

Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2023/24, semestr zimowy

1 lutego 2024 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr albumu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godziny.

Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić powołując się na odpowiednie fakty, twierdzenia, lematy itp.

Zadanie 1. (a) (4 pkt.) Wiadomo, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ jest zbieżny dla $x = -4$ oraz rozbieżny dla $x = 6$. Wyjaśnić kwestię zbieżności wskazanych niżej szeregów:

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$,
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot 8^n$,
- (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (-3)^n$,
- (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \cdot 9^n$.

(b) (6 pkt.) Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x - 4)^n}{n^3}.$$

Zadanie 2. (a) (6 pkt.) Uzasadnić zbieżność i obliczyć granicę ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowanego w sposób następujący:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + 3a_n} - 1 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

(b) (4 pkt.) Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1}.$$

Zadanie 3. Obliczyć:

(a) (5 pkt.) granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - x}{\sin x - x},$$

(b) (2 pkt.) pochodną

$$\left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)',$$

(c) (3 pkt.) granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right).$$

Zadanie 4. (a) (4 pkt.) Niech k będzie prostą styczną do wykresu funkcji $\operatorname{tg} x$ w punkcie $(\frac{\pi}{4}, 1)$. Wyznaczyć takie $x_0 \in (0, \infty)$, że styczna do wykresu funkcji $\ln x$ w punkcie $(x_0, \ln x_0)$ jest równoległa do k .

(b) (6 pkt.) Wykazać, że dla wszystkich $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ oraz $x, y \in [\frac{1}{2}, \infty)$ zachodzą nierówności

$$|\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta| \leq 2|\alpha - \beta| \quad \text{oraz} \quad |\ln x - \ln y| \leq 2|x - y|.$$

Zadanie 5. Pewien producent oferuje produkt \mathcal{P} , przy czym możliwy koszt produkcji x jednej sztuki produktu waha się w przedziale $[1, 10]$. Zwiększenie kosztu produkcji naturalnie powoduje zwiększenie jakości wykonania produktu. Celem producenta jest ustalenie kosztu produkcji $x \in [1, 10]$ oraz ceny rynkowej $t > x$ tak, aby zmaksymalizować zysk zakładając model, w którym popyt na towar \mathcal{P} wyraża się w zależności od kosztu produkcji x (a przez to związanej z nim jakości wykonania) i proponowanej na rynku ceny t wzorem

$$p(x, t) = \begin{cases} e^{x/16} \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{100}\right) & \text{dla } 0 < t < 100 \\ 0 & \text{dla } t \geq 100. \end{cases}$$

Zauważmy, że cena $t = 100$ jest maksymalną akceptowalną ceną, po przekroczeniu której popyt na towar \mathcal{P} jest zerowy. Niech $Z(x, t) = (t - x)p(x, t)$ będzie funkcją zysku w zależności od zmiennych x i t .

(a) (4 pkt.) Przy ustalonym koszcie produkcji $x \in [1, 10]$ wyznaczyć cenę $t(x) \in [x, 100]$, przy której funkcja $Z(x, t)$ przyjmuje wartość największą; pokazać, że ta największa wartość wynosi

$$Z(x, t(x)) = e^{x/16} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{10}\right)^2.$$

(b) (6 pkt.) Rozważając $Z(x, t(x))$ jako funkcję zmiennej $x \in [1, 10]$ określić przedziały jej monotoniczności i wiedząc, że $Z(1, t(1)) < Z(10, t(10))$ wyznaczyć argument x_0 , dla którego funkcja ta przyjmuje wartość największą. Obliczyć

$$\max_{x \in [1, 10]} Z(x, t(x)).$$

Ile razy wyższa jest cena rynkowa $t(x_0)$ od kosztu produkcji x_0 przy optymalnym wyborze strategii producenta?