Temat XXVI.

Ekstrema związane (warunkowe). Mnożniki Lagrange'a. Twierdzenie Kuhna-Tuckera.

1. Niech $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2xy + 2y^2 = 1.\}$ Zastosować metodę mnożników Lagrange'a do wyznaczenia najbardziej i najmniej odległego punktu zbioru E od początku układu współrzędnych.

2. Zastosować metodę mnożników Lagrange'a do znalezienia tych punktów na elipsie $x^2 + 2y^2 = 1$, które są położone najbliżej i najdalej od prostej $x + y = 2$.

3. Znaleźć kres górny i dolny funkcji $f(x, y, z) = x^2 - yz$ na sferze $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4. a) Znaleźć maksymalną wartość funkcji $f(x, y, z) = x+y+z$ na sferze $x^2+y^2+z^2 = a^2$.
b) Wywnioskować stąd nierówność między średnią arytmetyczną a średnią kwadratową, tzn.

$$\text{dla } x, y, z \geq 0 \quad \frac{x + y + z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}.$$

5. a) Z okrągłego pniaka, którego przekrojem jest koło o promieniu $r = 1$ decymetr wycinamy belkę o przekroju prostokątnym (wpisanym w obwód pniaka) tak, by pole tego przekroju było maksymalne. Wykazać, że przekrój takiej belki musi być kwadratem.
b) Po wycięciu belki jak w punkcie a), z każdego z czterech pozostałych skrawków wycinamy długą deskę tak, aby jej pole przekroju poprzecznego było maksymalne (tj. tak, by zoptymalizować wykorzystanie drewna). Jakie są wymiaru przekroju takiej deski?

6. Płaszczyzna $x + y + z = 12$ przecina paraboloidę $z = x^2 + y^2$. Wyznaczyć najwyżej i najniżej położony punkt tego przekroju.

7. Stożek $z^2 = x^2 + y^2$ przecinamy płaszczyzną $x + 2y + 3z = 3$. Na otrzymanej elipsie znaleźć punkty położone najbliżej i najdalej od początku układu współrzędnych.

8. a) Wyznaczyć kres dolny i kres górny zbioru wartości funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ na zbiorze $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2\}$.
b) Wyznaczyć kres dolny i kres górny zbioru wartości funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ na zbiorze $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2, z = 1\}$.
c) Wyjaśnić różnicę stosowalności metody mnożników Lagrange'a pomiędzy punktami a) i b).

9. Wyznaczyć kres dolny i kres górny zbioru wartości funkcji $f(x, y)$ na zbiorze $S \subset \mathbb{R}^2$:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2 \qquad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$;

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 6\}$;

c) $f(x, y) = xy \qquad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36\}$;

d) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 \qquad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;

e) $f(x, y) = x^2y^2 \qquad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 4\}$.

10. Znaleźć punkty zbioru $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 12xy + 6y^2 = 130\}$ położone najbliżej początku układu współrzędnych.

11. Znaleźć punkty zbioru $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ położone najbliżej i najdalej od punktu $(1, 0)$.

12. Wyznaczyć kres dolny i kres górny zbioru wartości funkcji $f(x, y, z)$ na zbiorze $S \subset \mathbb{R}^3$:

a) $f(x, y, z) = 3x + 2y + z$ $\quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y + z = 6\}$;

c) $f(x, y, z) = xyz$ $\quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

d) $f(x, y, z) = xyz$ $\quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$;

e) $f(x, y, z) = xyz$ $\quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x + y + z = 1\}$;

f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x + 2y + 3z = 6\}$;

13. Korzystając z twierdzenia Kuhna-Tuckera, wyznaczyć maksimum funkcji $f(x, y) = x + ay$ na zbiorze $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 , x + y \ge 0\}$ (współczynnik a jest parametrem).

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba