

Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2019/20, semestr zimowy

6 marca 2020 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr albumu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Czy równanie $\frac{x^4}{x+1} = x^2 + 5$ ma co najmniej jedno rozwiązanie będące liczbą rzeczywistą? Odpowiedź uzasadnij.

2. (10 pkt.) Uzasadnić, że $x \operatorname{tg} x > x^2 + \frac{x^4}{3}$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

3. a. (5 pkt.) Dla szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-3)^{2+n}(n^2+1)} (4x-12)^n$$

określić promień zbieżności oraz wskazać zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których szereg ten jest zbieżny.

b. (5 pkt.) Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

4. Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica

a. (5 pkt.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -(x+1)\left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right),$$

b. (5 pkt.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{arctg} 5x}.$$

5. (10 pkt.) Ekran kina na wolnym powietrzu ma 20 m wysokości i znajduje się na wysokości 10 m nad ziemią. W jakiej odległości $x \in \mathbb{R}$ od ściany, na której wisi ekran powinien znajdować się widz, aby kąt widzenia θ był największy?

