

Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2016/17, semestr zimowy

3 lutego 2017 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 1}}.$$

2. a. (5 pkt.) Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}.$$

- b. (5 pkt.) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^p$$

w zależności od $p \in \mathbb{R}$.

3. (10 pkt.) Uzasadnić, że $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

4. Niech $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}} & \text{dla } x \geq 2 \\ ax + b & \text{dla } x < 2 \end{cases},$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.

- a. (5 pkt.) Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f jest ciągła i różniczkowalna.
b. (2 pkt.) Uzasadnić, że istnieje funkcja odwrotna i określić jej dziedzinę.
c. (3 pkt.) Obliczyć $(f^{-1})'(1)$.

5. (10 pkt.) Wykazać, że objętość kuli wpisanej w stożek nie przewyższa połowy objętości tego stożka.

Przypomnienie: objętość stożka jest równa jednej trzeciej iloczynu pola podstawy i wysokości stożka, zaś objętość kuli o promieniu R wyraża się wzorem $\frac{4}{3}\pi R^3$.