

Temat XVIII

Podzbiory \mathbb{R}^n . Granice funkcji wielu zmiennych.

1. Zbadać czy następujące podzbiory \mathbb{R}^n ($n = 2$ lub $n = 3$) są ograniczone, otwarte, domknięte, zwarte, wypukłe :

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| < 2\}$;
- b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 3z \leq 7\}$;
- c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x + y + z| < 1\}$;
- d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\}$;
- e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 + 4x + x^2 + y^2 \leq 0\}$;
- f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$;
- g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 < 1\}$;
- h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > |y|\}$;
- i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$;
- j) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.

2. Obliczyć granicę funkcji (być może niewłaściwą) lub wykazać, że żądana granica nie istnieje:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y^3 - x^3}{x - y}$;
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2}$;
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\sin xy}{x}$;
- d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin xy}{x}$;
- e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x}$;
- f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \frac{1}{\sin xy}$;
- g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$;
- h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$;
- i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$;
- j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^3}$;
- k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2)$.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba