

Egzamin z Analizy Matematycznej I

II termin

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2023/24, semestr zimowy

27 lutego 2024 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr albumu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2, 5 godziny.

Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić powołując się na odpowiednie fakty, twierdzenia, lematy itp.

Zadanie 1. (a) (5 pkt.) Wykazać, że równanie

$$2^x = 4x$$

ma co najmniej dwa pierwiastki rzeczywiste.

(b) (5 pkt.) Wyjaśnić czy funkcja $f(x) = \sin(x^2)$ spełnia warunek Lipschitza na przedziale $P = (0, 1)$.

Zadanie 2. (a) (5 pkt.) Uzasadnić zbieżność ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowanego w sposób następujący:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Wskazówka: skorzystać z nierówności $1 + x \leq e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(b) (5 pkt.) Obliczyć lub uzasadnić, że nie istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Zadanie 3. (a) (3 pkt.) Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = x + e^x$$

ma funkcję odwrotną.

(b) (2 pkt.) Wyznaczyć dziedzinę funkcji odwrotnej.

(c) (5 pkt.) Obliczyć $(f^{-1})'(1)$.

Zadanie 4. (a) (3 pkt.) Uzasadnić, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{arctg} \sqrt{x+1} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

(b) (4 pkt.) Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \cdot (\operatorname{arctg} \sqrt{x+1} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}).$$

(c) (3 pkt.) Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + \frac{1}{x})}.$$

Zadanie 5. Przyjmijmy, że popyt na pewien produkt wyraża się jako funkcja jego ceny $x \in (0, c)$ wzorem

$$p(x) = -\ln \frac{x^2}{c^2},$$

gdzie $c > 0$ jest ustalonym parametrem. Załóżmy także, że koszt produkcji k jest zawsze proporcjonalny do ceny produktu, czyli $k = qx$ dla każdego $x \in (0, c)$, gdzie $q \in (0, 1)$ jest stałą. Niech $Z(x)$ oznacza zysk uzyskany ze sprzedaży towaru po cenie x .

(a) (4 pkt.) Wyznaczyć przedział $I \subset (0, c)$, na którym funkcja Z jest ściśle rosnąca.

(b) (6 pkt.) Wykazać, że wartość największa funkcji Z wyraża się wzorem

$$\max_{x \in (0, c)} Z(x) = \frac{2(1-q)c}{e}.$$