Temat XI

Pochodne funkcji.

1. Oblicz pochodne podanych funkcji tam, gdzie istnieją.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$. b) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
d) $f(x) = \sin^3 x$. e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$. f) $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$.
g) $f(x) = e^{-x}$. h) $f(x) = e^{x^2}$. i) $f(x) = x \ln x$.
j) $f(x) = \log_2 x$. k) $f(x) = \log_x 2$. l) $f(x) = x^x$.
m) $f(x) = x^{x^2}$. n) $f(x) = (x^x)^2$.

2. Zbadaj, czy podana funkcja jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

a) $f(x) = x|x|$;
b) $f(x) = |x|^3$;
c) $f(x) = |\sin^3(x)|$;
d) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0; \end{cases}$
e) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0; \end{cases}$
f) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0. \end{cases}$

3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^x$ w punkcie $(2, 4)$.

4. Obliczyć pod jakimi kątami przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$.

5. Wyznaczyć, pod jakimi kątami przecinają się wykresy funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $g(x) = x^3$.

6. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć $(f^{-1})'(0)$, gdzie $f(x) = x + \sin x$.

7. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalną funkcją nieparzystą, tzn. $f(-x) = -f(x)$. Wykazać, że $f'(x)$ jest funkcją parzystą.

8. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją parzystą, różniczkowalną w punkcie $x_0 = 0$. Wykazać, że $f'(0) = 0$.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba