Temat XII.

Twierdzenie Lagrange'a, badanie przebiegu funkcji.

1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Czy prawdą jest, że dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieje para punktów $a < x_0 < b$ taka, że $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

2. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a wykazać, że:
a) $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$, dla $x > 0$.
b) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$, dla $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Znaleźć przedziały monotoniczności następujących funkcji:
a) $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.
b) $f(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$.
c) $f(x) = e^x \cos x$.

4. a) Wykazać, że $f(x) = x + \sin x$ jest funkcją ściśle rosnącą na całej prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.
b) Wywnioskować stąd, że istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
c) Określić, dla jakich argumentów $y \in \mathbb{R}$ istnieje pochodna funkcji odwrotnej, $(f^{-1})'(y)$ (skończona; niewłaściwa).

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x + \sin 2x$.

6. Wykazać, że ze wszystkich prostokątów o zadanym stałym obwodzie największe pole ma kwadrat.

7. Wyznaczyć długości krawędzi prostopadłościennego pojemnika bez pokrywy, o kwadratowym dnie i pojemności 0,5 metra sześciennego, aby na jego wykonanie zużyć jak najmniej materiału.

8. Wykazać, że dla promienia świetlnego, poruszającego się ze stałą prędkością c od punktu A do punktu B, z odbiciem od powierzchni lustra w takim punkcie, by czas przebycia tej trajektorii był minimalny, spełniona jest zasada 'kąt padania jest równy kątowi odbicia'. Porównać uzyskany rezultat z prawem załamania światła przy przechodzeniu z jednego ośrodka do drugiego.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba