

Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2018/19, semestr zimowy

6 lutego 2019 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

2. (10 pkt.) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(3n)!}.$$

3. Niech $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = 4x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

a. (5 pkt.) Wykazać, że istnieje funkcja odwrotna do f i wyznaczyć dziedzinę tej funkcji odwrotnej.

- b. (5 pkt.) Obliczyć

$$(f^{-1})'(5).$$

4. (10 pkt.) Uzasadnić, że dla każdego $x \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{arctg} x \geq x - \frac{x^3}{3}.$$

5. (10 pkt.) Wśród trójkątów równoramiennych o ustalonym obwodzie d , wyznaczyć kąt α przy podstawie trójkąta, dla którego największą objętość ma stożek powstały z obrotu tego trójkąta wokół osi zawierającej wysokość opuszczoną na podstawę.

Wskazówka. Miarę kąta α można wyrazić za pomocą funkcji cyklotrycznych.