

# Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2022/23, semestr zimowy

2 lutego 2023 r.

**UWAGA:** Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr albumu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Znaleźć dwie różne liczby całkowite  $m, n \in \mathbb{Z}$  takie, że w przedziałach  $(m, m+1)$ ,  $(n, n+1)$  znajdują się pewne rozwiązania równania

$$x^5 + 8x = 4x^4 + 6x^2.$$

2. a. (5 pkt.) Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n} \ln(n+1) x^n$$

- b. (3 pkt.) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(3n)!}$$

3.

- a. (5 pkt.) W zależności od  $c > 0$  obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(cx)},$$

- b. (5 pkt.) Dla jakich wartości parametru  $a > 0$  zbieżny jest ciąg określony rekurencyjnie:  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Proszę obliczyć tę granicę, dla  $a$ , dla których ona istnieje.

4. a. (5 pkt.) Obliczyć błąd przybliżenia liczby  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$  za pomocą trzeciego wielomianu Taylora dla funkcji  $f(x) = \operatorname{tg} x$  w  $x_0 = 0$ .

- b. (5 pkt.) Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(1+x)^x}{x^x e} \right)^x,$$

5. (10 pkt.) Plac jest otoczony ogrodzeniem w kształcie elipsy opisanej równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dla pewnych  $a > b > 0$ . Proszę wyznaczyć maksymalne pole powierzchni prostokątnego boiska, które można wyznaczyć w obrębie tego placu (pewne punkty leżące na brzegu boiska mogą należeć do elipsy stanowiącej ograniczenie placu).