

Egzamin z Analizy Matematycznej I

II termin

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2017/18, semestr zimowy

8 marca 2018 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2, 5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{1 - \cos x} - \frac{2}{x} \right).$$

2. (10 pkt.) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^3 + 3} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

3. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = x^3 + 7x + 2$.

- a. (5 pkt.) Wykazać, że istnieje funkcja odwrotna do f i wyznaczyć dziedzinę tej funkcji odwrotnej.
b. (5 pkt.) Podać wzór, jakim określona jest styczna do wykresu funkcji odwrotnej w punkcie, w którym argument funkcji f^{-1} wynosi 4.

4. (10 pkt.) Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2, n = 1, 2, \dots$$

5. (10 pkt.) Rozważmy okno, którego górna część ma kształt półkola o promieniu r , zaś dolna ma kształt prostokąta o wymiarach $2r$ oraz h . Na framugę okna można przeznaczyć 12 m materiału. Wyznaczyć wymiary okna, przy których przepuszcza ono najwięcej światła.