Temat XXIII.

Ekstrema funkcji wielu zmiennych II.

1. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Wykazać, że:

a) Punkt $(0,0)$ jest punktem krytycznym funkcji f.

b) W punkcie $(0,0)$ istnieją pochodne cząstkowe drugiego rzędu $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$, ale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

c) Punkt $(0,0)$ nie jest ekstremum lokalnym funkcji f.

2. Niech $f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

a) Wykazać, że $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Pokazać, że funkcja f po obcięciu do dowolnej linii prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych ma w tym punkcie lokalne minimum.

c) Pokazać, że punkt $(0,0)$ nie jest lokalnym minimum funkcji f.

3. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 1\}$. Znaleźć punkt $(x,y,z) \in A$ położony najbliżej punktu $(3,-2,1)$.

4. Znaleźć maksymalną możliwą objętość naczynia w kształcie cylindra (walca), dla którego suma wysokości i obwodu podstawy nie przekracza 108 cm.

5. Znaleźć maksymalną możliwą objętość prostopadłościennego naczynia, dla którego suma wszystkich trzech wymiarów (długość, szerokość, wysokość) nie przekracza 108 cm.

6. a) Drut długości 120 cm zostaje rozcięty na 3 kawałki o długościach: x, y, $120-(x+y)$. Z każdego z trzech kawałków formujemy kwadratową ramkę. Niech $f(x,y)$ oznacza sumę pól tych kwadratów. Wykazać, że jedyny punkt krytyczny funkcji f jest jej lokalnym minimum. Czy da się mimo to zmaksymalizować sumę tych pól? Wyjaśnić dlaczego.

b) Drut długości 120 cm zostaje rozcięty na *co najwyżej* 3 kawałki o długościach: x, y, $120-(x+y)$ i z każdego z kawałków formujemy kwadratową ramkę. Jak należy dokonać tego podziału, aby zminimalizować sumę pól tak uzyskanych kwadratów, a jak by ją zmaksymalizować?

7. Znaleźć i sklasyfikować (lok. min/lok. maks./brak lok. ekstremum) punkty krytyczne funkcji:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$, b) $f(x,y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3 + 12x - 24y$,

c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^4-y^4}$, d) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

8. Znaleźć i sklasyfikować (lokalne maksimum, lokalne minimum, brak lokalnego ekstremum) wszystkie punkty krytyczne następujących funkcji:

a) $f(x,y) = x^3y - 3xy^2$;

b) $f(x,y) = (x-y)(xy-1)$;

9. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2$ ma dokładnie jeden punkt krytyczny, w którym ma minimum lokalne właściwe, ale $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$ oraz $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty$.

Istnieje nieskończenie wiele funkcji o takiej własności.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba