Temat VI

Ciągi II.

1. Zbadać zbieżność i obliczyć granicę (być może niewłaściwą) ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jeśli wyraz ogólny zadany jest następująco:

a) $a_n = \frac{\left(\sqrt{n+8\sqrt{n}}\right)^4}{\left(n+3\sqrt{n}\right)^2}$,

ą) $a_n = \frac{n(\sqrt{3n}-7)^2}{(\sqrt{n+2}+2)^4}$,

b) $a_n = \sqrt{\frac{n+(-1)^n \sqrt[4]{n}}{(3n+\sqrt{2n})^2}}$,

c) $a_n = \frac{\binom{n+2}{n+1}^2}{2+4+6+\cdots+2n}$,

ć) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

d) $a_n = \sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-n}$,

e) $a_n = \sqrt{5n^2-3n} - n\sqrt{5} + 8$,

ę) $a_n = \sqrt{n^4+3n^2+5} - \sqrt{n^4-n^2+n}$,

f) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,

g) $a_n = \frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+3}}$,

h) $a_n = n(\sqrt[3]{n^3+n+2} - n)$,

i) $a_n = \sqrt[3]{n(n+1)^2} - \sqrt[3]{n(n-1)^2}$,

j) $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$,

k) $a_n = \frac{\cos(n!)}{\sqrt{n}}$,

l) $a_n = \frac{\sqrt[n]{3}-1}{2+(-1)^n}$,

ł) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}-1}{3+(-1)^n}$,

m) $a_n = \sqrt[n]{1+\sqrt{\binom{n}{2}}}$,

n) $a_n = \sqrt[n]{2^n+n^2}$,

ń) $a_n = \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$,

o) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$,

ó) $a_n = n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)$,

p) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$,

q) $a_n = \frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4+(n+1)^4}$,

r) $a_n = \frac{1!+3!+5!+\cdots+(2n-1)!}{2!+4!+6!+\cdots+(2n)!}$,

s) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$,

ś) $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n-1}$,

t) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}}$,

u) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1}$,

v) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}$,

w) $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-n}$,

x) $a_n = \left(\frac{1+\sqrt[n]{2}}{2}\right)^n$,

y) $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, gdzie F_n jest n-tym wyrazem ciągu Fibonacciego,

z) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$,

ź) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$,
ż) $a_1 = 0,\ a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ dla $n = 2, 3, \ldots$.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba