Temat X

Funkcje ciągłe c.d.

1. Zbadać, które z poniższych funkcji są ograniczone. Które osiągają swój kres górny, które osiągają swój kres dolny?

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\quad D_f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$; $\quad D_f = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\quad D_f = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; $\quad D_f = (-1, 1)$.

e) $f(x) = \dfrac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$; $\quad D_f = (1, +\infty)$.

f) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$; $\quad D_f = (1, +\infty)$.

g) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$; $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

h) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$; $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

i) $f(x) = e^{-x}\cos x$; $\quad D_f = (0, +\infty)$.

j) $f(x) = e^{-x}\cos x$; $\quad D_f = [0, +\infty)$.

2. Zbadać, czy funkcja $f(x)$ posiada funkcję odwrotną. Określić dziedzinę funkcji odwrotnej (wtedy, gdy istnieje). Zbadać ciągłość funkcji odwrotnej na jej dziedzinie.

a) $f(x) = x^2$; $\quad D_f = [-2, 1]$.

b) $f(x) = x^2$; $\quad D_f = [-2, -1]$.

c) $f(x) = x^3$; $\quad D_f = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = 2^{x^3}$; $\quad D_f = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; $\quad D_f = (-2\pi, -\pi)$.

f) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$; $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

g) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\quad D_f = \mathbb{R}$.

h) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. a) Wykazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ spełnia warunek Lipschitza na każdej półprostej $(\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$, natomiast nie spełnia warunku Lipschitza na półprostej $(0, +\infty$.)
b) Wykazać, że funkcja $f(x) = x^2$ spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale ograniczonym, natomiast nie spełnia warunku Lipschitza na żadnej półprostej.
c) Wykazać, że funkcja $f(x)$ określona na przedziale ograniczonym i spełniająca na swojej dziedzinie warunek Lipschitza ma ograniczony zbiór wartości.

4. Podać przykład funkcji ciągłej $f(x)$, określonej na dziedzinie $D_f = [0, 1)$, takiej, że obrazem przedziału $[0, 1)$ jest:

a) $(0,1]$, b) $[0,1]$, c) $(0,1)$;

d) $[0,+\infty)$, e) $(0,+\infty)$, f) $(-\infty,+\infty)$.

5. a) Uzasadnić, że wśród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu R istnieje taki,którego pole jest maksymalne.
b) Turysta, wyruszając z bazy włącza stoper i wędruje na szczyt. Po dotarciu do celu resetuje stoper i natychmiast rusza w drogę powrotną (tym samym szlakiem). Wykazać, że istnieje na szlaku takie miejsce, że wskazanie stopera w tym miejscu było takie samo w drodze 'tam' jak i z powrotem.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba