

Egzamin z Analizy Matematycznej

Rok akad. 2010/11, semestr zimowy

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

4 lutego 2011 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (6 pkt.) Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

2. (7 pkt.) Obliczyć granicę ciągu a_n , gdzie

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3^n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

3. (6 pkt.) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n+1)!}{n^{n-\frac{1}{n}}}.$$

4. (7 pkt.) Znaleźć granicę funkcji

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2^{-x} + \frac{2x+1}{3x+7} \right)^x.$$

5. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - \sin x$.

(a) (4 pkt.) Wyznaczyć dziedzinę funkcji odwrotnej f^{-1} .

(b) (4 pkt.) Obliczyć $(f^{-1})'(0)$.

6. (6 pkt.) Rzeka o stałej szerokości s płynie przez równinę wzdłuż linii prostej. Po jednej stronie rzeki, w odległości a od brzegu, leży miasto A, a po drugiej stronie, w odległości b od brzegu, leży miasto B. Odległość w linii prostej między tymi miastami wynosi d . W którym miejscu należy zbudować most przez rzekę (prostopadły do jej kierunku) i jak wytyczyć drogi z miast A i B do tego mostu, aby jadąc ze stałą prędkością v , przejechać z jednego miasta do drugiego w jak najkrótszym czasie?