Temat V

Ciągi I.

1. Które z podanych ciągów są ograniczone:
a) $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$,

b) $a_n = \sin n$,

c) $a_n = \frac{1-n}{1-2\sqrt{n}}$,

d) $a_n = \frac{1+\sqrt[99]{n}}{1+\sqrt[100]{n}}$.

2. Wykazać, że ciąg

$$a_n = \frac{n^3+4n^2+n-1}{n^4+n^3+2n^2-2n-1}$$

jest ograniczony. Wskazać (jakiekolwiek) ograniczenie górne i dolne zbioru wyrazów tego ciągu.

3. Wyznaczyć najmniejszy wyraz ciągu:
a) $a_n = n^2 - 5n + 6$,

b) $a_n = |n^2 - 5n + 6|$,

c) $a_n = |n^2 - 5n + 1|$,

d) $a_n = |n^2 - 13| - 2000n$,

e) $a_n = \sqrt{n^2 - 3n + 6}$.

4. Wyznaczyć najmniejsze n_0 takie, że dla wszystkich $n \geq n_0$ zachodzi $a_{n+1} > a_n$, lub $a_{n+1} < a_n$, jeśli:
a) $a_n = n^2 - 8n + 7$,

b) $a_n = -\frac{1}{3n+17}$,

c) $a_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$,

d) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

5. Rozstrzygnąć, czy podane ciągi są monotoniczne:
a) $a_n = \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^{n+1} + 3^n}$,

b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n$,

c) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n$,

d) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n$.

6. Wykazać, że ciąg

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{5}, \\ a_2 &= \sqrt{5+\sqrt{5}}, \\ a_3 &= \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_n \quad = \quad \underbrace{\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+...}}}}_{n \text{ pierwiastków}}$$

jest ciągiem ściśle rosnącym i ograniczonym (z góry i z dołu).

7. Ciąg (F_n), nazywany ciągiem Fibonacciego, określony jest następująco: $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Metodą indukcji matematycznej wykazać, że

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Zbadać, czy ciąg $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ jest monotoniczny.

Wykazać, że ciągi $b_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$ oraz $c_n = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$ są monotoniczne.

8. Wyznaczyć bezpośredni wzór (tzn. funkcję argumentu $n \in \mathbb{N}$) na $n-$ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie:
a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n^2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 4a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
c) $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 4a_n + 2^n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
d) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
e) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
f) $a_{n+2} = a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
g) $a_{n+2} = a_n + n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
h) $a_{n+2} = a_n + (-1)^n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
i) $a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

9. Wykorzystując rezultaty zadań $4, 5, 8$ i 9 z ćwiczeń nr 2, obliczyć granice

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2},$$

$$\text{b)} \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3},$$

$$\text{c)} \lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4},$$

$$\text{d)} \lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}.$$

10. Obliczyć granicę ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \frac{5^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}.$$

11. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{n^2 + (-1)^n \cdot n}{(n+\sqrt{3})^2}.$$

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba