Temat XIV

Uzupełniające zagadnienia rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej: elastyczność; nierówność Jensena; badanie przebiegu funkcji.

1. Elastyczność funkcji. *Trzy zadania z zestawu doc. M. Krycha.*

a) Przyjmijmy, że popyt D na pewien towar jest odwrotnie proporcjonalny do ceny p tego towaru. Wyznaczyć elastyczność popytu D jako funkcji ceny p. O ile procent zmaleje popyt na ten towar w wyniku wzrostu ceny o 1%?

b) Załóżmy, że przy cenie p popyt na czekoladę ze strony ludności wiejskiej jest trzykrotnie mniejszy od popytu ze strony ludności miejskiej oraz że jego elastyczność w przypadku wsi jest równa $-0,8$, zaś w przypadku miasta $-0,3$. O ile procent w przybliżeniu zmniejszy się globalny popyt na czekoladę w wyniku wzrostu ceny o 1%?

c) Niech $C(q)$ oznacza koszt produkcji q szaf, a $c(q) = \frac{C(q)}{q}$ – średni koszt produkcji jednej szafy. Załóżmy, że funkcję C przedłużono na półprostą $(0, \infty)$ i że jest ona na tej półprostej różniczkowalna. Wykazać, że koszt krańcowy, tj. $C'(q)$, jest równy $c(q)(1 + E_q(c))$.

2. Wykazać prawdziwość następujących nierówności (np. wykorzystując nierówność Jensena):

a) $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$;

b) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geq 1$, jeżeli α, β, γ są kątami pewnego trójkąta.
Dla jakiego trójkąta zachodzi równość?

c) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$, gdzie α, β, γ są kątami pewnego trójkąta.
Kiedy zachodzi równość?

d) $x^a y^b \leq ax + by$, gdzie $a, b, x, y > 0$, $a + b = 1$. Wywnioskować stąd, że:

$$uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q, \quad \text{gdzie } u, v > 0,\ p, q > 1,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

3. Zbadać przebieg zmienności funkcji i naszkicować jej wykres:

a) $f(x) = \dfrac{x^4}{2 - x^3}$;

b) $f(x) = x \cdot \sqrt{4x - x^2}$;

c) $f(x) = \sin^2 x$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba