Temat XIII.

Reguła de l'Hospitala. Wzór Taylora.

1. Korzystając (lub nie) z reguły de L'Hospitala wyznaczyć następujące granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos(\pi x)}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x + x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x + x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$; h) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{\ln(x-1)}\right)$; i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$; k) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; l) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \left[\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x - e\right]$.

2. Obliczyć granice (np. wykorzystując szeregi Taylora):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \ln(\sqrt{1 + x^2} - x)}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2\sin x - 2\operatorname{tg} x}{x^5}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{x^3}$.

3. Wyznaczyć rozwinięcie funkcji f w szereg Taylora we wskazanym punkcie x_0 oraz obliczyć promień zbieżności tego szeregu:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = \dfrac{1}{2 + x^2}$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \dfrac{1 + x}{2 + 3x^2}$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(4-x)}$, $x_0 = 3$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(4-x)}$, $x_0 = \dfrac{5}{2}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$, $x_0 = 5$;

g) $f(x) = (1 + x)^2$, $x_0 = 2$; h) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{2}}$, $x_0 = 0$

i) $f(x) = (1 - x)^{\frac{1}{3}}$, $x_0 = 0$; j) $f(x) = (1 - x)^{-\frac{1}{3}}$, $x_0 = 0$;

k) $f(x) = \sin(x^2)$, $x_0 = 0$; l) $f(x) = \sin^2(x)$, $x_0 = 0$.

4. Korzystając ze wzoru Taylora dla odpowiednich funkcji, wyznaczyć:

a) liczbę e z dokładnością do 5 miejsc po przecinku;
b) $\sqrt{105}$ z dokładnością do 3 miejsc po przecinku.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba