

IV WYZNACZNIK

§ 1. Wyznacznik a operacje elementarne.

1. Własności charakteryzujące wyznacznik i ich pierwsze konsekwencje.

Niech dane będą ciało \mathbb{F} i liczba naturalna k ; gdy nie zaznaczono inaczej, rozważane w tym paragrafie macierze są rozmiaru $k \times k$ i mają wyrazy w \mathbb{F} . Naszym najbliższym celem jest udowodnienie poniższego twierdzenia i ustalenie pewnych jego konsekwencji:

Twierdzenie 1 (o istnieniu i charakteryzacji wyznacznika, wersja pierwsza). *Istnieje jedyna funkcja $\det : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{F}$ o następujących własnościach:*

- i) $\det(\mathbf{I}) = 1$;
- ii) *jeśli w macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ do dowolnego wiersza dodamy inny jej wiersz, pomnożony przez skalar, to otrzymamy macierz \mathbf{B} dla której $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$;*
- iii) *jeśli w macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ dowolny wiersz pomnożymy przez skalar c , to otrzymamy macierz \mathbf{B} , dla której $\det(\mathbf{B}) = c \cdot \det(\mathbf{A})$.*

Funkcję tę nazywać będziemy **wyznacznikiem** (po angielsku: „determinant”); skalar $\det(\mathbf{A})$ oznaczany też będzie przez $|\mathbf{A}|$. Wyznacznik odgrywa niezmiernie ważną rolę w algebrze liniowej i geometrii: umożliwia podanie wzorów na rozwiązania pewnych układów równań, odwrotność macierzy, objętość wielowymiarowych wielościanów, iloczyn wektorowy; przy jego pomocy ustalać można równania i znajdować wielomiany dające podstawowe informacje o rozważanych obiektach algebraicznych (np. macierzach) bądź geometrycznych. (Nie wyczerpuje to wszystkich zastosowań, a tylko daje pewien przegląd tych, które są dyskutowane dalej.)

Warunki ii) oraz iii) traktowane są jako implikacje, tzn. zakładamy, że są spełnione dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i każdego skalara; nie odnotowujemy jednak kwantyfikatorów w tych i dalszych podobnych warunkach, by uczynić je zwięźlejszymi. Jednoznaczność wyznacznika, którą udowodnimy w pierwszej kolejności, należy rozumieć tak, że jeśli funkcja $d : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{F}$ spełnia warunki i) – iii) przy \det zastąpionym przez d , to $d(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

Zadanie 1. Niech funkcja d spełnia warunek iii).

- a) Gdy pewien wiersz macierzy \mathbf{A} jest zerowy, to $d(\mathbf{A}) = 0$.
- b) Gdy macierz \mathbf{A} jest diagonalna i $d(\mathbf{I}) = 1$, to $d(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^k a_{ii}$.

Dowód jednoznaczności wyznacznika. Ustalmy funkcje \det i d spełniające żądane warunki i niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$. Doprowadźmy macierz \mathbf{A} do postaci zredukowanej \mathbf{N} ciągiem wierszowych operacji elementarnych typu (I) i (II) (patrz lematy 1 i 2 w §II.1.2). Niech będzie to ciąg $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_s = \mathbf{N}$. Wobec własności (ii) oraz (iii), dla każdego

$i = 2, \dots, s$ istnieje skalar $c_i \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ taki, że

$$d(\mathbf{A}_i) = c_i \cdot d(\mathbf{A}_{i-1}) \quad \text{oraz} \quad \det(\mathbf{A}_i) = c_i \cdot \det(\mathbf{A}_{i-1}).$$

Stąd przy $c := 1 / \prod_i c_i$ zachodzi $c \neq 0$ i

$$d(\mathbf{A}) = c \cdot d(\mathbf{N}) \quad \text{oraz} \quad \det(\mathbf{A}) = c \cdot \det(\mathbf{N})$$

Są tylko dwie możliwości: albo pewien wiersz macierzy \mathbf{N} jest zerowy, i wtedy $d(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{N}) = 0$ na mocy zadania 1, albo $\mathbf{N} = \mathbf{I}$, i wtedy $d(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{N}) = 1$ na mocy własności (i). Zatem zawsze $d(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{N})$ i stąd $d(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$. \square

Wykazaliśmy jedyność funkcji spełniającej żądane warunki; nie dowiedliśmy jednak jej istnienia. Uczynimy to dopiero w §2, a w pierw ustalimy pewne konsekwencje własności i), ii) oraz iii). Do §2.2 zakładamy, że funkcja \det istnieje.

Wniosek 1. *Jeśli funkcja $d : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{F}$ spełnia warunki ii) oraz iii) (lecz niekoniecznie i)), to jest proporcjonalna do wyznacznika, tzn. $d(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot d(\mathbf{I})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.*

Dowód. Przy poprzednich oznaczeniach, $d(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) = 0$ gdy $\mathbf{N} \neq \mathbf{I}$, a w przeciwnym razie $d(\mathbf{A}) = c \cdot d(\mathbf{I})$ i $\det(\mathbf{A}) = c$. Stąd $d(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot d(\mathbf{I})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

Ponadto, prawdziwe są następujące ważne twierdzenia:

Twierdzenie 2. *Macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(\mathbf{A}) = 0$.*

Dowód. Jak wykazaliśmy, $(\det(\mathbf{A}) = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{N} \neq \mathbf{I})$, gdzie \mathbf{N} jest postacią zredukowaną macierzy \mathbf{A} .

Twierdzenie 3 (Cauchy'ego). $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$.

Dowód. Ustalmy \mathbf{B} i niech $d(\mathbf{A}) := \det(\mathbf{AB})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$. Wówczas $d(\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B})$, więc na mocy wniosku 1 pozostaje dowieść, że funkcja d ma własności ii) oraz iii).

Jednak gdy wykonanie danej wierszowej operacji prowadzi od \mathbf{A} do \mathbf{A}' , to prowadzi też od \mathbf{AB} do $\mathbf{A}'\mathbf{B}$ – bo dla dowolnej macierzy $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_k$ prowadzi od \mathbf{X} do \mathbf{EX} , gdzie $\mathbf{E} \in \mathcal{M}_k$ nie zależy od \mathbf{X} , zaś $\mathbf{E}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{EA})\mathbf{B} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$. (Patrz §II.4.3.) Powoduje to, że gdy operacja jest typu (I), to $d(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB}) = d(\mathbf{A})$, a gdy jest pomnożeniem pewnego wiersza przez c , to w ten sam sposób $d(\mathbf{A}') = c \cdot d(\mathbf{A})$.

Wniosek 2. *Gdy \mathbf{A} jest macierzą nieosobliwą, to $\det(\mathbf{A}^{-1}) \det(\mathbf{A}) = 1$. \square*

Zakończmy ten punkt dowodząc dalszych dwóch własności wyznacznika.

Stwierdzenie 1. Funkcja \det ma też następujące własności:

iv) jeśli w macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ zamienimy miejscami dwa wiersze, to otrzymamy macierz \mathbf{B} , dla której $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$;

v) jeśli macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ ma dwa wiersze takie same, to $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Dowód. Ad *iv)*. Załóżmy dla prostoty, że zamieniane są wiersze o numerach 1 i 2. Ciąg operacji $\mathbf{A} \xrightarrow{[1]+[2]} \mathbf{A}_1 \xrightarrow{[2]-[1]} \mathbf{A}_2 \xrightarrow{[1]+[2]} \mathbf{A}_3$ prowadzi od \mathbf{A} do macierzy różniacej się od \mathbf{B} tylko znakiem drugiego wiersza. Z własności *ii)* oraz *iii)* wynika więc, że $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_3) = -\det(\mathbf{B})$.

Ad *v)*. Odejmijmy jeden z rozważanych wierszy od drugiego; otrzymamy macierz \mathbf{A}' o wierszu zerowym. Stąd $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}') = 0$ na mocy zadania 1 i własności *ii)*. \square

Zadanie 2. a) Wykonując kilkakrotnie operację dodawania do wiersza krotności innego, uzyskać zmianę znaku dwóch wierszy rozważanej macierzy.

b) Czy można w ten sposób zamienić miejscami dwa wiersze macierzy jednostkowej? Zmienić znak jednego jej wiersza? (Odpowiedź zależy od tego, czy $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}}$.)

2. Wyznacznik macierzy trójkątnej lub transponowanej.

Twierdzenie 1. Wyznacznik trójkątnej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ jest równy $\prod_{i=1}^k a_{ii}$.

Dowód. Wobec zadania 1 z p.1 wystarczy macierz \mathbf{A} przeprowadzić operacjami wierszowymi typu (I) w taką, która ma niezmienną przekątną i jest diagonalna lub ma pewien wiersz zerowy. Wykorzystamy do tego indukcję względem k . Gdy macierz \mathbf{A} jest dolnie trójkątna, to dla $a_{11} = 0$ nie ma czego dowodzić, a dla $a_{11} \neq 0$ odejmujemy odpowiednie wielokrotności wiersza 1 od pozostałych, uzyskując $a'_{i1} = 0$ dla $i > 1$, po czym stosujemy założenie indukcyjne do klatki powstałej z \mathbf{A}' przez wykreślenie pierwszego wiersza i kolumny. Gdy macierz \mathbf{A} jest górnio trójkątna należy wyżej a_{11} zastąpić przez a_{kk} , a pierwszą kolumnę i wiersz przez ostatnie. \square

Sprawdźmy, jak wykonanie operacji kolumnowej typu (I) wpływa na wyznacznik.

Lemat 1. Jeśli w macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ do pewnej kolumny dodamy do innej, pomnożoną przez skalar, to otrzymamy macierz \mathbf{B} , dla której $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Dowód. Mamy $\mathbf{B} = \mathbf{AE}$, gdzie \mathbf{E} oznacza macierz powstałą przez wykonanie rozważanej operacji na macierzy \mathbf{I} . (Patrz twierdzenie 1b) w §II.4.3.) Jest widoczne, że macierz \mathbf{E} jest trójkątna i ma wyłącznie jedynki na przekątnej. Stąd $\det(\mathbf{E}) = 1$ i ostatecznie $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A})$ na mocy twierdzenia Cauchy'ego. \square

Twierdzenie 2. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^t)$ dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

Dowód. Dla macierzy trójkątnej żądana równość wynika z twierdzenia 1.

W ogólnym przypadku przeprowadźmy \mathbf{A} w macierz schodkową \mathbf{B} przy pomocy ciągu elementarnych operacji wierszowych typu (I); odpowiadający mu ciąg operacji kolumnowych przeprowadza \mathbf{A}^t w \mathbf{B}^t . Z własności ii) i lematu wynika więc, że $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ i $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{B}^t)$, a z powyższego przypadku szczególnego – że $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}^t)$. (Zauważmy, że macierz schodkowa jest trójkątna.) Stąd teza. \square

Wyznacznik macierzy obliczyć więc można przez sprowadzenie jej operacjami wierszowymi lub kolumnowymi do postaci schodkowej.

Przykład 1. Niech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. By obliczyć $\det(\mathbf{A})$, doprowadzimy \mathbf{A} do postaci schodkowej, uwzględniając przy każdej operacji własności ii) – v):

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \\ &= 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 16,5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 16,5 = 66. \quad \square \end{aligned}$$

Podkreślmy, że wszystkie udowodnione rezultaty mają w tej chwili jedynie warunkowy charakter: jeśli funkcja o własnościach i), ii) oraz iii) istnieje, to ma i dalsze wymienione własności, a jej wartość obliczyć można w opisany sposób. Zaradzimy tej warunkowości dopiero dowodząc istnienia wyznacznika.

Zadanie 1. Gdy klatki \mathbf{P} i \mathbf{Q} są kwadratowe, a jedna z klatek \mathbf{X} , \mathbf{Y} jest zerowa, to wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{X} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ jest równy iloczynowi $\det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{Q})$. (Wskazówka: gdy $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ sprowadzić klatki \mathbf{P} i \mathbf{Q} do postaci schodkowej operacjami typu (I). Gdy $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ przejść do macierzy transponowanej.)

Zadanie uzupełniające 1. Niech funkcja $d : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{F}$ będzie **multymplikatywna** (czyli taka, że $d(\mathbf{AB}) = d(\mathbf{A}) \cdot d(\mathbf{B})$ dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$). Dowieść, że jeśli $d(\mathbf{A}) = \prod_i a_{ii}$ dla trójkątnych macierzy \mathbf{A} , to $d = \det$. (Wskazówka: macierze elementarne.)

Problem 1. a) Nadal, niech funkcja $d : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{F}$ będzie multymplikatywna. Dowieść istnienia takiej multymplikatywnej funkcji $\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, że $d = \varphi \circ \det$.

b) Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dowieść, że jeśli powyższa funkcja φ jest ciągła, to jest zerowa lub dla pewnego $\alpha > 0$ jest postaci $t \mapsto |t|^\alpha$ lub $t \mapsto |t|^\alpha \text{Sgn}(t)$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.3.3, §I.3.5, §I.3.7.

§ 2. Istnienie wyznacznika. Wyznacznik jako wieloliniowa i alternująca funkcja wierszy macierzy.

1. Dygresja o funkcjach antysymetrycznych, wieloliniowych i alternujących.

Niekiedy wygodnie będzie na \det patrzeć jako na funkcję układu wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{F}^k$, określoną tak: $\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \det(\mathbf{A})$, gdzie \mathbf{A} to macierz o pierwszym wierszu \mathbf{v}_1 , drugim \mathbf{v}_2 , itd. Mówimy też wtedy, że wyznacznik traktujemy jako funkcję wierszy macierzy. (Wiersze są elementami przestrzeni $X := \mathbb{F}^k$.) By nazwać własności tej funkcji wprowadzimy dwie definicje.

Definicja. Niech $X^k = X \times X \times \dots \times X$ oznacza iloczyn kartezjański k egzemplarzy pewnego zbioru X . O funkcji $f : X^k \rightarrow \mathbb{F}$ powiemy, że jest:

alternująca, jeśli $f(x_1, \dots, x_k) = 0$ dla każdego ciągu $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$, mającego dwa wyrazy równe (tzn. takiego, że $x_i = x_j$ dla pewnych $i \neq j$),

antysymetryczna, jeśli $f(x_1, \dots, x_k) = -f(x'_1, \dots, x'_k)$ dla każdego ciągów $(x_i)_{i=1}^k, (x'_i)_{i=1}^k \in X^k$, z których jeden otrzymano przez zamianę w drugim dwóch wyrazów miejscami.

Wniosek 1. *Wyznacznik jest antysymetryczną i alternującą funkcją wierszy macierzy.*

Dowód. Mówią o tym własności (iv) i (v). \square

Definicja. Niech V będzie przestrzenią wektorową. Funkcję $f : V^k \rightarrow \mathbb{F}$ nazwiemy **wieloliniową** (lub: **k -liniową**, gdy zaznaczyć chcemy wartość k), jeśli jest ona liniowa względem każdego argumentu przy ustalonych pozostałych, tzn. jeśli dla $i \leq k$ i $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k \in V$, funkcja

$$\phi(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k) \text{ dla } \mathbf{v} \in V$$

spełnia warunek

$$\phi(\mathbf{u} + c\mathbf{w}) = \phi(\mathbf{u}) + c\phi(\mathbf{w}) \text{ dla wszystkich } \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V \text{ i } c \in \mathbb{F}.$$

Stwierdzenie 1. *Funkcja $d : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{F}$, która jest wieloliniowa i alternująca jako funkcja wierszy macierzy, spełnia też warunki (ii) oraz (iii).*

Dowód. Warunek (iii) wynika z wieloliniowości. By dowieść (ii) oznaczmy kolejne wiersze macierzy \mathbf{A} przez $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ i niech \mathbf{B} będzie macierzą otrzymaną z \mathbf{A} przez dodanie c -krotności jej wiersza \mathbf{a}_s do wiersza \mathbf{a}_t . Przyjmując dla prostoty oznaczeń $s = 1, t = 2$ uzyskujemy

$$d(\mathbf{a}_1, c\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k) = c \cdot d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k) + d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k) = d(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k),$$

co oznacza żadaną równość $d(\mathbf{B}) = d(\mathbf{A})$. \square

Zadanie 1. Jeśli $2_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$ i funkcja $f : X^k \rightarrow \mathbb{F}$ jest antysymetryczna, to jest alternująca.

Zadanie 2. By funkcja $f : X^k \rightarrow \mathbb{F}$ była antysymetryczna wystarczy, by spełniała warunek definiujący te funkcje, lecz ze słowami „dwóch wyrazów” zastąpionymi przez „kolejnych dwóch wyrazów”.

Nasz dalszy plan jest taki, by istnienia wyznacznika dowieść w oparciu o stwierdzenie 1. Najpierw jednak musimy dowieść istnienia jakiegokolwiek niezerowej funkcji antysymetrycznej k zmiennych.

Lemat 1. Niech $X = \{1, \dots, k\}$ i $u_0(x_1, \dots, x_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i)$ dla $x_1, \dots, x_k \in X$. Wówczas $u_0 : X^k \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją antysymetryczną.

Dowód. Wobec zadania 2 wystarczy dowieść, że gdy (x'_i) otrzymano z (x_i) przez zamianę x_s z x_{s+1} , to $u_0(x'_1, \dots, x'_k) = -u_0(x_1, \dots, x_k)$. Nietrudno jednak zauważyć, że liczba ujemnych różnic $x'_j - x'_i$ ($i < j$) o jeden różni się od liczby takich różnic $x_j - x_i$. \square

Wykorzystamy też to, jak permutowanie argumentów zmienia wartość funkcji antysymetrycznej.

Definicja. **Permutacją** zbioru X nazywamy każde różnowartościowe przekształcenie zbioru X na X . Zbiór wszystkich permutacji zbioru X oznaczamy przez \mathbf{S}_X , a gdy $X = \{1, \dots, n\}$ – przez \mathbf{S}_n . Permutacje $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_X$ możemy składać: $(\sigma \circ \tau)(x) := \sigma(\tau(x))$ dla $x \in X$, przy czym często zamiast $\sigma \circ \tau$ piszemy $\sigma\tau$, a złożenie permutacji nazywamy ich iloczynem.

Permutację $\sigma \in \mathbf{S}_X$ nazywamy **cyklem długości** s , jeśli istnieją różne elementy $x_1, \dots, x_s \in X$ takie, że σ działa następująco: $x_1 \mapsto x_2 \mapsto \dots \mapsto x_s \mapsto x_1$ oraz $x \mapsto x$ dla $x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_s\}$. Piszemy wtedy $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_s)$; gdy $s = 2$, cykl nazywamy **transpozycją**. Okazuje się, że każda permutacja skończonego zbioru jest iloczynem cykli, a cykl długości s – iloczynem $s - 1$ transpozycji.

Zadanie 3. Udowodnić to.

Twierdzenie 1. Istnieje jedyna funkcja $\text{Sgn} : \mathbf{S}_n \rightarrow \{+, -\}$ taka, że dla każdej permutacji $\sigma \in \mathbf{S}_n$ i każdej funkcji antysymetrycznej $u : X^n \rightarrow \mathbb{F}$ zachodzi równość

$$u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \text{Sgn}(\sigma)u(x_1, \dots, x_n) \quad \text{dla } x_1, \dots, x_n \in X. \quad (1)$$

Ponadto, $\text{Sgn}(\sigma) = (-1)^s$ gdy σ jest złożeniem s transpozycji.

Dowód. Niech permutacja $\sigma \in \mathbf{S}_n$ będzie złożeniem s transpozycji. Dla każdej antysymetrycznej funkcji $u : X^n \rightarrow \mathbb{F}$ otrzymujemy wtedy

$$u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^s u(x_1, \dots, x_n) \quad \text{dla } x_1, \dots, x_n \in X. \quad (2)$$

Czynnik $(-1)^s$ po prawej stronie jest niezależny od rozważanej funkcji u ; traktujemy go przy tym jako odpowiedni znak \pm , niezależny i od ciała \mathbb{F} .

Obierzmy więc za u funkcję u_0 z lematu 1. Ponieważ liczba $c = u_0(1, 2, \dots, k)$ jest niezerowa, więc otrzymana równość $(-1)^s c = u_0(\sigma(1), \dots, \sigma(k))$ dowodzi, że znak $(-1)^s$ zależy tylko od permutacji σ , a nie od reprezentacji σ w postaci iloczynu transpozycji. \square

Wniosek 2. *Gdy $\sigma \in \mathbf{S}_n$ jest iloczynem cykli długości k_1, \dots, k_p , odpowiednio, to $\text{Sgn}(\sigma) = (-1)^{p + \sum_{i=1}^p k_i}$.*

Dowód. σ jest złożeniem s transpozycji dla $s = \sum_{i=1}^p (k_i - 1)$, patrz zadanie 3.

Twierdzenie 2. $\text{Sgn}(\sigma\tau) = \text{Sgn}(\sigma)\text{Sgn}(\tau)$ dla $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_n$, i analogicznie dla iloczynu większej liczby permutacji. W szczególności, $\text{Sgn}(\sigma^{-1}) = \text{Sgn}(\sigma)$.

Dowód. Niech σ będzie złożeniem s transpozycji, a τ złożeniem t transpozycji. Wówczas $\sigma\tau$ jest złożeniem $s + t$ transpozycji, skąd $\text{Sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{s+t} = (-1)^s(-1)^t = \text{Sgn}(\sigma)\text{Sgn}(\tau)$. Dla $\tau := \sigma^{-1}$ daje to równość $\text{Sgn}(\sigma^{-1}) = \text{Sgn}(\sigma)$, bo $\text{Sgn}(\sigma) = \pm 1$ i $\text{Sgn}(1) = +1$. \square

Zadanie uzupełniające 1. Gdy wieloliniowa funkcja $f : V^k \rightarrow \mathbb{F}$ spełnia warunek $f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = 0$ dla ciągów $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k \in V^k$ mających dwa kolejne wyrazy równe, to jest ona alternująca i antysymetryczna.

Zadanie uzupełniające 2. **Przestawieniem** dla permutacji $\sigma \in \mathbf{S}_n$ nazywamy każdą parę liczb (i, j) taką, że $1 \leq i < j \leq n$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$. Dowieść, że $\text{Sgn}(\sigma) = (-1)^p$, gdzie p to liczba przestawień dla σ .

Zadanie uzupełniające 3. Niech permutacja $\pi \in \mathbf{S}_{k+l}$ przeprowadza liczby $1, \dots, k$ odpowiednio na $l+1, \dots, l+k$, a $k+1, \dots, k+l$ na $1, \dots, l$. Dowieść, że $\text{Sgn}(\pi) = (-1)^{kl}$.

2. Istnienie wyznacznika i jego nowa charakteryzacja.

Przejdźmy do dowodu istnienia funkcji \det z p.1.

Ustalmy funkcję $f : X^k \rightarrow \mathbb{F}$, gdzie X jest dowolnym zbiorem i $k \in \{2, 3, \dots\}$, i niech

$$F(x_1, \dots, x_k) := \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \text{Sgn}(\pi) f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}) \text{ dla } x_1, \dots, x_k \in X. \quad (3)$$

Oczywiście F jest funkcją z X^k do \mathbb{F} , a także $F = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \text{Sgn}(\pi) \cdot (f \circ \tilde{\pi})$, gdzie dla $\pi \in \mathbf{S}_k$ definiujemy bijekcję $\tilde{\pi} : X^k \rightarrow X^k$ wzorem $\tilde{\pi}(x_1, \dots, x_k) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)})$.

Przykład 1. Gdy $k = 2$, to $F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - f(x_2, x_1)$.

Zadanie 1. $\tilde{\pi} : V^k \rightarrow V^k$ jest bijekcją i dla $\pi, \sigma \in \mathbf{S}_k$ zachodzi $\widetilde{\pi\sigma} = \tilde{\pi} \circ \tilde{\sigma}$.

Twierdzenie 1. Wzór (3) definiuje antysymetryczną i alternującą funkcję $F : X^k \rightarrow \mathbb{F}$.

Dowód. By dowieść antysymetrii zauważamy, że pisząc dla krótkości ε_π w miejsce $\text{Sgn}(\pi)$ mamy dla $\sigma \in \mathbf{S}_k$:

$$F \circ \tilde{\sigma} = \left(\sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \varepsilon_\pi \cdot (f \circ \tilde{\pi}) \right) \circ \tilde{\sigma} = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \varepsilon_\pi \cdot (f \circ \tilde{\pi} \circ \tilde{\sigma}) = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \varepsilon_{\sigma^{-1}} \cdot \varepsilon_{\pi\sigma} \cdot (f \circ \tilde{\pi\sigma})$$

Zastępując $\pi \circ \sigma$ przez τ pod znakiem sumy stwierdzamy, że $F \circ \tilde{\sigma} = \varepsilon_\sigma \cdot F$, co oznacza antysymetrię funkcji F .

Gdy $2_{\mathbb{F}} \neq 0_F$, to z antysymetrii wynika już, że funkcja F jest alternująca; patrz zad. 1 w p.1. Dla zainteresowanych podamy dowód, słuszny i gdy $2_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$. Niech $x = (x_i)_{i=1}^k \in V^k$ będzie ciągiem takim, że $x_s = x_t$ dla pewnych $s < t$, i niech τ oznacza transpozycję (s, t) . Przy \mathbf{S}_k^\pm oznaczającym zbiór permutacji odpowiedniego znaku mamy wtedy $\pi \in \mathbf{S}_k^+ \Leftrightarrow \pi \circ \tau \in \mathbf{S}_k^-$, skąd

$$F(x) = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k^+} f(\tilde{\pi}(x)) - \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k^+} f(\tilde{\pi} \circ \tilde{\tau}(x)) = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k^+} f(\tilde{\pi}(x)) - \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k^+} f(\tilde{\pi}(x)) \quad (\text{bo } \tilde{\tau}(x) = x).$$

Tak więc $F(x_1, \dots, x_k) = 0$ jeśli $x_s = x_t$ dla pewnych $s < t$, co kończy dowód. \square

Uwaga 1. Gdy $X = V$ jest przestrzenią liniową i funkcja $f : V^k \rightarrow \mathbb{F}$ jest wieloliniowa, to i funkcja $F : V^k \rightarrow \mathbb{F}$ jest taka. Wynika to stąd, że jest ona kombinacją wieloliniowych funkcji $f \circ \tilde{\pi}$.

Potraktujmy teraz funkcję $\mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{F}$, zadaną wzorem $f(\mathbf{A}) := a_{11}a_{22}\dots a_{kk}$, jako funkcję wierszy macierzy – a więc jako funkcję z V^k do \mathbb{F} , gdzie $V = \mathbb{F}^k$. Oczywiście, jest ona liniowa ze względu na każdy z wierszy, przy ustalonych pozostałych. Odpowiadająca jej funkcja F jest zadaną wzorem

$$\mathbf{A} \mapsto \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \text{Sgn}(\pi) a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(k)k} \quad \text{dla } \mathbf{A} \in \mathcal{M}_k \quad (4)$$

Z powyższego wynika, że jako funkcja wierszy macierzy jest ona wieloliniowa i alternująca; ponadto, $F(\mathbf{I}) = 1$ (dlaczego?). Wobec stwierdzenia 1 w p.1, wzór (4) można więc przyjąć jako definicję wyznacznika. Wzór ten nazywamy **pełnym rozwinięciem wyznacznika**.

Uwaga 2. Tym samym, zakończony został dowód twierdzenia 1 z p.1. Okazało się też, że prócz własności rozważanych w §1.1, wyznacznik ma następującą własność, wynikającą z jego liniowości ze względu na każdy wiersz, przy ustalonych pozostałych:

vi) jeśli, dla pewnego i , wiersz i -ty macierzy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ jest sumą i -tych wierszy macierzy \mathbf{A} i \mathbf{A}' , a poza tym wierszem macierze \mathbf{A} , \mathbf{A}' i \mathbf{B} są równe, to $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{A}'|$.

a) istnieją liczby $a \neq b$ takie, że $a_{ij} = a$ gdy $i = j$ i $a_{ij} = b$ w przeciwnym razie, przy czym $a \neq b(1 - k)$;

a) a_{ij} jest liczbą całkowitą nieparzystą gdy $i = j$, a parzystą w przeciwnym razie;

b) a_{ij} jest liczbą całkowitą parzystą gdy $i = j$, a nieparzystą w przeciwnym razie, przy czym liczba k jest parzysta.

2. a) Niech funkcje $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) posiadają pochodne $f_i^{(j)}$ aż do rzędu $n - 1$. Udowodnić, że jeśli funkcje te są liniowo zależne, to wyznacznik macierzy o kolumnach $(f_1^{(j)}(t), \dots, f_n^{(j)}(t))$ ($j = 0, \dots, n - 1$) jest równy 0, dla każdego $t \in \mathbb{R}$. (Tu $f_i^{(0)} := f_i$. Wyznacznik ten nazywany jest **wrońskianem** funkcji f_1, \dots, f_n , od M. Hoehne–Wrońskiego, polskiego matematyka z połowy 19 w.)

b) Wykorzystać to do dowodu niezależności funkcji e^x, e^{2x}, e^{3x} .

3. Gdy \mathbf{P} i \mathbf{Q} są rzeczywistymi macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$ jest równy $|\det(\mathbf{P} + \mathbf{Q}i)|^2$. (Wskazówka: przy pomocy

wierszowych i kolumnowych operacji typu (I), przeprowadzić macierz $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$ w $\begin{bmatrix} \mathbf{P} + \mathbf{Q}i & \mathbf{P}i - \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$, a tę w $\begin{bmatrix} \mathbf{P} + \mathbf{Q}i & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} - \mathbf{Q}i \end{bmatrix}$.)

4. Zbadać, dla jakich k istnieją macierze $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ takie, że każdy składnik $\text{Sgn}(\pi)a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(k)k}$ sumy we wzorze (4) jest dodatni.

5. Gdy $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$, to twierdzenie 2 zostanie słuszne po zmianie warunku (v) na (iv); wynika to z zadania 1 w p.1.

Dla $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ podać przykład różnej od wyznacznika funkcji $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$, która jest antysymetryczna, unormowana i wieloliniowa.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.3.2, §I.1.3.

§ 3. Rozwinięcia wyznacznika.

W dalszej części, wyznacznik macierzy \mathbf{A} będziemy wymiennie oznaczać przez $\det(\mathbf{A})$ i $|\mathbf{A}|$.

1. Rozwinięcie Laplace'a.

Niejednokrotnie będziemy mieli do czynienia z wyznacznikami kwadratowych podmacierzy rozważanej macierzy; nazywamy je jej **minorami**. Na minor przenosimy nazwy dotyczące się podmacierzy, której jest wyznacznikiem. (Mówimy więc o stopniu czy rozmiarze minora, o tym, przez jakie wiersze i kolumny jest wyznaczony, itp.) W

tym punkcie ustalone będą związki pomiędzy wyznacznikiem macierzy a pewnymi jej minorami.

Definicja. Niech $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_k$. **Macierzą dopełniającą** wyrazu a_{ij} nazywamy macierz, otrzymaną z \mathbf{A} przez wykreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny. Macierz tę oznaczamy \mathbf{A}_{ij} .

Twierdzenie 1 (Laplace'a). *Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ i $n = 1, \dots, k$ prawdziwe są wzory:*

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^k (-1)^{n+j} a_{nj} |\mathbf{A}_{nj}| \quad \text{oraz} \quad |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+n} a_{in} |\mathbf{A}_{in}|$$

Dowód. Druga równość wynika z pierwszej, gdy odnieść ją do macierzy $\mathbf{C} := \mathbf{A}^t$. (Jest tak, bo $c_{in} = a_{ni}$, $|\mathbf{C}_{in}| = |\mathbf{A}_{ni}^t| = |\mathbf{A}_{ni}|$ i $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|$; patrz twierdzenie 2 w §1.2.) Zajmiemy się więc tylko pierwszą równością.

Niech wpraw $n = 1$ i wiersz pierwszy ma tylko jeden wyraz niezerowy, powiedzmy s -ty. Żądana równość wtedy sprowadza się do następującej: $|\mathbf{A}| = (-1)^{1+s} a_{1s} |\mathbf{A}_{1s}|$. Gdy $s = 1$, to ta ostatnia wynika z zadania 1 w §1.2. Gdy $s > 1$, to stosujemy indukcję, zamieniając kolumnę s -tą z poprzedzającą. Otrzymamy macierz \mathbf{A}' taką, że $|\mathbf{A}'| = -|\mathbf{A}|$ i $\mathbf{A}'_{1\ s-1} = \mathbf{A}_{1s}$; pozostaje więc do niej zastosować założenie indukcyjne.

Gdy zaś nadal $n = 1$, lecz pierwszy wiersz jest dowolny, to przedstawiamy go w postaci $\sum_s a_{1s} \mathbf{e}_s$ i wykorzystujemy liniowość wyznacznika względem pierwszego wiersza, przy ustalonych pozostałych. Otrzymujemy $|\mathbf{A}| = \sum_{s=1}^k |\mathbf{A}_s|$, gdzie macierz \mathbf{A}_s powstaje z \mathbf{A} przez zastąpienie jej pierwszego wiersza wierszem $a_{1s} \mathbf{e}_s$. Stosując do \mathbf{A}_s udowodnioną tożsamość uzyskujemy żadaną równość $|\mathbf{A}| = \sum (-1)^{1+s} a_{1s} |\mathbf{A}_{1s}|$.

Wreszcie gdy $n > 1$, to podobnie wykorzystujemy indukcję, zamieniając wiersz n -ty z poprzedzającym i korzystając z tego, że otrzymana macierz \mathbf{B} spełnia warunki $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$ oraz $\mathbf{B}_{n-1\ j} = \mathbf{A}_{n\ j}$ dla $j = 1, \dots, k$. Tak więc $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}| = -\sum_{i=1}^k (-1)^{i+n-1} a_{in} |\mathbf{A}_{in}|$, co kończy dowód. \square

Wzory powyższe nazywane są **rozwinięciami Laplace'a** wyznacznika wzdłuż n -tego wiersza (pierwszy wzór) bądź n -tej kolumny (drugi wzór).

Przykład 1. Obliczymy wyznacznik stosując rozwinięcie według pierwszego wiersza:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 42 = 48.$$

Moglibyśmy zastosować rozwinięcie względem innego wiersza lub dowolnej kolumny. Wybierając kolumnę drugą otrzymujemy podobnie:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 42 = 48. \quad \square$$

W przypadku macierzy o dostatecznie regularnej budowie można wykorzystać rozwinięcie Laplace'a do uzyskania rekurencyjnych zależności pomiędzy wyznacznikami macierzy różnych stopni. Rozpatrzmy dwa przykłady.

Przykład 2. Ustalmy ciąg x, c_1, c_2, \dots elementów \mathbb{F} i niech \mathbf{A}_n oznacza $n \times n$ macierz, której pierwszym wierszem jest $x\mathbf{e}_1 + c_n\mathbf{e}_n$, drugim $-\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + c_{n-1}\mathbf{e}_n$, trzecim $-\mathbf{e}_2 + x\mathbf{e}_3 + c_{n-2}\mathbf{e}_n$, i tak dalej aż do wiersza n -tego, którym jest $-\mathbf{e}_{n-1} + (x + c_1)\mathbf{e}_n$. N.p.:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & c_4 \\ -1 & x & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & x & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & x + c_1 \end{pmatrix}.$$

W celu obliczenia $|\mathbf{A}_n|$ wykorzystamy rozwinięcie wzdłuż pierwszego wiersza. Oznaczmy chwilowo \mathbf{A}_n przez \mathbf{B} . Oczywiście, $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{A}_{n-1}$, zaś \mathbf{B}_{1n} jest macierzą trójkątną mającą wyłącznie wyrazy -1 na przekątnej. Wobec tego

$$|\mathbf{A}_n| = x|\mathbf{A}_{n-1}| + (-1)^{n+1}c_n(-1)^{n-1} = x|\mathbf{A}_{n-1}| + c_n.$$

Stąd przez indukcję nietrudno dowieść, że $|\mathbf{A}_n| = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_{n-1}x + c_n$.

Przykład 3. Wyliczymy **wyznacznik Vandermonde'a**

$$V(x_0, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

W tym celu poczynając od przedostatniej, a kończąc na pierwszej, mnożymy każdą kolumnę przez x_0 i odejmujemy od następnej. Ponieważ żadna z tych operacji nie zmienia wartości wyznacznika, więc

$$V(x_0, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_1x_0 & \dots & x_1^n - x_1^{n-1}x_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_nx_0 & \dots & x_n^n - x_n^{n-1}x_0 \end{pmatrix}.$$

Rozwińmy ten wyznacznik wzdłuż pierwszego wiersza, a następnie zastosujmy wielokrotnie własność *iii*) z p.1. Otrzymamy

$$V(x_0, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \dots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_1 & \dots & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) V(x_1, \dots, x_n)$$

Stąd przez łatwą indukcję $V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$. \square

Nierzadko podobną rekurencję można jednak uzyskać innymi metodami.

Przykład 4. * Ponownie zajmiemy się wyznacznikiem Vandermonde'a. Przy ustalonych x_0, \dots, x_n jest on wielomianem zmiennej x_n , stopnia n , przyjmującym wartość 0 gdy $x_n \in \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Stąd $V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)W_0$, gdzie W_0 nadal jest wielomianem zmiennej x_n , zależnym jednak od x_0, \dots, x_{n-1} . (Zakładamy dla uproszczenia, że $x_i \neq x_j$ dla $i < j < n$.) Porównanie stopni obu stron pokazuje, że stopień wielomianu W_0 wynosi zero; jest on więc stałą, zależną od x_0, \dots, x_{n-1} . Założmy (bo nie umiemy obecnie udowodnić), że zależność ta jest wielomianowa. Traktując wtedy x_{n-1} jako zmienną, przy ustalonych x_0, \dots, x_{n-2}, x_n stwierdzimy podobnie, że $W_0 = \prod_{i=0}^{n-2} (x_{n-1} - x_i)W_1$, gdzie W_1 jest wielomianem zmiennych x_0, \dots, x_{n-2} , aż dojdziemy do udowodnionego w przykładzie 3 wzoru, z dokładnością jednak do pomnożenia prawej strony przez stałą (odpowiadającą wielomianowi W_n). Stałą tę można wyznaczyć porównując n.p. współczynniki obu stron przy x_n^n , gdy obie strony traktować jako wielomiany zmiennej x_n , przy ustalonych pozostałych. W ten sposób znaleźliśmy szukany wzór, co przy rozumowaniach indukcyjnych nie zawsze jest proste.

Zadania uzupełniające. (Jak przykład 4, zadania 1–3 wzorowane są na anonimowych metrialach z M.I.T.)

1. Udowodnić wzór Cauchy'ego: $\det (1/(x_i + y_j))_{i,j=1}^k = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i)(y_j - y_i) / \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_i + y_j)$.
2. * W tym zadaniu oznaczamy przez \mathbf{A}_{ST} klatkę macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$, powstałą z \mathbf{A} przez wykreślenie wierszy o numerach ze zbioru S i kolumn ze zbioru T . Udowodnić za Lewisem Carollem (tym od „Alicji”), że $|\mathbf{A}| |\mathbf{A}_{\{i,j\}\{i,j\}}| = |\mathbf{A}_{ii}| |\mathbf{A}_{jj}| - |\mathbf{A}_{ij}| |\mathbf{A}_{ji}|$.
3. * Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ będzie macierzą, której wyraz a_{ij} jest równy x_j gdy $j < i$ i y_j gdy $j \geq i$. Kierując się przykładem 4 znaleźć wzór na $\det(\mathbf{A})$ i udowodnić go indukcyjnie.
4. Udowodnić, że wszystkie wyrazy macierzy kwadratowej \mathbf{A} zwiększyć o x , to jej wyznacznik zmniejszy się o $x|\mathbf{B}|$, gdzie \mathbf{B} to macierz powstała z \mathbf{A} przez dopisanie pierwszego wiersza $\mathbf{v} = (0, 1, \dots, 1)$ i pierwszej kolumny $-\mathbf{v}$. (Wskazówka: obliczyć dwoma sposobami wyznacznik macierzy, powstałej z \mathbf{A} przez rozszerzenie jej o wiersz i kolumnę, równe $(1/x, 1, \dots, 1)$ i $(1/x, -1, \dots, -1)$, odpowiednio.)

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.3.4, §I.3.6.

2. Wyznacznik a układy równań liniowych i odwrotność macierzy.

Zacniemy od przeformułowania twierdzenia 2 w §1.1:

Wniosek 1. Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ układ jednorodny $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy ma niezerowe rozwiązanie, gdy $|\mathbf{A}| = 0$.

Przejdźmy do niejednorodnych układów równań.

Twierdzenie 1. *Rozważmy układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$, $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$. Jeśli $|\mathbf{A}| \neq 0$, to układ ten posiada jedyne rozwiązanie $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$, i zadane jest ono następującymi wzorami Cramera:*

$$v_j = \frac{1}{|\mathbf{A}|} |\mathbf{B}_j| \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (5)$$

gdzie \mathbf{B}_j jest macierzą powstałą z \mathbf{A} przez zastąpienie jej j -tej kolumny wektorem kolumnowym \mathbf{b} .

Dowód. Na mocy twierdzenia 2 w §1.1 macierz \mathbf{A} jest nieosobliwa, skąd rozważany układ ma jedyne rozwiązanie. Oznaczmy je przez \mathbf{v} , a kolumny macierzy \mathbf{A} przez $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Równanie $x_1(v_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}) + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ ma niezerowe rozwiązanie $(1, v_2, \dots, v_k)$, wobec czego wyznacznik macierzy o kolumnach $v_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ jest równy 0. Z „kolumnowych” odpowiedników własności vi) oraz ii) wynika więc, że $v_1|\mathbf{A}| - |\mathbf{B}_1| = 0$. Tak samo, $v_j|\mathbf{A}| - |\mathbf{B}_j| = 0$ dla $j = 2, \dots, k$. \square

Przykład 1. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Rozwijając poniżej licznik i mianownik względem pierwszych kolumn otrzymujemy:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1}$$

Ponieważ wyznacznik macierzy rozważanego układu równań okazał się różny od zera, więc rozwiązanie (v_1, v_2, v_3) istnieje i jest jedyne, a $v_1 = 1$. (Dla układów, których macierz ma zerowy wyznacznik, zastosowanie wzorów Cramera prowadzi do nonsensownych wyrażeń o mianowniku 0. Rozwiązanie nadal może istnieć, lecz nie jest wtedy jedyne i opis zbioru rozwiązań uzyskujemy stosując metody opisane w rozdziale II.)

Twierdzenie 2. *Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$. Dla macierzy \mathbf{D} , której (i, j) -tym wyrazem jest $(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$ (i oraz j przebiegają $\{1, \dots, k\}$), prawdziwe są równości:*

$$\mathbf{AD}^t = \mathbf{D}^t\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_k.$$

W szczególności, jeśli $|\mathbf{A}| \neq 0$, to macierz \mathbf{A} jest odwracalna i $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{D}^t$.

Dowód. Obliczmy (i, j) -ty wyraz macierzy $\mathbf{X} := \mathbf{A}\mathbf{D}^t$:

$$x_{ij} = \sum_{s=1}^k (-1)^{j+s} a_{is} |\mathbf{A}_{js}|$$

Prawa strona jest równa rozwinięciu Laplace'a, wzdłuż j -tego wiersza, wyznacznika macierzy powstałej z \mathbf{A} przez zastąpienie jej j -tego wiersza i -tym. Zatem $x_{ij} = |\mathbf{A}|$ gdy $i = j$ oraz $x_{ij} = 0$ gdy $i \neq j$ (wykorzystujemy własność (v) z §1.1). To dowodzi, że $\mathbf{A}\mathbf{D}^t = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_k$, a równości $\mathbf{D}^t\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_k$ dowodzimy analogicznie. \square

Istnienie i jedność rozwiązania w twierdzeniu 1 oraz odwracalność \mathbf{A} w twierdzeniu 2 były już nam znane. Nowe są jednak jawne wzory na \mathbf{A}^{-1} i na rozwiązanie układu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ jest macierzą nieosobliwą. Choć ze względu na liczbę niezbędnych obliczeń tylko dla małych lub bardzo specjalnych macierzy \mathbf{A} wzory te można praktycznie wykorzystać, to jednak ich istnienie i postać mają istotne znaczenie.

Macierz \mathbf{D}^t z twierdzenia 2 nazywana jest **macierzą dołączoną** macierzy \mathbf{A} .

Zadanie uzupełniające 1. Oznaczmy macierz \mathbf{D} z twierdzenia 2 przez $\mathbf{D}_\mathbf{A}$. Dowieść, że

a) $|\mathbf{D}_\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^{k-1}$.

b) $\mathbf{D}_{\mathbf{A}\mathbf{B}} = \mathbf{D}_\mathbf{A}\mathbf{D}_\mathbf{B}$ dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 7 w §I.4.2; 6,11,14,16 w §I.2.3; 18,19,20 w §I.2.1.

3. * Twierdzenie Bineta–Cauchy'ego.

Ten punkt zawiera materiał uzupełniający. Dowodzone w nim uogólnienie twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy wykorzystamy w dalszej części tylko przy badaniu objętości w przestrzeniach \mathbb{R}^n . Tym niemniej, jest ono ważne, a jego dowód jest dobrym wstępem do studiowania form wieloliniowych.

Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}$. Wówczas macierz $\mathbf{A}\mathbf{B}$ jest rozmiaru $l \times l$, i celem naszym jest wyrażenie jej wyznacznika poprzez minory macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} stopnia l . Dla opisania tej zależności oznaczmy przez $\mathbf{X}_{S,T}$ podmacierz danej macierzy \mathbf{X} , wyznaczoną przez jej wiersze o numerach ze zbioru S i kolumny o numerach ze zbioru T , przy czym za S czy T piszemy $\&$ gdy jest to zbiór numerów wszystkich wierszy czy kolumn.

Twierdzenie 1 (Bineta–Cauchy'ego). * *Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}$ ma miejsce równość $|\mathbf{A}\mathbf{B}| = \sum_S |\mathbf{A}_{\&,S}| |\mathbf{B}_{S,\&}|$, gdzie S przebiega wszystkie l -elementowe podzbiory zbioru $\{1, \dots, k\}$. (Jeśli takich nie ma, to $|\mathbf{A}\mathbf{B}| = 0$.)*

Twierdzenie Bineta–Cauchy'ego wygodnie jest uzasadnić traktując wyznacznik jako wieloliniową i alternującą funkcję wierszy macierzy. (Patrz §2.1 i §2.2). Wykorzystamy mianowicie następujące twierdzenie dotyczące się takich funkcji:

Twierdzenie 2. * Niech V będzie przestrzenią wektorową, a $f : V^l \rightarrow \mathbb{F}$ funkcją wieloliniową i alternującą. Jeśli $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ i $\mathbf{v}_i := \sum_{j=1}^k a_{ij} \mathbf{u}_j$ dla $i = 1, \dots, l$, to

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k} |\mathbf{A}(j_1, \dots, j_l)| f(\mathbf{u}_{j_1}, \dots, \mathbf{u}_{j_l}), \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{A}(j_1, \dots, j_l)$ jest podmacierzą macierzy $(a_{ij})_{i,j}$, wyznaczoną przez kolumny j_1, \dots, j_l . (Gdy $l > k$, prawą stronę powyższego wzoru należy rozumieć jako 0.)

Przed dowodem pokażemy, jak wynika stąd twierdzenie Bineta–Cauchy’ego. W tym celu ustalmy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}$ i połóżmy $f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l) = |\mathbf{AB}|$, gdzie \mathbf{A} jest macierzą o wierszach $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in \mathbb{F}^k$. Żądaną tezę otrzymamy wprost ze wzoru (6), jeśli za $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ obierzemy wektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \in \mathbb{F}^k$. (Zauważmy, że $f(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_l})$ jest wyznacznikiem macierzy utworzonej przez wiersze j_1, \dots, j_l macierzy \mathbf{B} .)

Przejdźmy do dowodu twierdzenia 2. Wobec wieloliniowości funkcji f ,

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l) = \sum_{s=1}^k a_{1s} f(\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l).$$

Podobnie

$$f(\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l) = \sum_{t=1}^k a_{2t} f(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_l),$$

skąd

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l) = \sum_{s,t=1}^k a_{1s} a_{2t} f(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_l).$$

Kontynuując w ten sposób otrzymujemy

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l) = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_l=1}^k a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ls_l} f(\mathbf{u}_{s_1}, \mathbf{u}_{s_2}, \dots, \mathbf{u}_{s_l}).$$

Ponieważ funkcja f jest alternująca, więc $f(\mathbf{u}_{s_1}, \mathbf{u}_{s_2}, \dots, \mathbf{u}_{s_l}) = 0$ gdy ciąg $(s_n)_{n=1}^l$ nie jest różnowartościowy. Stąd $f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l) = 0$ przy $k < l$, a gdy $k \geq l$ możemy sumowanie po prawej stronie ograniczyć do różnowartościowych ciągów $(s_n)_{n=1}^l$. Każdy taki ciąg jest przez dokładnie jeden ciąg rosnący $(j_n)_{n=1}^l$ i permutację $\sigma \in \mathbf{S}_l$ wyznaczony wzorem $s_n = j_{\sigma(n)}$ dla $n = 1, \dots, l$. (Należy elementy zbioru $\{s_1, \dots, s_l\}$ uporządkować, otrzymując j_1, \dots, j_l , a $\sigma(n)$ określić powyższą równością.)

Wykorzystamy teraz rezultaty z §§2.1 i 2.3. Funkcja f jest antysymetryczna, patrz zad. uzup. 2 w §2.1, wobec czego $f(\mathbf{u}_{s_1}, \dots, \mathbf{u}_{s_k}) = \text{Sgn}(\sigma) f(\mathbf{u}_{j_1}, \dots, \mathbf{u}_{j_k})$ i dalej

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k} f(\mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2}, \dots, \mathbf{u}_{j_l}) \left(\sum_{\sigma \in \mathbf{S}_l} \text{Sgn}(\sigma) a_{1j_{\sigma(1)}} \cdot \dots \cdot a_{lj_{\sigma(l)}} \right). \quad (7)$$

Stosując do sumy w nawiasie wzór (4) otrzymujemy tezę. \square

Zadania uzupełniające.

1. a) W oparciu o twierdzenie Bineta–Cauchy’ego udowodnić **tożsamość Lagrange’a** $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} (u_i v_j - u_j v_i)^2$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$. (Przyjmujemy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \sum_i u_i v_i$.)

b) Udowodnić ogólniejszą **tożsamość Bineta–Cauchy’ego**: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}') = \sum_{1 \leq i < j \leq k} (u_i v_j - u_j v_i)(u'_i v'_j - u'_j v'_i)$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{F}^k$.

c) Udowodnić, że $\sum_{i=1}^k |u_i|^2 \sum_{i=1}^k |v_i|^2 - |\sum_i u_i \bar{v}_i|^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} |u_i \bar{v}_j - \bar{u}_j v_i|^2$ dla $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, k$).

2. Dla $l \leq k$ i $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$ przyjmijmy $N(\mathbf{X}) := \sqrt{\Sigma}$, gdzie Σ jest sumą kwadratów wszystkich $l \times l$ -minorów macierzy \mathbf{X} . Udowodnić, że:

a) $N(\mathbf{X}) = \sqrt{|\mathbf{X}\mathbf{X}^t|}$;

b) $N(\mathbf{A}\mathbf{X}) = N(\mathbf{A})N(\mathbf{X})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_l(\mathbb{R})$.

3. Dowieść, że gdy $\#S = \#T$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ i macierz \mathbf{A} liczy k kolumn, to $|\mathbf{C}_{S,T}| = \sum_U |\mathbf{A}_{S,U}| |\mathbf{B}_{U,T}|$, gdzie $U \subset \{1, \dots, k\}$ przebiega zbiory równoliczne z S . (Przy $\#S = 1$ daje to wzór na wyrazy \mathbf{C} , a w innym przypadku – twierdzenie Cauchy’ego z p.1.)

4. Udowodnić następujące **ogólne twierdzenie Laplace’a** o rozwinięciu wyznacznika: Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ i $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ zachodzi

$$|\mathbf{A}| = \sum_T |\mathbf{A}_{S,T}| |\mathbf{A}_{S',T'}| (-1)^{\Sigma S + \Sigma T},$$

gdzie T przebiega wszystkie pozbiory zbioru $\{1, \dots, k\}$ równoliczne z S , oraz

$\sum S$ oznacza sumę elementów zbioru S , zaś $\sum T$ sumę elementów zbioru T ,

S' oznacza $\{1, \dots, k\} \setminus S$ i podobnie dla T' .

Wskazówka: traktować $|\mathbf{A}|$ jako funkcję wierszy ze zbioru S , przy ustalonych pozostałych, i znaleźć jej wartość gdy każdy z tych wierszy jest jednym z wektorów $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$; następnie wykorzystać twierdzenie 2.

Problem 2. Niech $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ i $\#S = \#T$. Wówczas $|\mathbf{B}_{S,T}| = \frac{|\mathbf{A}_{T',S'}|}{|\mathbf{A}|} (-1)^{\Sigma S + \Sigma T}$. (Wskazówka: poprzedzające dwa zadania.)

5. Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^4$. Stosując ogólne twierdzenie Laplace’a do macierzy o kolejnych wierszach $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$, przy $S = \{1, 2\}$, uzyskać zależność między liczbami $p_{ik} := x_i y_k - y_i x_k$ ($i, k = 1, \dots, 4, i \neq k$).

6. Wzór z <http://mathworld.wolfram.com/CauchysDeterminantTheorem.html> ??

4. * Wyznaczniki macierzy o wyrazach w pierścieniu przemiennym.

Uwaga 1. * Gdy wyrazy macierzy należą do pewnego podpierścienia ciała \mathbb{F} , to jej wyznacznik też do niego należy; patrz wzór (4). Latwo więc rezultaty o wyznacznikach rozszerzyć na przypadek macierzy nad dowolnym pierścieniem P , dającym się zanurzyć jako podpierścień pewnego ciała \mathbb{F} : możemy bowiem używać rezultatów dotyczących wyznaczników macierzy o wyrazach z \mathbb{F} , podczas gdy rozważane wyznaczniki leżą w P .

Szczególnie spotykane są dwa przypadki: gdy $P = \mathbb{Z}$ i gdy $P = \mathbb{F}[x]$ dla pewnego ciała \mathbb{F} . (Traktujemy wówczas \mathbb{Z} jako podzbiór ciała \mathbb{Q} , a $\mathbb{F}[x]$ jako podzbiór tzw. ciała funkcji wymiernych).

Uwaga 2. * Można pójść dalej i zauważyć, że wszystkie wyniki o wyznacznikach, poza być może tą częścią twierdzenia charakteryzacyjnego z §1.1, która mówi o jedności, stosują się do macierzy o wyrazach w dowolnym pierścieniu przemiennym. Istotnie, przy definicji $|\mathbf{A}|$ z §2.2, nie wymagają zmiany dowody twierdzenia 1 w §2.2 i dowody obu twierdzeń z p.3, w tym wzoru (7). Z twierdzenia 1 z p.3 wynika twierdzenie Cauchy'ego z §1.1, a wzór (7) dowodzi jednoznaczności w twierdzeniu charakteryzacyjnym 2 w §2.2, jak również nietrudno wyprowadzić z niego wyniki §1.2. Uzasadnienia z pp. 1 i 2, w tym rozwinięcia Laplace'a i wzorów Cramera, pozostają słuszne bez żadnych zmian, lecz przy wzorach Cramera należy żądać, by wyznacznik $|\mathbf{A}|$ był odwracalnym elementem pierścienia (w miejsce tego, by był różny od zera).

Zadania uzupełniające. *

1. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{Z})$ i niech $d \in \mathbb{Z}$ będzie dzielnikiem wszystkich liczb $a_{ij} - b_{ij}$. Dowieść, że d jest też dzielnikiem liczby $|\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$.

2. a) Dla macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{Z})$ oraz $i = 1, \dots, k$ oznaczmy przez $d_i(\mathbf{A})$ największy wspólny dzielnik wszystkich jej i -minorów. (Definicja poniżej.) Dowieść, że wykonanie na macierzy \mathbf{A} operacji typu (I) nad \mathbb{Z} nie zmienia żadnej z liczb $d_i(\mathbf{A})$.

b) To samo przy \mathbb{Z} zastąpionym pierścieniem wielomianów $\mathbb{F}[x]$, gdzie \mathbb{F} jest ciałem.

§ 4. Geometryczne zastosowania wyznacznika.

1. Wyznacznik operatora.

Twierdzenie 1 (i definicja). Niech $L \in \mathcal{L}(V, V)$ i niech \mathcal{V} i \mathcal{W} będą (uporządkowanymi!) bazami w V . Wtedy macierze $[L]_{\mathcal{V}} := [L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ i $[L]_{\mathcal{W}}$ mają ten sam wyznacznik.

Skalar $\det([L]_{\mathcal{V}})$, nie zależący od bazy \mathcal{V} , nazywamy **wyznacznikiem operatora** L i oznaczamy przez $\det(L)$.

Dowód. Niech $\mathbf{A} := [L]_{\mathcal{W}}$, $\mathbf{B} := [L]_{\mathcal{V}}$, $\mathbf{C} := [I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$. Mamy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, skąd $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}) = \det(\mathbf{A})$. (Wykorzystaliśmy twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu). \square

Podkreślmy, że wyznacznik przypisujemy tylko **endomorfizmom**, tzn. operatorom działającym z pewnej przestrzeni do niej samej.

Przykład 1. Niech $V = U \oplus W$ i niech S będzie symetrią względem U wzdłuż W . W U i W obierzmy bazy $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ i $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q$, odpowiednio. Ponieważ $S(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i$ i $S(\mathbf{w}_j) = -\mathbf{w}_j$ dla $i = 1, \dots, p$ oraz $j = 1, \dots, q$, więc w bazie $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q$ przestrzeni V macierz symetrii S jest diagonalna, a na jej przekątnej stoi kolejno p wyrazów równych 1 i q równych -1. Stąd $\det(S) = (-1)^q$, gdzie $q = \dim(W)$.

Ćwiczenie. Gdy $P \in \mathcal{L}(V)$ jest rzutem liniowym, to $\det(P + I_V)$ jest potęgą dwójki.

Zadanie 1. a) Dla operatorów $L_1, L_2 : V \rightarrow V$ ma miejsce równość $\det(L_1 \circ L_2) = \det(L_1) \det(L_2)$.

b) Operator $L : V \rightarrow V$ jest sobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(L) = 0$.

Mimo prostoty dowodu twierdzenia 1 nie jest oczywiste, jak interpretować wyznacznik operatora. Pełną interpretację podamy tylko w przypadku rzeczywistego ciała skalarów. Okazuje się, że znak wyznacznika $\det(L)$ zależy od tego, czy L zachowuje orientację, zaś wartość bezwzględna od tego, jak L zmienia objętość brył. Co to oznacza, wyjaśnimy niżej i w rozdziale V.

2. Orientacja baz uporządkowanych przestrzeni rzeczywistych.

Definicja. Bazy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$ przestrzeni rzeczywistej V nazwiemy **zgodnie zorientowanymi**, gdy macierz zmiany baz $[I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ ma dodatni wyznacznik.

Zadanie 1. a) zgodna orientacja jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich uporządkowanych baz przestrzeni V ;

b) jeśli baza $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^k$ jest zorientowana niezgodnie z bazą $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$, a $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ niezgodnie z bazą $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$, to bazy $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^k$ i $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$ są zgodnie zorientowane;

c) baza $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$ jest niezgodnie zorientowana z bazą $(-\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$;

d) Izomorfizm liniowy przeprowadza bazy zgodnie zorientowane na zgodnie zorientowane.

Z części b) i c) zadania wynika, że relacja zgodnej orientacji baz uporządkowanych ma dokładnie dwie klasy równoważności. Każdą z tych klas (a więc zbiorów baz) nazywamy **orientacją** przestrzeni V . **Przestrzeń zorientowana** to taka przestrzeń rzeczywista, w której wybrano którąś z dwóch orientacji. Bazy należące do tej orientacji nazywamy **dodatnio zorientowanymi**, a pozostałe – **ujemnie zorientowanymi**.

Możemy też mówić o orientacji **zadanej** daną bazą \mathcal{V} – jest to ta orientacja, do której \mathcal{V} należy.

Przykład 1. Jeśli nie powiedziano inaczej, przestrzeń \mathbb{R}^k rozważamy z **orientacją standardową** – tzn. wyznaczoną przez bazę standardową $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$. Baza $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ jest w niej dodatnio zorientowana, gdy macierz o (kolejnych) kolumnach $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ ma wyznacznik dodatni.

Definicja. Niech V i W będą zorientowanymi k -wymiarowymi przestrzeniami rzeczywistymi. Powiemy, że izomorfizm $T : V \rightarrow W$ **zachowuje orientację** jeśli przeprowadza pewną dodatnio zorientowaną bazę w V na dodatnio zorientowaną bazę w W .

Zadanie 2. Udowodnić, że:

- Bez zmiany znaczenia można w tej definicji zmienić słowo „pewną” na „każdą”.
- Złożenie skończenie wielu izomorfizmów liniowych wtedy i tylko wtedy zmienia orientację, gdy czyni to nieparzystą liczbę rozważanych izomorfizmów.

- Gdy $V = W$ jako przestrzeń zorientowana, to

$$T \text{ zachowuje orientację} \Leftrightarrow \det(T) > 0.$$

Odnotujmy, że warunek $\det(T) > 0$ zależy tylko od endomorfizmu T , a nie od wyboru orientacji przestrzeni $V = W$.

Przykład 2. Z przykładu w p.1 wynika, że symetria względem U wzdłuż podprzestrzeni W zachowuje orientację, gdy $\dim(W)$ jest liczbą parzystą, i vice versa.

Zadania uzupełniające.

1. Niech $V_{\mathbb{C}}$ będzie przestrzenią wektorową nad \mathbb{C} , a $V_{\mathbb{R}}$ przestrzenią mającą ten sam, co $V_{\mathbb{C}}$, zbiór wektorów, lecz zbiór skalarów \mathbb{R} . (Działania w $V_{\mathbb{R}}$ są wzięte z $V_{\mathbb{C}}$.) Udowodnić, że:

- Gdy $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_n)_{n=1}^k$ jest bazą w $V_{\mathbb{C}}$, to $\mathcal{U}' = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, i\mathbf{u}_1, \dots, i\mathbf{u}_k)$ jest nią w $V_{\mathbb{R}}$.
- Gdy $L_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{R}})$ jest przekształceniem wyznaczonym przez \mathbb{C} -liniowy operator $L \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}})$, to $\det(L_{\mathbb{R}}) = |\det(L)|^2$. (Wskazówka: zadanie uzupełniające 2 w §3.1.)
- Każdy \mathbb{C} -liniowy operator nieosobliwy $L \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}})$ zachowuje orientację przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$; ponadto, gdy wychodząc od innej bazy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ przestrzeni $V_{\mathbb{C}}$ utworzyć jak w a) bazę \mathcal{V}' przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$, to bazy \mathcal{U}' i \mathcal{V}' będą zgodnie zorientowane.

3. Heurystyczny opis znaczenia orientacji; zgodna orientacja a ciągła deformacja baz.

A. Jak można poglądowo przedstawić znaczenie wyboru orientacji k -wymiarowej przestrzeni V , dla $k \leq 3$?

Gdy $k = 1$, wybór orientacji polega na wybraniu zwrotu wektorów, który uznamy za dodatni. (Przy $k = 1$ są tylko 2 zwroty.)

Gdy $k = 3$ i $V = \mathbb{R}^3$, możemy rozpostrzeć kolejne trzy palce lewej ręki, numerując je począwszy od kciuka, i zrobić to samo z palcami prawej. Otrzymamy układy wektorów $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ oraz $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Możemy ręce ustawić tak, by wektory \mathbf{l}_i oraz \mathbf{p}_i były równe dla $i = 2, 3$, lecz wzajemnie przeciwne dla $i = 1$. Stąd układy te są przeciwnie zorientowane. Wybór orientacji przestrzeni odpowiada ustaleniu, czy preferujemy sposób rysowania (standardowych) układów $Oxyz$ zgodnie z orientacją L (lewej ręki), czy zgodnie z orientacją P (ręki prawej). Zwyczajowo jest przyjęty wybór P . Odwrotnie, jeśli wybierzemy orientację przestrzeni, to można nazwać „prawą” wyznaczającą tę orientację rękę. Wybór orientacji jest więc tym samym, co przyjęcie umowy, którą rękę uznajemy za prawą.

Wybór orientacji płaszczyzny $V \subset \mathbb{R}^3$ odpowiada ustaleniu, czy w standardowym układzie osi wektor pierwszy jest na „prawo”, czy też na „lewo” od drugiego, który wyobrażamy sobie jako skierowany ku górze, a fragment płaszczyzny jako tablicę. W odniesieniu do płaszczyzny słowa „prawy” i „lewy” nie mają jednak sensu: możemy tylko powiedzieć, że w zwyczajowo na rysunkach przyjmowanym wyborze, wektor pierwszy jest na prawo od drugiego, gdy patrzymy na płaszczyznę V z wnętrza pokoju, na ścianie której wisi tablica. Opis wykorzystuje więc zarówno orientację przestrzeni \mathbb{R}^3 (pojęcia: prawy, lewy), jak i orientację prostej dopełniającej.

B. Postaramy się wykorzystać pojęcie ciągłości by wyjaśnić znaczenie zgodnej orientacji baz w przestrzeni \mathbb{R}^k . (Uwzględnienie innych przestrzeni rzeczywistych sprawia pewne zbędne kłopoty pojęciowe, choć nie jest trudne; patrz zadanie uzupełniające 2.)

Definicja. Funkcja wektorowa $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ zadana jest przez układ k funkcji współrzędnych $f_1, \dots, f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; nazwijmy ją **ciągłą**, gdy ciągła jest każda z funkcji f_i . **Drogą baz** w przestrzeni \mathbb{R}^k nazywamy układ k wektorowych funkcji ciągłych $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$, dla pewnego przedziału $[a, b]$, taki, że

$$(\mathbf{f}_1(t), \dots, \mathbf{f}_k(t)) \quad \text{jest bazą w } \mathbb{R}^k, \text{ dla każdego } t \in [a, b].$$

O takiej drodze powiemy, że łączy bazę $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ z bazą $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$, gdy

$$\mathbf{f}_i(a) = \mathbf{v}_i \quad \text{ i } \quad \mathbf{f}_i(b) = \mathbf{w}_i \quad \text{ dla } i = 1, \dots, k.$$

Uwaga 1. Zamiast konstruować drogi baz, będziemy konstruować drogi macierzy nieosobliwych, tzn. funkcje $[a, b] \ni t \mapsto \mathbf{X}(t) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ takie, że wyrazy macierzy

$\mathbf{X}(t)$ zależą w sposób ciągły od t oraz $|\mathbf{X}(t)| \neq 0$ dla każdego $t \in [a, b]$. Związek jest oczywisty, bo $k \times k$ -macierz rzeczywista wtedy i tylko wtedy jest nieosobliwa, gdy jej kolumny (czy wiersze) tworzą bazę przestrzeni \mathbb{R}^k .

Twierdzenie 1. *Dwie uporządkowane bazy przestrzeni \mathbb{R}^k wtedy i tylko wtedy są zgodnie zorientowane, gdy można je połączyć drogą baz.*

Równoważne sformułowanie: *dwie nieosobliwe $k \times k$ -macierze rzeczywiste wtedy i tylko wtedy można połączyć drogą macierzy nieosobliwych, gdy ich wyznaczniki są tego samego znaku.*

Dowód można rozbić na zadania (będą one omawiane na ćwiczeniach):

1. a) Jeśli drogą macierzy nieosobliwych można połączyć \mathbf{A} z \mathbf{B} , a także \mathbf{B} z \mathbf{C} , to można i \mathbf{A} z \mathbf{C} .

b) Gdy w macierzy nieosobliwej \mathbf{A} , do pewnego jej wiersza dodać krotność innego, to otrzymaną macierz można połączyć z \mathbf{A} drogą macierzy nieosobliwych.

2. Daną macierz nieosobliwą można powyższymi operacjami sprowadzić do macierzy postaci $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, c)$, dla pewnego c . Tym samym można ją połączyć drogą macierzy nieosobliwych z jedną z macierzy $\text{diag}(1, \dots, 1, \pm 1)$.

3. W oparciu o te zadania, udowodnić twierdzenie.

Zadania uzupełniające. Niżej, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. a) Dowieść, że każdą macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ można dla pewnego r połączyć w $\mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ drogą macierzy rzędu r z macierzą (b_{ij}) , gdzie $b_{ij} = 1$ gdy $i = j < r$, $b_{rr} \neq 0$ i $b_{ij} = 0$ w przeciwnym razie.

b) Gdy $r < \max(k, l)$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to wyżej można przyjąć $b_{rr} = 1$.

Definicja. **Drogą** w k -wymiarowej przestrzeni V nad \mathbb{F} nazwiemy funkcję $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow V$ taką, że dla pewnej bazy \mathcal{V} tej przestrzeni, funkcja $t \mapsto [\mathbf{f}(t)]_{\mathcal{V}} \in \mathbb{F}^k$ jest ciągła. (Jak zwykle, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ oznacza ciąg współrzędnych wektora \mathbf{v} w bazie \mathcal{V} .) **Drogą baz** w V nazwiemy układ dróg $\mathbf{f}_i : [a, b] \rightarrow V$ ($i = 1, \dots, k$) taki, że $(\mathbf{f}_i(t))_{i=1}^k$ jest bazą w V , dla każdego $t \in [a, b]$.

2. Dowieść, że:

a) Bez zmiany znaczenia można wyżej zastąpić „dla pewnej” przez „dla każdej”.

b) Gdy $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow V$ jest drogą w V , to $L \circ \mathbf{f}$ jest drogą w W .

c) W twierdzeniu 2 można zastąpić \mathbb{R}^k przez przestrzeń rzeczywistą V .

3. a) Jeśli przekształcenia $K, L \in \mathcal{L}(V, W)$ mają ten sam rząd i nie są izomorfizmami, to można je w przestrzeni $\mathcal{L}(V, W)$ połączyć drogą przekształceń stałego rzędu.

b) Czy jest tak, gdy K i L są izomorfizmami? Rozróżnić przypadki $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.