

## Temat IX

### Funkcje. Ciągłość funkcji.

**0.** Znaleźć granicę lewostronną i prawostronną funkcji:

a)  $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ , w punkcie  $x = 1$ ,

b)  $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ , w punkcie  $x = 0$ .

**1.** Znaleźć funkcje  $f(g(x))$  oraz  $g(f(x))$ , gdy:

a)  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $g(x) = 2x + 3$ ;

b)  $f(x) = -17$ ,  $g(x) = |x|$ ;

c)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ,  $g(x) = x^2 + 3$ ;

d)  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ;

e)  $f(x) = x^3 - 4$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x + 4}$ .

**2.** Znaleźć funkcję postaci  $f(x) = x^k$  ( $k$  nie musi być całkowite) oraz funkcję  $g(x)$  tak, aby zachodziło  $f(g(x)) = h(x)$ , gdzie:

a)  $h(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ ;

b)  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 10}}$ ;

c)  $h(x) = \frac{1}{(1 + x + x^2)^3}$ .

**3.** Niech  $f(x) = 1 + x^2$ . Znaleźć taką funkcję  $g(x)$ , aby zachodziło

$$f(g(x)) = 1 + x^2 - 2x^3 + x^4.$$

**4.** Niech  $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ . Znaleźć taką funkcję  $f(x)$ , aby zachodziło

$$f(g(x)) = 3 + 2\sqrt{x} + x.$$

**5.** Wyznaczyć  $g(x)$  takie, by zachodziło  $f(g(x)) = h(x)$ , gdzie

$$f(x) = x^2, \quad h(x) = x^4 + 1.$$

**6.** a) Czy można tak dobrać wartość  $f(1)$ , by funkcja określona dla  $x \neq 1$  wzorem

$$f(x) = \frac{|x - 1|}{(x - 1)^3}$$

była ciągła na  $\mathbb{R}$ ?

b) Czy można tak dobrać wartości  $f(-2)$ ,  $f(3)$ , by funkcja określona dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$  wzorem

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - x - 6}$$

była ciągła na  $\mathbb{R}$ ?

c) Czy można tak dobrać wartości  $f(-1)$ ,  $f(1)$ , by funkcja określona dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  wzorem

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}$$

była ciągła na  $\mathbb{R}$ ?

7. a) Wykaż, że równanie  $x^4 + 2x - 1 = 0$  posiada pierwiastek rzeczywisty w przedziale  $[0, 1]$ .  
b) Wykaż, że równanie  $x^5 - 5x^3 + 3 = 0$  posiada pierwiastek rzeczywisty w przedziale  $[-3, 2]$ .  
c) Wykaż, że równanie  $x^3 - 4x + 1 = 0$  posiada trzy różne pierwiastki rzeczywiste.  
d) Wykaż, że istnieje liczba  $x$  pomiędzy  $\frac{\pi}{2}$  a  $\pi$  taka, że  $\operatorname{tg} x = -x$ .

8. W jakich punktach ciągła jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}?$$

*Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba*