

Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2015/16, semestr zimowy

2 lutego 2016 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

2. Obliczyć granicę (być może niewłaściwą) lub wykazać, że nie istnieje granica:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}.$$

3. Rozstrzygnąć ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$$

4. Niech $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem $f(x) = 100^x + \sin(\pi x)$. Obliczyć $(f^{-1})'(11)$.

5. Wśród punktów należących do paraboli o kierownicy $y = -\frac{1}{2}$ i ognisku $(0, \frac{1}{2})$ wyznaczyć punkt leżący najbliżej punktu $(-4, 1)$.

6. Znaleźć p oraz q , dla których proste $y = 5x + 1$ oraz $y = -x - 2$ są styczne do paraboli o równaniu $y = x^2 + px + q$.

6 (wersja z mniej męczącymi rachunkami - ALTERNATYWA DLA ZADANIA POWYŻEJ). Wyznaczyć wszystkie wartości p , dla których prosta $y = -x - 1$ jest styczna do paraboli o równaniu $y = x^2 + px + 1$.