Temat VII

Szeregi.

1. Wykazać, że jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Obliczyć, przyjmując że $|x| < 1$, $a \neq 0$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ax^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} anx^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} an^2x^n$.

3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum a_n$ o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \dfrac{3n+2}{5n^2-n+1}$, b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n^2+1}}$, c) $a_n = \dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+n}-n)}$,

d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$, e) $a_n = \dfrac{n^{10}}{10^n}$, f) $a_n = \dfrac{1000^n}{n!}$,

g) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, h) $a_n = \dfrac{(n!)^2 \cdot 3^n}{(2n)!}$, i) $a_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$,

j) $a_n = \left(\dfrac{2n+2}{3n+2}\right)^{\frac{n}{4}}$, k) $a_n = \dfrac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{4^n}$, l) $a_n = \left(\dfrac{2+(-1)^n}{\pi}\right)^n$.

4. Wykazać, że $\forall\, x > 0$ zbieżny jest szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

5. Podać przykład szeregu $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich, takiego że $\sum a_n < +\infty$, ale $\sum a_n \ln n = +\infty$.

6. Podać przykład szeregu $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich takiego, że $\sum a_n = +\infty$, ale $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln(\ln n)} < +\infty$.

7. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \dfrac{n}{10^{\ln n}}$, c) $a_n = \dfrac{1}{\ln(n!)}$, d) $a_n = \dfrac{1}{n \cdot 10^{\ln(\ln n)}}$.

8. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{18} + \cdots$

b) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \cdots$

d) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} - \frac{1}{16} + \frac{1}{33} + \frac{1}{34} - \cdots$

e) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$

f) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \cdots$

g) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots$

h) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\cdots$

i) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}-\frac{6}{2^6}+\frac{7}{2^7}+\frac{8}{2^8}-\frac{9}{2^9}+\cdots$

j) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots$

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba