## Temat III

### Indukcja matematyczna, dwumian Newtona, nierówności.

**1.** Wykazać, że dla $n \geq 5$ zachodzi

$$2^n > n^2 .$$

**2.** Wykazać, że dla wszystkich $n$ naturalnych liczba $n^7 - n$ jest podzielna przez 7.

**3.** Wykazać, że dla wszystkich $n$ naturalnych liczba $n^7 - n$ jest podzielna przez 42.

**4.** Wykazać, że

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} .$$

**5.** Wykazać, że

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} .$$

**6.** Znaleźć wzór wyrażający sumę

$$3 \cdot 7 \,+\, 7 \cdot 11 \,+\, 11 \cdot 15 \,+\, \cdots + (4n-1)(4n+3) .$$

**7.** Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n$ zachodzi

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \cdots + \frac{1}{(4n-1)\,(4n+3)} = \frac{n}{3\,(4n+3)} .$$

**8.** Korzystając z dwumianu Newtona dla $(a+b)^4$ wypisać wzory na

$$\begin{aligned}
(1+1)^4 &= \cdots \\
(2+1)^4 &= \cdots \\
(3+1)^4 &= \cdots \\
&\vdots \\
(n+1)^4 &= \cdots
\end{aligned}$$

a następnie, wykorzystując rezultaty zad.zad. 4 i 5 , wyprowadzić wzór na sumę

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 .$$

**9.** Przyjmując, że znane są już wzory na sumy potęg kolejnych liczb naturalnych

$$\begin{aligned}
S^1(n) &\overset{def}{=} 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 \\
S^2(n) &\overset{def}{=} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\
S^3(n) &\overset{def}{=} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \\
&\vdots \\
S^k(n) &\overset{def}{=} 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k
\end{aligned}$$

wyprowadzić wzór na sumę

$$S^{k+1}(n) \overset{def}{=} 1^{k+1} + 2^{k+1} + 3^{k+1} + \cdots n^{k+1}.$$

**10.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \, .$$

**11.** Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n$ zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \, .$$

**12.** Dla dowolnej liczby naturalnej $n$, obliczyć wartość wyrażenia

$$-1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)\binom{n}{n-1} + (-1)^n(n)\binom{n}{n} \, .$$

**13.** Wywnioskować nierówność Bernouliego z dwumianu Newtona dla dowolnego naturalnego wykładnika $n$, oraz dowolnej nieujemnej liczby rzeczywistej $x$.

**14.** Wywnioskować nierówność Bernouliego z dwumianu Newtona dla dowolnego naturalnego wykładnika $n$, oraz dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$.
*Wskazówka: warto podzielić przedział* $(-1, 0)$ *na dwa podprzedziały i osobno rozpatrywać przypadki* $x \in (-1, a]$ *oraz* $x \in (a, 0)$. *Jaką należy wybrać wartość* $a$ *?*

**15.** Wykazać, że dla dowolnych dwu liczb nieujemnych $a$, $b$ zachodzi nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \, .$$

**16.** Udowodnić dowolnym sposobem (np. metodą indukcji matematycznej) nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a średnią geometryczną dla układów $n$ liczb nieujemnych.

**17.** Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich $x$ i $y$ nierówność

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}\left(x^n + y^n\right)$$

jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych $n$.

**18.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1 \, .$$

**19.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 \, .$$

**20.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \, .$$

**21.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}} \, .$$

*Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba*