Temat XXIV.

Uzupełniające zagadnienia na ekstrema funkcji wielu zmiennych. Dyfeomorfizmy.

1. Znaleźć najmniejszą i największą wartośc funkcji

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

na zbiorze $D = \{(x,u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

2. Znaleźć i sklasyfikować (lokalne maksimum, lokalne minimum, brak lokalnego ekstremum) wszystkie punkty krytyczne następujących funkcji:
a) $f(x,y) = e^{(xy)} - 2xy$;
b) $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$;
c) $f(x,y) = (2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$;
d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+x+2z$.

3. Wskazać dyfeomorfizm odwzorowujący na siebie następujące obszary:
a) wnętrze trójkąta $\mathcal{T}_1$ o wierzchołkach w punktach: $(0,0),(0,1),(1,0)$ na wnętrze trójkąta $\mathcal{T}_2$ o wierzchołkach w punktach $(0,0),(0,1),(2,0)$;
b) wnętrze trójkąta $\mathcal{T}$ o wierzchołkach w punktach: $(0,0),(0,1),(1,0)$ na wnętrze kwadratu o wierzchołkach $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$;
c) wnętrze trójkąta $\mathcal{T}$ o wierzchołkach w punktach: $(0,0),(0,1),(1,0)$ na wnętrze koła o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$;
d) wnętrze trójkąta $\mathcal{T}$ o wierzchołkach w punktach: $(0,0),(0,1),(1,0)$ na obszar $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \text{ i } 0 < \mathrm{y} < \mathrm{x}^2\}$;
e) wnętrze trójkąta $\mathcal{T}$ o wierzchołkach w punktach: $(0,0),(0,1),(1,0)$ na całą płaszczyznę $\mathbb{R}^2$.

4. Wskazać dyfeomorfizm całej płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na siebie, w którym obrazem pierścienia kołowego $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\}$ jest pierścień kołowy $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 9\}$.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba