

# Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2015/16, semestr zimowy

2 lutego 2016 r.

**UWAGA:** Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić, powołując się na fakty z wykładów lub ćwiczeń z AM I. W przypadku korzystania z innych faktów należy przedstawić ich dowody!

1. Udowodnić, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi równość

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2. Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}.$$

3. Rozstrzygnąć ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$$

4. Niech  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją daną wzorem  $f(x) = 100^x + \sin(\pi x)$ . Obliczyć  $(f^{-1})'(11)$ .

5. Wśród punktów należących do paraboli o kierownicy  $y = -\frac{1}{2}$  i ognisku  $(0, \frac{1}{2})$  wyznaczyć punkt leżący najbliżej punktu  $(-4, 1)$ .

6. Znaleźć  $p$  oraz  $q$ , dla których proste  $y = 5x + 1$  oraz  $y = -x - 2$  są styczne do paraboli o równaniu  $y = x^2 + px + q$ .

**6 (wersja z mniej męczącymi rachunkami).** Wyznaczyć wszystkie wartości  $p$ , dla których istnieje punkt  $x(p)$  taki, że prosta  $y = -x - 1$  oraz  $y = -x - 2$  są styczne do paraboli o równaniu  $y = x^2 + px + q$ .