

# Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2019/20, semestr zimowy

4 lutego 2020 r.

**UWAGA:** Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr albumu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Wykazać, że równanie  $x^{180} + \frac{84}{1+x^2+\cos^2 x} = 119$  ma co najmniej dwa rozwiązania będące liczbami rzeczywistymi.

2. Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

a. (4 pkt.) Wyznaczyć dowolną stałą  $L > 0$  taką, że  $f$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L$  na przedziale  $[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}]$ .

b. (3 pkt.) Wykazać, że istnieje funkcja odwrotna do  $f : (\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}) \rightarrow \mathbb{R}$  i wyznaczyć dziedzinę tej funkcji odwrotnej.

c. (3 pkt.) Obliczyć  $(f^{-1})'((\frac{3}{2\pi})^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

3. a. (5 pkt.) Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą oraz niech

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \cdot \frac{\sin x^2}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Obliczyć  $F'(0)$ . Wskazówka: Wynik będzie zależny od funkcji  $f$ .

b. (5 pkt.) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{(x+2)^{3 \ln x}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$  w punkcie o odciętej  $x_0 = 1$ .

4. Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica

a. (5 pkt.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{2^n} \right) \right),$$

b. (5 pkt.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \sin 7x.$$

5. (10 pkt.) Wśród punktów należących do krzywej o równaniu  $x + y^2 = 0$  znaleźć punkt położony najbliżej punktu  $(0, -3)$ .