Temat II

Przegląd i rozszerzenie elementów matematyki szkolnej.

1. Wykazać, że:

a) dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x+y+z| \le |x| + |y| + |z|$;

b) dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $||x| - |y|| \le |x - y|$;

c) dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$. Znaleźć analogiczną formułę na $\min\{x, y\}$.

2. Obliczyć:

$$(5^{\frac{1}{5}} - 4^{\frac{1}{4}})(5^{\frac{1}{5}} - 3^{\frac{1}{3}})(5^{\frac{1}{5}} - 2^{\frac{1}{2}})(5^{\frac{1}{5}} - 1)(4^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{3}})(4^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{2}})(4^{\frac{1}{4}} - 1)(3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{3}} - 1)(2^{\frac{1}{2}} - 1).$$

3. Obliczyć:

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1} - 2} - 2} - 1 \right)^2.$$

4. Niech $f(x) = \sqrt{1 + x^2 + x^4}$. Wyznaczyć $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(\sqrt{x})$ i $f(x^2)$.

5. Wyznaczyć maksymalną dziedzinę (podzbiór zbioru $\mathbb{R}$), na której poniższy wzór prawidłowo określa funkcję:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; b) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$; c) $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x}}$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{4 - \sqrt{x}}$; e) $f(x) = \frac{x}{|x|}$; f) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

6. a) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach w punktach $(1, -5)$ i $(3, -1)$.
b) Znajdź środek i promień okręgu opisanego równaniem $2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y = 1$.
c) Znajdź wierzchołek paraboli opisanej równaniem $2y = x^2 - 4x + 8$.

7. a) Rozwiązać równanie $|x - 2| + |x - 8| = 1$.
b) Rozwiązać nierówność $||2x - 3| - 3| > 2$.
c) Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} |x + 1| + |y - 1| = 5, \\ |x + 1| = 4y - 4. \end{cases}$$

d) Rozwiązać układ nierówności:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ 2x \ge 15 - x^2. \end{cases}$$

8. Obliczyć:

a) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{15 + 6\sqrt{6}}$;

b) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

c) Obliczyć $x^3 - \frac{1}{x^3}$, jeżeli wiadomo, że $x - \frac{1}{x} = 4$.

9. W kartezjańskim układzie współrzędnych naszkicować wykres funkcji:
a) $y = f(x) = |1 - x| - |x - 2| - |x - 3|$;
b) $y = f(x) = |x - 1|\,(|x| - 1)$.

10. Znaleźć wartość parametru $m \in \mathbb{R}$ tak, aby jeden z pierwiastków równania $4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$ był kwadratem drugiego.

11. Znaleźć wartość parametru $m \in \mathbb{R}$ tak, aby różnica pierwiastków równania $x^2 + mx + 7 = 0$ wynosiła 1.

12. Iloczyn trzech kolejnych początkowych wyrazów postępu arytmetycznego o różnicy $d = \frac{1}{2}$ wynosi $\frac{495}{4}$. Jaki to postęp?

13. Wykazać, że nie istnieje wielomian $W(x)$ o wszystkich współczynnikach całkowitych, dla którego zachodzi: $W(13) = 3$ i $W(17) = 5$.

14. Rowerzysta przejechał 96 km w czasie o 2 godziny krótszym, niż zaplanował. W ciągu każdej godziny przejeżdżał o 1 km więcej, niż planował przejeżdżać w ciągu 5 kwadransów. Z jaką prędkością jechał? *(Przyjmujemy, że rowerzysta poruszał się ze stałą prędkością.)*

15. Wykazać, że wykres dowolnego trójmianu kwadratowego posiada oś symetrii. Czy wykres dowolnego wielomianu stopnia parzystego posiada oś symetrii?

16. Rozwiązać nierówności:

a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < 0$; b) $\frac{14}{x^2-5x+6} < \frac{10}{2-x} - 3$.

17. Rozwiązać równanie:

$$x^2 + 4x - 16\sqrt{2x} + 20 = 0.$$

18. Wykazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności:

a) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 4x + 4 > 0$; b) $x^2 - x + \frac{1}{2} > 0$; c) $x^4 - x + 1 > 0$.

19. Rozwiązać równanie $\sin x + \cos 2x = 0$.

20. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}; \\ \cos^2 y - \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba