Temat XX.

Pochodne cząstkowe. Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych.

1. Niech

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad x^2+y^2\neq 0;\\ 0 & \text{dla} \quad x=y=0.\end{cases}$$

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych $\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)$ oraz $\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)$.

2. Obliczyć pochodne cząstkowe następujących funkcji:

a) $f(x,y)=x^y$, b) $f(x,y,z)=x^2y^3z^4$, c) $f(x,y,z)=x^2+y^3+z^4$,

d) $f(x,y,z)=e^{xyz}$ e) $f(x,y,z)=x^4-16yz$, f) $f(x,y,z)=xe^y+ye^z+ze^x$,

f) $f(x,y,z)=x^2e^y\ln z$, h) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, i) $f(x,y,z)=(1-x^2-y^2-z^2)e^{-xyz}$.

3. Znaleźć taką funkcję $f(x,y)$, by zachodziło

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=2xy^3+e^x\sin y$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=3x^2y^2+e^x\cos y+1.$$

4. Zbadać różniczkowalność następujących odwzorowań:

a) $f(x,y)=\begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{dla } x^2+y^2=0,\end{cases}$ b) $f(x_1,...,x_k)=\sqrt{x_1^2+...+x_k^2}$,

c) $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{dla } x^2+y^2=0,\end{cases}$ d) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$,

e) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{y}\sin(xy) & \text{dla } y\neq 0,\\ x & \text{dla } y=0,\end{cases}$ f) $f(x,y,z)=\sqrt{xyz}$.

5. Zróżniczkować odwzorowanie złożone $g\circ f$, gdzie:

a) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(x,\sqrt{x})$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x_1,x_2)=e^{-(x_1^2+x_2^2)}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(\cos 2x,\sin 2x)$, $g:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $g(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1^2+x_2^2}$;

c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x-y,x+y,2\sqrt{xy})$, $g:\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$,
$g(x_1,x_2.x_3)=\ln(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$;

d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,
$f(x,y)=(x^2-y^2,x^2+y^2,x^2y^2)$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,
$g(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;

e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,
$f(x,y)=(x-y,x+y)$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,
$g(x_1,x_2)=(e^{x_1}\cos x_2,e^{x_1}\sin x_2)$.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba