

## Temat I

### I. Elementy logiki, wyciąganie wniosków, poprawność sformułowania.

1. Przypisz wartość PRAWDA/FALSZ następującym stwierdzeniom:

a) Jeśli A jest spokrewniony z B i B jest spokrewniony z C, to A jest spokrewniony z C.

*Uwaga: przez 'niespokrewnieni' rozumiemy: 'niemający wspólnego przodka w zarejestrowanej historii'.*

Czy odpowiedź ulegnie zmianie w kulturze, w której mąż i żona (ściślej: rodzice wspólnego dziecka) uważani są za krewnych?

Czy odpowiedź ulegnie zmianie, jeśli relację pokrewieństwa ludzi wywodzić będziemy na podstawie Rdz 2,22 '...z żebra, które wyjął z mężczyzny zbudował niewiastę'?

b) Jeśli liczba całkowita dodatnia  $a$  nie jest podzielna przez żadną liczbę naturalną mniejszą od  $a$ , to  $a$  jest liczbą pierwszą.

*Definicja: liczba pierwsza to taka liczba naturalna, która posiada dokładnie dwa różne dzielniki naturalne.*

c) Jeśli  $b|a$  oraz  $c|a$ , to  $(bc)|a$ .

*Uwaga: symbol  $b|a$  oznacza 'liczba całkowita  $a$  dzieli się bez reszty przez liczbę całkowitą  $b$ '.*

d) Jeśli  $\alpha$  jest takim kątem, że  $4\sin^2\alpha = 1$ , to istnieje trójkąt równoramienny, którego oba kąty przy podstawie mają miarę  $\alpha/2$ .

2. Przechodzień na spacerze spostrzega kobietę z dwójką identycznie wyglądających chłopców. – O, bliźniaki! - pomyślał. Czy wyciągnął poprawny wniosek?

3. Zanegować zdania:

a) Jaś dobrze gra w szachy i w ping-ponga.

b) Jeśli Jaś nie będzie trenował, to nie wygra turnieju.

c) Jaś wygra turniej wtedy i tylko wtedy, gdy włoży wiele wysiłku w przygotowania.

d) Każdą kelnerką z baru X interesuje się co najmniej dwóch klientów i szatniarz.

Jaka jest wartość logiczna zdania z podpunktu d, jeśli bar X zatrudnia tylko kelnerów?

Jaka jest wartość logiczna tego zdania, jeśli w barze X pracuje jedna kelnerka, ale nie ma szatniarza?

4. Dana jest funkcja zdaniowa  $\Phi(m, x)$  o dwóch argumentach rzeczywistych  $m, x$ :

$$\Phi(m, x) \Leftrightarrow mx^2 + mx + 4 > 0.$$

Które z poniższych zdań są prawdziwe:

a)  $\forall m \forall x \Phi(m, x)$ .

b)  $\forall m \exists x \Phi(m, x)$ .

c)  $\exists m \forall x \Phi(m, x)$ .

d)  $\exists m \exists x \Phi(m, x)$ .

e)  $\forall x \exists m \Phi(m, x)$ .

f)  $\exists x \forall m \Phi(m, x)$ .

5. Czy prawdziwe są zdania:

a)  $\forall m \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} x^2 - m^2 = mx$

b)  $\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} x^2 + mx + m > 0$

6. Dla jakich wartości parametru  $m \in \mathbb{R}$  dwa z podanych niżej zdań są prawdziwe, a jedno fałszywe?

a) Równanie  $x + \frac{1}{x} = m$  nie ma rozwiązań.

b)  $\sqrt{m^3 - 4m + 4} = 2 - m$ .

c) Układ równań:  $x + y^2 = m, x - \sin^2 y = -3$  ma dokładnie jedno rozwiązanie.

7. Wiadomo, że zdanie:

“Krzyś jest bratem Zosi, albo Zosia nie jest siostrą Marka” jest fałszywe.

- a) Czy Krzys i Marek są rodzeństwem (tzn. mają tych samych ojca i matkę)?  
 b) Czy odpowiedź na to pytanie zmienia się, jeżeli przez ‘rodzeństwo’ (brat, siostra) będziemy rozumieć również rodzeństwo przyrodnie?  
 c) Jak będą brzmiały - zależnie od interpretacji słowa ‘rodzeństwo’ - odpowiedzi na pytanie ‘Czy Krzys i Marek mają tego samego ojca?’  
 d) Jak będą brzmiały - zależnie od interpretacji słowa ‘rodzeństwo’ - odpowiedzi na pytanie ‘Czy Zosia ma wspólnego ojca z (dokładnie) jednym z chłopców?’  
 e) Jak będą brzmiały - zależnie od interpretacji słowa ‘rodzeństwo’ - odpowiedzi na pytanie ‘Czy Zosia ma wspólnego ojca z co najwyżej jednym z chłopców?’

*Uwaga: “zachodzi  $p$  albo  $q$ ” oznacza, że “zachodzi  $p$  lub  $q$ , ale nie zachodzi  $p$  i  $q$ ”.*

**8. Oceń poprawność następującego wnioskowania:**

Sobieski odniósł zwycięstwo w bitwie pod Chocimiem i Sobieski był królem Polski, zatem król Polski zwyciężył w bitwie pod Chocimiem.

*Uwaga: 11.XI.1673 r. panującym królem Polski był Michał Korybut Wiśniowiecki.*

**9.** W klasie liczącej 30 uczniów każdy uczy się co najmniej dwóch języków obcych. Wiadomo, że 20 uczniów uczy się angielskiego, 21 uczniów uczy się niemieckiego oraz 19 uczniów uczy się hiszpańskiego. Ilu uczniów uczy się wszystkich trzech oferowanych przez szkołę języków?

**10.** W klasie liczącej 24 uczniów każdy uczy się co najmniej dwóch języków obcych. Wiadomo, że 16 uczniów uczy się angielskiego, 17 uczniów uczy się niemieckiego oraz 18 uczniów uczy się hiszpańskiego. Ilu uczniów uczy się wszystkich trzech oferowanych przez szkołę języków?

**11.** W podanej niżej częściowej tabelce wartości funkcji liniowej nie wszystkie wartości dobrane są poprawnie.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	2	6	4	2	6

- a) Czy możliwe jest, że co najmniej cztery wartości są podane poprawnie?  
 b) Czy możliwe jest, że dokładnie trzy wartości podano poprawnie?  
 c) Czy możliwe jest, że co najmniej dwie wartości podano poprawnie?  
 d) Czy możliwe jest, że co najmniej jedną wartość podano poprawnie?  
 e) Czy możliwe jest, że żadnej wartości nie podano poprawnie?

W każdym z podpunktów, w którym odpowiedź brzmi “TAK” określ ile funkcji liniowych może w takiej sytuacji spełniać warunki wynikające z tabelki.

**12.** Na płaszczyźnie zaznaczyć zbiór punktów, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają warunki: a)  $x^2 + y^2 \geq 2$ ;

b) wartość sumy  $|x| + |y|$  nie przekracza 2.

**13. Niech**

$$A = \{(x, y) : y < x\}, \quad B = \{(x, y) : \frac{y}{x} < 1\}.$$

Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory:

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A.$$

**14. Niech**

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}, \quad B = \{(x, y) : x + y > 0\}.$$

Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory:

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A.$$

**15.** Dane są dwie nierówności:  $x^2 - 9 > 0$  oraz  $x^2 - 4x \leq 0$ . Na osi liczbowej zaznaczyć zbiór liczb spełniających:

- a) obie nierówności,
- b) dokładnie jedną z tych nierówności,
- c) przynajmniej jedną z tych nierówności.

## **II. Przygotowanie do rozumowań indukcyjnych i dwumianu Newtona; wzory skróconego mnożenia.**

**16.** Jaką najmniejszą liczbę rzutów kostką trzeba wykonać, żeby na pewno wśród otrzymanych rezultatów była co najmniej jedna szóstka?

**17.** W dwudziestu rzutach monetą wypadły same orły. Czy możemy z całą pewnością wnioskować, że moneta jest błędodrukiem (tzn. ma orła zarówno na awersie, jak i na rewersie)?

**18.** Wśród liczb 1,2,...,10 są cztery liczby pierwsze. Wśród kolejnej dziesiątki liczb: 11,12,...,20 znów są cztery liczby pierwsze. Ile jest liczb pierwszych wśród dziesiątek liczb: 21,22,...,30; 31,32,...,40? Czy w każdej dziesiątce kolejnych liczb naturalnych jest co najmniej jedna liczba pierwsza?

**19.** Wypisujemy kilkadziesiąt (na przykład 40) kolejnych potęg dwójki, poczynając od  $2^0$ : 1,2,4,8,16,32,64,128,..., $2^{39}$ . Odnotowujemy, jaką cyfrą zaczynają się otrzymane liczby; otrzymujemy: 1248136125124813612512481...itd. Można zauważyć, że w wypisanym ciągu 40 tak uzyskanych cyfr ani razu nie pojawia się cyfra 9 ani cyfra 7, natomiast wszystkie inne cyfry znaczące pojawiają się wielokrotnie. Czy można stąd wyciągnąć wniosek, że liczba postaci  $2^n$  nie może zaczynać się w zapisie dziesiętnym od cyfry 9 (ani 7)?

**20.** Przypominamy, że:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

- a) Zapisz  $a^3 - b^3$  w postaci  $(a - b)(...)$ .
- b) Zapisz  $a^3 + b^3$  w postaci  $(a + b)(...)$ .
- c) Zapisz  $a^4 - b^4$  w postaci  $(a - b)(...)$ .
- d) Czy można zapisać  $a^4 + b^4$  w postaci  $(a + b)(...)$ ?
- e) Zapisz  $a^4 + b^4$  jako iloczyn dwu czynników, z których każdy jest sumą jednomianów, niezawierających  $a^3$ ,  $a^4$ ,  $b^3$ ,  $b^4$  (tzn. wyrażenia te nie zawierają potęg  $a$  ani  $b$  wyższych niż druga).
- f) Zapisz  $a^n - b^n$  w postaci  $(a - b)(...)$ .
- g) Zapisz  $a^{2n+1} + b^{2n+1}$  w postaci  $(a + b)(...)$ .

**21.** Oblicz:

- a)  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ , jeśli wiadomo, że  $x + \frac{1}{x} = a$ ,  $|a| \geq 2$ .
- b)  $x^3 + y^3$ , jeśli wiadomo, że  $x + y = a$  oraz  $xy = b$ .

**22.** Oblicz:

$$\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}.$$

**23.** Wykaż, że jeśli liczba  $n$  jest różnicą kwadratów dwóch liczb naturalnych, to liczba  $5n$  też jest różnicą kwadratów dwóch liczb naturalnych.

*Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba*