

Temat XVI

Rozkład na ułamki proste. Całka oznaczona. Całka niewłaściwa.

1. Obliczyć następujące całki nieoznaczone, stosując rozkład na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int \frac{x^3}{x+1} dx, \quad \text{(b)} \int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx, \quad \text{(c)} \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx, \quad \text{(d)} \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx \\ \text{(e)} \int \frac{x^4}{x^2+1} dx, \quad \text{(f)} \int \frac{x^3-1}{x^3-5x^2+6x} dx, \quad \text{(g)} \int \frac{1}{x^4-1} dx, \quad \text{(h)} \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx. \end{aligned}$$

2. Obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{dx}{1-x^2} \\ \text{b)} \int \frac{dx}{\sin x}, \\ \text{c)} \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx, \end{aligned}$$

3. Obliczyć następujące całki oznaczone:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_1^2 \frac{2x^2}{x^3+1} dx, \quad \text{(b)} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx, \quad \text{(c)} \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx, \\ \text{(d)} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx, \quad \text{(e)} \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx, \quad \text{(f)} \int_0^2 x e^{x^2} dx, \\ \text{(g)} \int_0^3 x^2(2x^3+4)^2 dx, \quad \text{(h)} \int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx, \quad \text{(i)} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx. \end{aligned}$$

4. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$\begin{aligned} \text{(a)} F(x) = \int_1^x t(1+t^2)^5 dt, \quad \text{(b)} F(x) = \int_0^{x^2} t^{-1/3} dt, \quad \text{(c)} F(x) = \int_0^{x^2} t \sin t dt, \\ \text{(d)} F(x) = \int_0^{\sin x} (1-t^2) dt, \quad \text{(e)} F(x) = \int_1^{1+x^2} \sqrt{1+t} dt, \quad \text{(f)} F(x) = \int_1^{1+x^2} t^2 dt, \\ \text{(g)} F(x) = \int_x^{x^2} t^{-2} dt. \end{aligned}$$

5. Obliczyć następujące całki niewłaściwe:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad \text{(b)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{(c)} \int_0^\infty e^{-x} dx, \\ \text{(d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+4}, \quad \text{(e)} \int_0^\infty x e^{-x} dx, \quad \text{(f)} \int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}. \\ \text{(g)} \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin x \cos x}, \end{aligned}$$

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba