Temat XIX

Funkcje wielu zmiennych c.d. Ciągłość.

1. Zbadać istnienie następujących granic:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;   c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$;

d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$.

2. Funkcja $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$. zadana jest wzorem

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\,.$$

Wykazać, że

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=0=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

ale granica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nie istnieje.

3. Niech

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad x^2+y^2\neq 0;\\ 0 & \text{dla} \quad x=y=0.\end{cases}$$

Wykazać, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

4. Funkcja f zadana jest wzorem

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Wykazać, że funkcja ta obcięta do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$ jest na takiej prostej funkcją ciągłą, natomiast punkt $(0,0)$ *nie jest* punktem ciągłości funkcji dwu zmiennych $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

5. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x^3-y} & \text{dla} \quad y\neq x^3,\\ 1 & \text{dla} \quad y=x^3;\end{cases}\qquad f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

$$f_3(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0);\end{cases}\qquad f_4(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3+x^2y^3}{x^4+2y^4} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

6. Znaleźć granice

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

dla następujących funkcji:

a) $f(x,y)=x+y$;   b) $f(x,y)=xy$;   c) $f(x,y)=x^2+y^2$;   d) $f(x,y)=x^2y^3-2x$.

7. Wykazać, że w przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^k$ iloczyn skalarny (dowolny!) jest funkcją ciągłą swoich argumentów, tzn. jeśli $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$ oraz $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \ldots$ są ciągami wektorów w $\mathbb{R}^k$ i zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{v}_n = \vec{v}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{w}_n = \vec{w}$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \vec{v}_n\, ,\, \vec{w}_n \rangle = \langle \vec{v}\, ,\, \vec{w} \rangle$.

8. Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otwartego podzbioru $G \subset \mathbb{R}$ zbiór

$$\Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in G\Big\}$$

jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^k$.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba