

Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2017/18, semestr zimowy

5 lutego 2018 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}.$$

2. (10 pkt.) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}.$$

3. Funkcja f określona jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & \text{dla } x \leq 2 \\ -x + 4 & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

- a. (2 pkt.) Wyznaczyć dziedzinę funkcji odwrotnej do f .
b. (4 pkt.) Podać wzór, jakim określona jest funkcja f^{-1} .
c. (4 pkt.) Rozwiązać równanie $f(x) = f^{-1}(x)$.

4. (10 pkt.) Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{5}{6 - a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. (10 pkt.) Rolnik zamierza zbudować silos w kształcie walca zakończonego u góry półkolistą kopułą. Wykonanie metra kwadratowego powierzchni bocznej walca kosztuje 3 złote, zaś wykonanie metra kwadratowego półkolistej kopuły kosztuje 9 zł. Obliczyć jaką maksymalną objętość silosa może uzyskać rolnik, które na budowę przeznaczył 10000 zł.

Przypomnienie: pole powierzchni kuli o promieniu R wyraża się wzorem $4\pi R^2$, zaś objętość tej kuli wyraża się wzorem $\frac{4}{3}\pi R^3$.