Temat XXVII

Uzupełniające zagadnienia rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych.

1. Wielkości P, V oraz T (ciśnienie, objętość, temperatura) związane są zależnością $PV = RT$, gdzie $R-$pewna stała. Wykazać, że

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

2. Wśród trójkątów wpisanych w koło o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole.

3. Wśród prostopadłościanów wpisanych w kulę o promieniu R znaleźć ten, który ma największą objętość.

4. Podać przykład funkcji ciągłej dwu zmiennych, która ma dwa maksima lokalne właściwe, ale nie ma żadnego innego ekstremum lokalnego właściwego.

5. Wykazać, że gradient funkcji $2(1-\mathrm{e}^{2y}+x^2)^3 - 3(1-\mathrm{e}^{2y}+x^2)^2 - 24x^2\mathrm{e}^{2y}$ zeruje się w dokładnie jednym punkcie, w tym punkcie funkcja ma lokalne maksimum właściwe, ale jest nieograniczona z góry i z dołu.

6. Wykazać, że nie istnieje funkcja $f(x,y)$ klasy C^2, taka że $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy^2$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8x^2y$.

7. Które z poniższych funkcji spełniaja na swojej dziedzinie równanie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0?$$

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
b) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$.
c) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
d) $f(x,y) = e^{-x}\sin y$.

8. Wykazać, że jeśli funkcja $f(x,y)$ spełnia warunek $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, to funkcja $F(u.v) = f(u^2-v^2, 2uv)$ spełnia warunek $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba