione na poziomie n, to dla $n > 0$ dostaniemy zależność $T_n = \lambda x_{n+1}.\, x_n T_{n+1}(\varphi(x_{n+1}))$, gdzie $\varphi = \lambda x.\, x_0(x_1(\ldots x_n(x)\ldots))$. Operacja φ i zmienna x_n mogą być przekazane do T_{n+1} jako parametry, więc napiszemy równanie $Tx\varphi = \lambda y.\, x(Ty(\lambda z.\, \varphi(yz)))(\varphi y)$, które rozwiążemy tak: $T = \mathbf{Y}(\lambda tx\varphi y.\, x(ty(\lambda z.\, \varphi(yz)))(\varphi y)$. Szukany term to $\lambda x.\, Txx$.

2a: $G = \lambda X.\, XP\pi^3_2\pi^2_2\pi^2_2\pi^2_2\mathbf{SK}$, gdzie $P = \lambda pd.\langle p, d\rangle = \lambda pdx.\, xpd$, $\pi^n_k = \lambda x_1 \ldots x_n.\, x_k$.

2b: Oznaczmy przez α_x i α_y poszukiwane typy zmiennych x i y. W przypadku termu M musiałyby one spełniać równania postaci $\alpha_x = \alpha_y \to \alpha_y \to \beta$, $\alpha_x = \alpha_y \to \gamma$, $\alpha_x = \beta \to \gamma \to \delta$. Wynika z nich, że $\gamma = \gamma \to \delta$, co jest niemożliwe w typach prostych. Natomiast term N jest typowalny, bo tu równania są łatwiejsze: $\alpha_x = \alpha_y \to \alpha_y \to \beta$ oraz $\alpha_x = \beta \to \beta \to \delta$. Stąd mamy tylko $\alpha_y = \beta = \delta$ więc N ma na przykład typ $(p \to p \to p) \to p \to p$.

Oba termy są w postaci normalnej, więc są typowalne zarówno w systemie **F** jak i w typach iloczynowych.

3: Term $F = \lambda n.\, \pi^2_1(n(\lambda p.\, \langle \pi^2_2 p, \pi^2_1 p + \pi^2_2 p\rangle)\langle 0, 1\rangle)$ ma typ $\omega_\sigma \to \omega_p$, gdzie $\sigma = (\omega_p \to \omega_p \to \omega_p) \to \omega_p$.
Nie istnieje taki term typu $\omega_p \to \omega_p$, bo ciąg Fibonacciego nie jest wielomianem warunkowym.
(Za szybko rośnie.)

4a: Odwracanie listy zdefiniujemy tak: $R = \lambda \ell.\, \ell L_\tau(\lambda y^\tau \lambda k^{L_\tau}.\, k{+}y)nil$, gdzie $k{+}y = \Lambda p \lambda f x.\, kpf(fyx)$.

4b: Nie. Na przykład jeśli $\tau = \forall r(\forall q(q \to r) \to r)$ (jak w zadaniu 73), to kombinator

$$\Lambda p \lambda f^{\tau \to p \to p} \lambda x^p . f(\Lambda r \lambda y^{\forall q(q \to r)}.\, y(\tau \to p \to p)f)x$$

nie jest listą (bo podterm $\Lambda r \lambda y^{\forall q(q \to r)}.\, y(\tau \to p \to p)f$ ma wolną zmienną f).