Temat XXV.

Lokalna odwracalność funkcji. Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Płaszczyzna styczna.

1. Jakie jest równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni o równaniu:
a) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 1$, w punkcie $P = (1, -1, 1)$,
b) $xyz + x^2 - 3y^2 + z^3 = 14$, $P = (5, -2, 3)$?

2. Znaleźć wszystkie punkty na powierzchni o równaniu $z = f(x, y)$, w których płaszczyzna styczna jest pozioma, gdzie:
a) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 8x - 6y + 10$,
b) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3y$.

3. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których płaszczyzna styczna do powierzchni zadanej równaniem

$$z = \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{24}y^3 - \frac{1}{32}y^4 - x^2$$

jest pozioma (równoległa do płaszczyzny $z = 0$). Które z tych punktów są lokalnymi ekstremami funkcji $z = z(x, y)$?

4. Oznaczamy $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Niech L będzie odwzorowaniem liniowym, $L : (x, y) \mapsto (x + y, y)$. Niech $E = L(S)$.
a) Opisać zbiór E równaniem algebraicznym.
b) Znaleźć $\max\limits_{(x,y)\in E} x$, $\min\limits_{(x,y)\in E} x$, $\max\limits_{(x,y)\in E} y$, $\min\limits_{(x,y)\in E} y$.
c) Kiedy warunek $(x, y) \in E$ pozwala określić funkcję $y = y(x)$? Kiedy można określić funkcję $x = x(y)$?
d) Znaleźć w zbiorze E punkty najbardziej i najmniej odległe od punktu $(0, 0)$.
e) Wykazać, że E jest elipsą o środku w początku układu współrzędnych. Uwaga: *elipsa to miejsce geometryczne (zbiór) punktów, których suma odległości od pewnych dwóch ustalonych punktów F_1, F_2 (ognisk) jest stała i większa od długości odcinka $\overline{F_1F_2}$.*
f) Napisać równanie stycznej do tej elipsy przechodzącej przez punkt $(x_0, y_0) \in E$.
g) Wykazać, że promień światła wychodzący z ogniska F_1, po odbiciu od elipsy w punkcie $(x_0, y_0) \in E$ zgodnie z zasadą "kąt padania równa się kątowi odbicia" (kąt mierzymy do stycznej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0)) przechodzi przez ognisko F_2.
h) Symbolem "$\star$" oznaczymy standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$, tj. $(v_1, v_2)\star(w_1, w_2) = v_1w_1 + v_2w_2$. Sprawdzić, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

jest macierzą pewnego iloczynu skalarnego, tzn. działanie "$*$" określone wzorem: $\vec{v} * \vec{w} = \vec{v} \star (A\vec{w})$ spełnia wszystkie aksjomaty iloczynu skalarnego.
i) Wyznaczyć "okrąg jednostkowy" w sensie iloczynu skalarnego określonego w poprzednim podpunkcie, tzn. zbiór $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) * (x, y) = 1\}$.
j) Wyznaczyć proste $\imath$ i $\jmath$ przechodzące przez punkt $(0, 0)$, które są prostopadłe do siebie jednocześnie w sensie iloczynu skalarnego "$*$" i standardowego iloczynu skalarnego "$\star$".

5. a) Wykazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno $y = y(x)$ spełniające równanie $3x + e^x = y + e^y$.
b) Wykazać, że określone powyższym warunkiem odwzorowanie $x \mapsto y(x)$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1.
c) Obliczyć pochodną dyfeomorfizmu odwrotnego $y \mapsto x(y)$ w punkcie $y = 0$.

6. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 taką, że dla pewnego $0 < k < 1$ przy wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|f'(x)| \leq k$. Wykazać, że odwzorowanie $y = x + f(x)$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba