

Egzamin z Analizy Matematycznej I

II termin

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2016/17, semestr zimowy

3 marca 2017 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right).$$

2. a. (5 pkt.) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^p}$$

w zależności od $p \in \mathbb{R}$.

- b. (5 pkt.) Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

lub uzasadnić, że szereg jest rozbieżny.

3. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem $f(x) = x^{2017} - 2017x + 2017$.

- a. (5 pkt.) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji f .
b. (5 pkt.) Rozstrzygnąć ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $f(x) = 0$.

4. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^x + \ln(1+x) & \text{dla } x \geq 0 \\ ax + b & \text{dla } x < 0 \end{cases},$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.

- a. (5 pkt.) Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f jest ciągła i różniczkowalna.
b. (2 pkt.) Uzasadnić, że istnieje funkcja odwrotna i określić jej dziedzinę.
c. (3 pkt.) Obliczyć $(f^{-1})'(1)$.

5. (10 pkt.) W półokrąg o promieniu R wpisano trapez, którego podstawą jest średnica okręgu. Dla jakiego kąta przy podstawie trapezu pole trapezu jest największe? Odpowiedź należy uzasadnić.