

Temat IV+.

Średnia ważona. Kresy zbiorów liczbowych i nierówności między średnimi. Procent składany, wartość bieżąca, funkcja wykładnicza, logarytm.

Wyniki liczbowe należy podawać w przybliżeniu, z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

1. Do zasilania awaryjnego podłączamy dwie maszyny. Wiadomo, że jeśli uruchomimy tylko drugą, to będzie pracować przez 10 godzin. Jeśli włączymy je razem, to paliwa wystarczy na 4 godziny. Na ile czasu wystarczy rezerwa energii, jeśli uruchomimy wyłącznie pierwszą maszynę?

2. Do zasilania awaryjnego podłączamy dwie maszyny. Moc pierwszej można regulować, a drugiej nie. Wiadomo, że jeśli uruchomimy tylko drugą, to będzie pracować przez 10 godzin. Jeśli włączymy je razem i pierwszą nastawimy na pełną moc, to paliwa wystarczy na 4 godziny. Jak należy zredukować moc pierwszej maszyny, by włączone razem pracowały przez 6 godzin?

3. a) Wyznaczyć kres górny zbioru wszystkich liczb postaci

$$\Delta = \left\{ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right\},$$

takich, że liczby a, b, c spełniają układ nierówności $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$, (tzn. istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c).

b) Wyznaczyć kres dolny zbioru wszystkich liczb postaci

$$\Delta = \left\{ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right\},$$

gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami dodatnimi.

4. a) Przez dwa kolejne dni notowań indeks giełdowy wzrastał po 10% dziennie, a przez kolejne dwa dni spadał po 10% dziennie. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po czwartym dniu notowań?

b) Przez dwa kolejne dni notowań indeks giełdowy spadał po 10% dziennie, a przez kolejne dwa dni rósł o 10% dziennie. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po czwartym dniu notowań?

c) Pierwszego dnia indeks wzrósł o 10%, drugiego dnia spadł o 10%, trzeciego dnia znów wzrósł o 10% i czwartego dnia ponownie odnotował dziesięcioprocentowy spadek. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po czwartym dniu notowań?

d) Przez kolejnych 10 dni roboczych indeks rósł codziennie o 10%. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po dziesiątym notowaniu?

e) Przez kolejnych 10 dni roboczych indeks spadał codziennie o 10%. Jaka była procentowa zmiana wartości tego indeksu po dziesiątym notowaniu?

5. Gospodarka pewnego kraju przez ostatnich 100 lat rozwijała się w stabilnym tempie 2% rocznie. W tym czasie gospodarka sąsiada przez pół wieku także rozwijała się stabilnie w takim samym tempie, ale oprócz tego zaznała 11 lat ostrego kryzysu, kiedy PKB zmniejszało się o 4% rocznie, 21 lat stagnacji bez zmiany PKB, oraz 18 lat dynamicznego rozwoju, z corocznym wzrostem PKB po 8%. Początkowo oba kraje stały na tym samym poziomie rozwoju gospodarczego. Który z nich jest obecnie zamożniejszy?

6. Pewną planetę zamieszkuje 7 miliardów - uważających się za rozumnych - mieszkańców. Przyjmując, że roczny przyrost naturalny będzie w kolejnych latach utrzymywał się na poziomie 1,2% obliczyć wielkość populacji po

- a) 5 latach,
- b) 10 latach,
- c) 20 latach.

Po jakim czasie wielkość populacji ulegnie podwojeniu? A kiedy przekroczy 20 miliardów?

Nominalna stawka oprocentowania (stopa procentowa) wkładu lub kredytu podawana jest w stosunku rocznym, bez uwzględnienia kapitalizacji odsetek. Oprocentowanie efektywne – także wyrażane w procentach w stosunku rocznym – uwzględnia liczbę kapitalizacji odsetek w ciągu roku. Jeśli np. lokując wkład A_0 po roku mamy kwotę $A_1 = (1 + r)A_0$, to znaczy, że efektywna roczna stawka oprocentowania dla tej lokaty wynosi r .

Przy naliczaniu odsetek w sposób ciągły sumę A_t zgromadzoną na lokacie o nominalnej stopie procentowej r , po upływie t lat, oblicza się według wzoru $A_t = A_0 e^{rt}$, gdzie A_0 jest wkładem początkowym.

7. a) Fundusz oferuje nominalne oprocentowanie według stawki 8% i kapitalizację odsetek co kwartał. Jakie jest oprocentowanie efektywne?

b) Fundusz stosujący comiesięczną kapitalizację odsetek reklamuje się, że efektywna stawka oprocentowania oszczędności wynosi 10%; wkłady przyjmuje jednak tylko na okres 3 miesięcy. Ile zyskuje deponent (procentowo, w stosunku do wysokości wkładu) po upływie trzymiesięcznej umowy?

c) Przeliczyć ponownie przykłady z podpunktów **a)** i **b)** przy dodatkowym założeniu, że każdorazowo w momencie doliczania odsetek odciągany jest 19% podatek od dochodów z oszczędności.

8. a) Przy jakiej wysokości nominalnej stopy procentowej, z odsetkami doliczanymi jeden raz na koniec każdego roku, wkład podwoi się po 10 latach?

b) Przy jakiej wysokości nominalnej stopy procentowej z odsetkami doliczanymi co miesiąc, wkład podwoi się po 10 latach?

c) Przy jakiej wysokości nominalnej stopy procentowej z odsetkami doliczanymi codziennie (365 razy rocznie, nie uwzględniamy przestępności lat), wkład podwoi się po 10 latach?

9. a) Bank reklamuje “lokatę dynamiczną – oprocentowanie lokat nawet do 12%”, ale w istocie stosuje progresywne oprocentowanie wkładu, po każdym miesiącu podnosząc je o 1 punkt procentowy i zaczynając od 1% w pierwszym miesiącu. Kapitalizacja odsetek następuje co miesiąc. Jakie jest oprocentowanie efektywne?

b) Przeliczyć ponownie przykład z punktu **a)** z uwzględnieniem podatku Belki, tak jak w zadaniu 5c).

10. Bank udziela kredytu według nominalnej stopy 8%. Kredyt ma być spłacony w 12 równych comiesięcznych ratach. Odsetki, obliczane od wartości zadłużenia we właśnie kończącym się miesiącu, doliczane są ostatniego dnia miesiąca, po czym następuje zapłata raty. Klient zaciąga kredyt na 100 000 złotych. Ile wyniesie suma zapłaconych przez niego rat?

11. Wkład 10 000 złotych został zdeponowany na lokacie o stopie nominalnej 8%, przy czym odsetki naliczane są w sposób ciągły. Ile wyniósł średni roczny przychód, jeśli umowa podpisana była na okres 5 lat? A ile, jeśli na 20 lat?

12. Chcemy zdeponować na lokacie taką sumę, by za dwa lata mieć do wypłacenia milion złotych. Jaką sumę trzeba wpłacić dziś, jeśli nominalna stopa procentowa wynosi 10%, a odsetki naliczane są:

- a) rocznie,
- b) co pół roku,
- c) co miesiąc,
- d) w sposób ciągły?

Wyliczone dla takich inwestycji wielkości początkowe, ekonomiści nazywają czasami bieżącą wartością kwoty pieniędzy podanej dla określonej chwili w przeszłości.

13. Dla pewnej inwestycji, wartość bieżąca kwoty V_1 , którą moglibyśmy otrzymać za t_1 lat, jest taka sama jak wartość bieżąca kwoty V_2 , do zainkasowania za t_2 lat. Wykazać, że dla tej inwestycji wartość bieżąca kwoty V_1 do odbioru za $t_1 + k$ lat, jest taka sama jak wartość bieżąca kwoty V_2 , otrzymanej za $t_2 + k$ lat.

14. Badania rynkowe wykazały, że po zaniechaniu reklamy produktu, zmniejszenie jego sprzedaży następuje w taki sposób, że po upływie t miesięcy można z dobrym przybliżeniem wielkość sprzedaży wyrazić wzorem $S(t) = S_0 e^{-\lambda t}$, gdzie λ jest pewnym współczynnikiem charakterystycznym dla danego produktu, zaś za S_0 przyjmujemy wielkość sprzedaży w ostatnim miesiącu wspierania się reklamą. Firma zaprzestała reklamy jednego ze swoich produktów i planuje wznowić kampanię reklamową, gdy sprzedaż tego produktu spadnie o 25%. Po pierwszym tygodniu sprzedaż spadła o 5%. Po jakim czasie firma będzie musiała wznowić reklamę tego produktu?

15. Don Giovanni ma pożyczyć komuś 1 mln euro na rok, przy (lichwiarskim) nominalnym oprocentowaniu 100% rocznie. Czy może ustalić liczbę okresów odsetkowych (czyli takich, po których następuje kapitalizacja odsetek) o równej długości tak, by uzyskać po roku co najmniej

- a) 2,5 mln euro; b) 2,7 mln euro; c) 3 mln euro.

W przypadku odpowiedzi pozytywnej podaj wzór, za pomocą którego Don Giovanni, dysponując kalkulatorem, mógłby szybko ustalić tę liczbę.

16. W chwili narodzin dziecka zakładamy mu osobne konto oszczędnościowe, na poczet przyszłych wydatków na studia. Nominalne oprocentowanie wynosi 6%. Będziemy z dużą, równomierną częstością dokonywać jednakowych, drobnych wpłat (tak, że praktycznie odsetki składają się w sposób ciągły) w takiej wysokości, by łącznie w ciągu każdego roku suma naszych wpłat wyniosła P złotych. Planujemy do momentu osiągnięcia przez dziecko pełnoletniości uszłukać na tym koncie 30 000 złotych, licząc razem z odsetkami. Jaka powinna być wartość P ?

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba