

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład VIII

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Funkcje wielu zmiennych

Ekstrema funkcji w \mathbb{R}^k

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ i niech $x_0 \in A$. Mówimy, że funkcja f osiąga w punkcie x_0 *maksimum* (*minimum*) równe $f(x_0)$, jeśli $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) dla każdego $x \in A$.

Mówimy, że f osiąga w punkcie $x_0 \in \text{int } A$ *maksimum* (*minimum*) *lokalne*, jeśli istnieje otoczenie U punktu x_0 , takie że $f|_U$ osiąga w punkcie x_0 maksimum (minimum).

Innymi słowy, f osiąga w punkcie x_0 maksimum (minimum) lokalne, jeśli istnieje $r > 0$, takie że $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) dla każdego $x \in B(x_0, r)$.

Mówimy, że ekstremum (tzn. maksimum lub minimum) jest *właściwe* (*silne*), jeśli odpowiednia nierówność pomiędzy wartościami funkcji jest ostra w przypadku $x \neq x_0$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego

Twierdzenie. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ i niech $x_0 \in \text{int } A$, taki że f jest różniczkowalna w x_0 . Wtedy, jeśli f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 , to $Df(x_0) = 0$ (co jest równoważne $\text{grad } f(x_0) = 0$).

Wniosek. Jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna na zbiorze $\text{int } A$, to ekstrema lokalne funkcji f mogą znajdować się tylko w tych punktach wnętrza zbioru A , gdzie zeruje się $\text{grad } f$ lub w punktach brzegu A .

Uwaga (przypomnienie). Warunek konieczny istnienia ekstremum nie jest dostateczny. Jeśli A jest zwarty i f ciągła na A , to f przyjmuje maksimum i minimum (w innych przypadkach niekoniecznie).

Przykład. Znaleźć maksimum i minimum funkcji $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ na zbiorze A , który jest trójkątem (domkniętym) o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(0, 2\pi)$.

Zauważmy, że

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\},$$

więc

$$\text{int } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 2\pi\}$$

oraz

$$\begin{aligned} \partial A = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 2\pi\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leq x \leq 2\pi\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2\pi\}, \end{aligned}$$

czyli

$$\partial A = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 2\pi\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 2\pi\} \cup \{(x, 2\pi - x) : 0 \leq x \leq 2\pi\}.$$

Funkcja f jest różniczkowalna na $\text{int } A$. Liczymy pochodne cząstkowe w punktach $(x, y) \in \text{int } A$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x - \cos(x + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos y - \cos(x + y).$$

Rozwiązujemy równanie $\text{grad } f(x, y) = 0$, czyli układ dwóch równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

Mamy układ równań

$$\begin{cases} \cos x - \cos(x + y) = 0, \\ \cos y - \cos(x + y) = 0. \end{cases}$$

Odejmując równania stronami, otrzymujemy

$$\cos x = \cos y,$$

co daje $x = y$ lub $x = 2\pi - y$. Ponieważ drugi warunek nie jest spełniony dla punktów z wnętrza A , możemy założyć $x = y$. Wtedy nasze równania dają

$$\cos x = \cos 2x.$$

Ponieważ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Rozwiązując to równanie, dostajemy

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \cos x = 1.$$

Biorąc pod uwagę nierówności opisujące $\text{int } A$, widzimy że jedyny punkt $(x, y) \in \text{int } A$ spełniający te warunki to $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$. Mamy $f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Teraz musimy obliczyć maksimum i minimum funkcji f obciętej do brzegu A . Robimy to oddzielnie dla każdego boku trójkąta A .

Na boku $\{(0, y) : 0 \leq y \leq 2\pi\}$ mamy $f(x, y) = \sin 0 + \sin y - \sin(0 + y) = 0$. Podobnie, na boku $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 2\pi\}$ mamy $f(x, y) = 0$. Na trzecim boku $\{(x, 2\pi - x) : 0 \leq x \leq 2\pi\}$ mamy $f(x, y) = \sin x + \sin(2\pi - x) - \sin 2\pi = 0$. Zatem, maksimum i minimum funkcji f na brzegu jest równe 0.

Podsumowując, mamy $\max f = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (przyjęte w punkcie $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$) i $\min f = 0$ (przyjęte we wszystkich punktach brzegu A).

Pochodne wyższych rzędów

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie A otwarty w \mathbb{R}^k i niech $x \in A$. Załóżmy, że i -ta pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ istnieje w pewnym otoczeniu punktu x . Jeśli funkcja $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ma j -tą pochodną cząstkową w punkcie x , to tę pochodną nazywamy pochodną cząstkową drugiego rzędu funkcji f w punkcie x i oznaczamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ lub $f''_{x_j x_i}(x)$.

Jeśli $i = j$, to piszemy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$ lub $f''_{x_i^2}(x)$.

Uwaga. Definicja zależy od kolejności i, j , tzn. może być $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.

Uwaga. W ten sam sposób definiujemy pochodne kierunkowe drugiego rzędu.

Uwaga. Podobnie, indukcyjnie możemy zdefiniować pochodne cząstkowe n -tego rzędu $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}(x)$ i, ogólniej, pochodne kierunkowe n -tego rzędu.

Przykład. Dla $f(x, y) = x^3 + xy + y^4$ mamy $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 4y^3$, więc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2$.

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie A otwarty w \mathbb{R}^k . Mówimy, że funkcja f jest klasy C^2 , jeśli wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ dla $i, j = 1, \dots, k$ istnieją i są ciągle na A . Piszemy wtedy $f \in C^2$ lub $f \in C^2(A)$.

Twierdzenie Schwarz'a o symetrii drugich pochodnych

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty i niech $x \in A$. Jeżeli wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f istnieją w każdym punkcie pewnego otoczenia punktu x i są ciągłe w punkcie x , to

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Wniosek. *Jeśli f jest klasy C^2 na A , to $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ na A .*

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty, będzie funkcją skalarną i niech $x \in A$. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu. *Macierz Hessego (hesjanem, macierz drugiej różniczki) funkcji f w x nazywamy macierz*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) \end{bmatrix}.$$

Wniosek. *Jeśli f jest klasy C^2 , to macierz Hessego jest symetryczna.*

Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty będzie funkcją skalarną klasy C^2 i niech $x \in A$. *Wielomianem Taylora drugiego rzędu funkcji f w punkcie x nazywamy wielomian*

$$T_2 f(h) = f(x) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) h_i h_j$$

dla $h = (h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^k$. Liczbę $r_2(h) = f(x+h) - T_2 f(h)$ nazywamy *drugą resztą* w punkcie x .

Mamy więc

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) h_i h_j + r_2(h).$$

Wzór Taylora drugiego rzędu z resztą w postaci Peano

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty będzie funkcją skalarną klasy C^2 i niech $x \in A$. Wtedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_2(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Uwaga (różniczki wyższych rzędów). Indukcyjnie można zdefiniować dla $n \in \mathbb{N}$ różniczkę n -tego rzędu funkcji $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ w punkcie $x \in A$ dla A otwartego w \mathbb{R}^k . Różniczka n -tego rzędu jest wtedy przekształceniem n -liniowym $D^n f(x) : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n \text{ razy}} \rightarrow \mathbb{R}^m$, takim że

$$D^n f(x)(h^{(1)}, \dots, h^{(n)}) = \frac{\partial^n f}{\partial h^{(1)} \dots \partial h^{(n)}}(x)$$

dla $h^{(1)}, \dots, h^{(n)} \in \mathbb{R}^k$.

Wzór Taylora n -tego rzędu dla funkcji wielu zmiennych

Jeśli f jest funkcją klasy C^n (tzn. mającą ciągle pochodne cząstkowe n -tego rzędu), to

$$f(x+h) = f(x) + \frac{Df(x)(h)}{1!} + \frac{D^2 f(x)(h, h)}{2!} + \cdots + \frac{D^n f(x)(\overbrace{h, \dots, h}^{n \text{ razy}})}{n!} + r_n(h),$$

gdzie $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_n(h)}{\|h\|^n} = 0$. Wartość $D^n f(x)(h, \dots, h)$ można obliczyć według symbolicznego wzoru „operatorowego”

$$D^n f(h, \dots, h) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^n f$$

gdzie $h = (h_1, \dots, h_k)$, np. dla $k = 2$ mamy (z rozwinięcia w dwumian Newtona)

$$D^n f(h, h) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^n f = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} h_1^{n-j} h_2^j \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n-j} \partial x_2^j}.$$