Temat XVII

Normy i iloczyny skalarne.

Te ćwiczenia mają charakter bardziej teoretyczny niż zwykle. W zasadzie nie ma ćwiczeń rachunkowych. Zadania to uzupełnienia lub dowody faktów poznanych na wykładzie. We wszystkich poniższych zadaniach rozważamy normy (ozn. $\|\cdot\|$) i iloczyny skalarne (ozn. $\langle\cdot,\cdot\rangle$) w $n-$wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^n$.

1. Korzystając z nierówności trójkąta wykazać, że

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|.$$

2. Wykazać, że tzw. norma euklidesowa, zadana w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ wzorem

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

spełnia warunki definicji normy (w szczególności nierówność trójkąta).

3. Wykazać, że tzw. norma euklidesowa, zadana w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wzorem

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

spełnia warunki definicji normy (w szczególności nierówność trójkąta).
Wskazówka. Można na przykład skorzystać z nierówności Schwarza z wykładu.

4. Wykazać, że iloczyn skalarny indukuje normę, tzn. wyrażenie

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle}$$

spełnia warunki z definicji normy.

5. Wykazać, że każda norma indukowana przez pewien iloczyn skalarny (tak jak w poprzednim zadaniu) spełnia tzw. warunek równoległoboku:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 2(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2).$$

6. Wykazać, że jeśli norma $\|\cdot\|$ indukowana jest przez pewien iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$, to zachodzi:

$$\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2).$$

7. Przyjmijmy bez dowodu, że jeśli pewna norma $\|\cdot\|$ spełnia warunek równoległoboku, to wyrażenie z zadania 6 poprawnie określa pewien iloczyn skalarny. Wykazać, że wówczas norma indukowana przez tak zdefiniowany iloczyn skalarny jest identyczna z wyjściową normą $\|\cdot\|$, tzn.

$$\sqrt{\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle} = \|\vec{v}\|.$$

8. [Porównywanie norm.] Mając określone w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dwie normy: $\|\cdot\|^{(1)}$ i $\|\cdot\|^{(2)}$, mówimy, że norma $\|\cdot\|^{(2)}$ jest mocniejsza (ew. niesłabsza) od normy $\|\cdot\|^{(1)}$, gdy istnieje takie $C > 0$, że dla każdego wektora $\vec{v}$ zachodzi: $\|\vec{v}\|^{(1)} \leq C\,\|\vec{v}\|^{(2)}$. Wykazać, że tzw. norma maksimum $\|(x_1, ..., x_n)\|_{\max} \overset{def}{=} \max(|x_1|, ..., |x_n|)$ jest niesłabsza od dowolnej innej normy w $\mathbb{R}^n$.

9(*). Wykazać, że dowolna norma w $\mathbb{R}^n$ jest mocniejsza od normy $\|\cdot\|_{\max}$. (Z zadań 8 i 9 łącznie wynika twierdzenie z wykładu, że każde dwie normy w $\mathbb{R}^n$ są równoważne.)

10. Wykazać, że dwie normy: $\|\cdot\|^{(1)}$ i $\|\cdot\|^{(2)}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \|\vec{v}_n\|^{(1)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|\vec{v}_n\|^{(2)} = 0.$$

11. a) Wykazać, że kula jednostkowa w dowolnej normie jest zbiorem wypukłym.
b) Niech W będzie zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ takim, że:
- dla każdego $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ istnieje $t > 0$ takie, że $\vec{v} \in tW$, gdzie $tW = \{t\vec{w} : \vec{w} \in W\}$;
- dla każdego wektora $\vec{w} \in W$ wszystkie wektory postaci $r\vec{w}$, gdzie $r \in [-1, +1]$, należą do W;
- istnieje takie $R > 0$, że dla każdego $\vec{w} \in W$ $w_1^2 + ... + w_n^2 < R$.

Wykazać, że wyrażenie:
$$\|\vec{v}\| = \inf\{t > 0 : \vec{v} \in tW\}$$
spełnia wszystkie warunki z definicji normy (w szczególności wykazać nierówność trójkąta).

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba