## Temat XXVIII

### Całki wielokrotne. Podstawienie biegunowe. Całka Poissona.

**1.** Wyprowadzić wzór na objętość i pole powierzchni:

a) stożka o tworzącej $\ell$ i promieniu podstawy $r$.

b) torusa, powstałego przez obrót wokół osi $OZ$ koła położonego w płaszczyźnie $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$, o środku w punkcie $(2,0,0)$ i promieniu $r = 1$.

**2.** Obliczyć:

a) $\displaystyle\int_2^3 \left( \int_0^1 6xy\, dx \right) dy;$

b) $\displaystyle\int_1^3 \left( \int_{-2}^1 (4x^3 + 6xy^2)\, dy \right) dx;$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^y + \sin x)\, dxdy;$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\pi} e^x \sin y\, dydx;$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y}\, dxdy;$

f) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^3 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dydx;$

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n\, dxdy;$

h) $\displaystyle\int\int_D xy^2\, dxdy$, gdzie $D$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym krzywymi $y = x^2$ oraz $y = x^3$.

i) $\displaystyle\int\int_D (6x+2y^2)\, dxdy$, gdzie $D$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym parabolą $y = x^2$ oraz prostą $x + y = 2$.

j) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{\frac{y}{x}}\, dydx;$

k) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2}\, dxdy;$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, dydx;$

m) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4}\, dxdy;$

**3.** Obliczyć objętość zwartego podzbioru $\mathbb{R}^3$ (bryły) ograniczonej płaszczyznami $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}$, oraz powierzchnią boczną walca $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\}$.

**4.** Używając współrzędnych biegunowych obliczyć:

a) objętość zwartego podzbioru $\mathbb{R}^3$ (bryły) ograniczonej płaszczyzną $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$

oraz powierzchnią boczną paraboloidy $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=25-x^2-y^2\right\}$.

b) pole zwartego podzbioru $\mathbb{R}^2$ (figury) ograniczonej od wewnątrz okręgiem $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\right\}$ zaś od zewnątrz krzywą, której równanie we współrzędnych biegunowych ma postać $r=2+\cos\varphi$.

**5.** Wiedząc, że $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. obliczyć:

a) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$;

b) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$;

c) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$;

d) $\displaystyle\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$, gdzie $\sigma>0$;

e) $\displaystyle\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}}\,dx$;

*Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba*