

# Egzamin z Analizy Matematycznej I - II termin

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2015/16, semestr zimowy

4 marca 2016 r.

**UWAGA:** Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić, powołując się na fakty z wykładów lub ćwiczeń z AM I. W przypadku korzystania z innych faktów należy przedstawić ich dowody!

1. Udowodnić, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi równość:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2. Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}.$$

3. Obliczyć sumę szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+2}}$$

4. Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + 2^x - \frac{\pi}{4}x & \text{dla } x \geq 0 \\ (1 + \ln 2 - \frac{\pi}{4})x + 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$$

Obliczyć  $(f^{-1})'(2)$ .

5. Jaka najmniejsza wartość może przyjąć suma kwadratów odległości od punktu  $(2, 2)$  do dwóch punktów na paraboli  $y = x^2$  symetrycznych względem osi rzędnych.

6. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$