

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład XII

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Funkcje wielu zmiennych

Ekstrema warunkowe

Ekstrema warunkowe

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla otwartego $A \subset \mathbb{R}^k$. Szukamy ekstremów funkcji f ograniczonej do zbioru $M \subset A$, który nie jest otwarty w \mathbb{R}^k (np. jest rozmaitością wymiaru mniejszego niż k).

Przykład. Niech

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(odległość od punktu $(0, 0)$). Wtedy f jest klasy C^1 , $\text{grad } f(x, y) \neq (0, 0)$ dla wszystkich (x, y) i f nie przyjmuje maksimum i minimum.

Niech $M = \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$ (okrąg o środku w $(2, 0)$ i promieniu 1). Wtedy $f|_M$ przyjmuje maksimum (równe 3) w punkcie $(3, 0)$ i minimum (równe 1) w punkcie $(1, 0)$.

Metoda Lagrange'a

Twierdzenie. Niech M będzie d -wymiarową rozmaitością klasy C^1 wyznaczoną przez funkcję $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ dla A otwartego podzbioru \mathbb{R}^k , $k \geq m$, $d = k - m$ (tzn. $M = \{x \in A : g(x) = 0\} \neq \emptyset$, g klasy C^1 i $\text{grad } g_1(x), \dots, \text{grad } g_m(x)$ liniowo niezależne dla każdego $x \in M$). Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 . Wtedy, jeśli $f|_M$ ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0 \in M$, to istnieją liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (mnożniki Lagrange'a), takie że dla funkcji Lagrange'a

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x),$$

gdzie $g = (g_1, \dots, g_m)$, zachodzi

$$\text{grad } L(x_0) = 0.$$

Uwagi

- Zamiast λ_i można wziąć $-\lambda_i$.
- $\text{grad } L(x_0) = 0 \iff \text{grad } f(x_0) = -\lambda_1 \text{grad } g_1(x_0) - \dots - \lambda_m \text{grad } g_m(x_0)$. Zatem, warunek ten jest równoważny temu, że $\text{grad } f(x_0) \in N_{x_0}M$, czyli $\text{grad } f(x_0)$ jest ortogonalny do wszystkich wektorów stycznych do M w punkcie x_0 .
- Twierdzenie Lagrange'a ma charakter lokalny, tzn. zamiast M można wziąć $M \cap U$ dla dowolnego otoczenia $U \subset \mathbb{R}^k$ punktu x_0 .
- Twierdzenie Lagrange'a daje warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego, który nie musi być warunkiem dostatecznym.

Wniosek. Aby znaleźć możliwe punkty lokalnie ekstremalne dla $f|_M$, należy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_k}(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x) = 0. \end{cases}$$

Jest to układ $k + m$ równań z $k + m$ niewiadomymi.

Przykład. Znaleźć maksimum i minimum funkcji $f(x, y, z) = 2x + 3y - 2z$ na zbiorze $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 14, x + y + z = 0\}$.

Niech $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 14, x + y + z)$. Wtedy g klasy C^1 i $M = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$. Jest jasne, że $M \neq \emptyset$ (M jest okręgiem w płaszczyźnie o równaniu $x + y + z = 0$). Poza tym,

$$\text{grad } g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z), \quad \text{grad } g_2(x, y, z) = (1, 1, 1),$$

więc $\text{grad } g_1(x, y, z), \text{grad } g_2(x, y, z)$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy gdy $x = y = z$. Dla $(x, y, z) \in M$ ten warunek daje

$$\begin{cases} 3x^2 = 14 \\ 3x = 0, \end{cases}$$

czyli sprzeczność. Wektory $\text{grad } g_1(x, y, z), \text{grad } g_2(x, y, z)$ są więc liniowo niezależne dla każdego $(x, y, z) \in M$.

Zatem, M jest 1-wymiarową rozmaitością klasy C^1 wyznaczoną przez funkcję g . Poza tym, funkcja f jest klasy C^1 na \mathbb{R}^2 . Są więc spełnione wszystkie założenia twierdzenia Lagrange'a. Funkcja Lagrange'a jest równa

$$L(x, y, z) = 2x + 3y - 2z + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 14) + \lambda_2(x + y + z).$$

Założmy, że $f|_M$ osiąga ekstremum lokalne w pewnym punkcie $(x_0, y_0, z_0) \in M$. Z twierdzenia Lagrange'a, istnieją takie liczby $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, że $\text{grad } L(x_0, y_0, z_0) = 0$. Wraz z równaniami określającymi M daje to następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2 + \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 = 0 \\ 3 + \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 = 0 \\ -2 + \lambda_1 \cdot 2z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Odejmując stronami drugie równanie od pierwszego i trzecie od drugiego, otrzymujemy

$$\begin{cases} 2\lambda_1(x - y) = 1 \\ 2\lambda_1(y - z) = -5. \end{cases}$$

W szczególności, wynika stąd $\lambda_1(y - z) \neq 0$. Zatem,

$$\frac{x - y}{y - z} = -\frac{1}{5}.$$

Stąd $5x - 5y = z - y$, czyli $5x - 4y - z = 0$. Wraz z czwartym i piątym równaniem daje to

$$\begin{cases} 5x - 4y - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Dodając stronami pierwsze i trzecie równanie, otrzymujemy $6x - 3y = 0$, czyli $y = 2x$, a z trzeciego równania $z = -3x$. Podstawiając to do drugiego równania, dostajemy $x^2 + 4x^2 + 9x^2 = 14$, co daje $14x^2 = 14$, a więc $x = \pm 1$.

Ostatecznie otrzymujemy dwa rozwiązania: $(1, 2, -3)$ i $(-1, -2, 3)$. Funkcja $f|_M$ może więc przyjmować ekstrema lokalne tylko w tych dwóch punktach. Z drugiej strony, M jest zwarty i f ciągła, więc $f|_M$ przyjmuje maksimum i minimum. Ponieważ $f(1, 2, -3) = 14$, $f(-1, -2, 3) = -14$, funkcja f przyjmuje maksimum równe 14 w punkcie $(1, 2, -3)$ i minimum równe -14 w punkcie $(-1, -2, 3)$.

Przykład. Znaleźć maksimum i minimum funkcji $f(x, y, z) = x + y + z$ na zbiorze $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 1\}$.

Niech $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 - 1)$. Wtedy g klasy C^1 na \mathbb{R}^3 i $M = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\} \neq \emptyset$. Mamy

$$\text{grad } g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z), \quad \text{grad } g_2(x, y, z) = (2x, 2y, 0).$$

Zatem, wektory $\text{grad } g_1(x, y, z), \text{grad } g_2(x, y, z)$ są liniowo zależne w punktach postaci $(x, y, 0)$, a zatem w punktach z M . Nie są więc spełnione założenia twierdzenia Lagrange'a.

Funkcja Lagrange'a jest w tym przypadku równa

$$L(x, y, z) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 1),$$

więc odpowiedni układ równań

$$\begin{cases} \text{grad } L(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

jest postaci

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Jest to układ sprzeczny, bo z czwartego i piątego równania wynika, że $z = 0$, co jest sprzeczne z trzecim równaniem. Z drugiej strony, funkcja f jest klasy C^1 , a zbiór M jest zwarty, więc $f|_M$ musi przyjmować maksimum i minimum.

Aby skorzystać z metody Lagrange'a, zauważamy, że ponieważ z równań $g(x, y, z) = 0$ wynika $z = 0$, to M można przedstawić w postaci

$$M = \{(x, y, z) : \tilde{g}(x, y, z) = 0\}$$

dla

$$\tilde{g}(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1, z).$$

Funkcja \tilde{g} jest klasy C^1 na \mathbb{R}^3 oraz

$$\text{grad } \tilde{g}_1(x, y, z) = (2x, 2y, 0), \quad \text{grad } \tilde{g}_2(x, y, z) = (0, 0, 1).$$

Zatem, wektory $\text{grad } \tilde{g}_1(x, y, z), \text{grad } \tilde{g}_2(x, y, z)$ są liniowo niezależne dla każdego (x, y, z) , więc M jest mnogością 1-wymiarową klasy C^1 wyznaczoną przez funkcję \tilde{g} i możemy zastosować twierdzenie Lagrange'a.

Funkcja Lagrange'a jest teraz równa

$$\tilde{L}(x, y, z) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2 z.$$

Układ równań

$$\begin{cases} \text{grad } \tilde{L}(x, y, z) = 0 \\ \tilde{g}(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

jest postaci

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 x = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 y = 0 \\ 1 + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego, otrzymujemy $x = y$, co daje $2x^2 = 1$, czyli $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mamy zatem dwa rozwiązania: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ i $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Ponieważ, jak powiedzieliśmy, $f|_M$ przyjmuje maksimum i minimum oraz

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \sqrt{2}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\sqrt{2},$$

to w punkcie $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ funkcja f przyjmuje maksimum równe $\sqrt{2}$, a w punkcie $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ — minimum równe $-\sqrt{2}$.

Twierdzenie Kuhna–Tuckera

Twierdzenie. Niech $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h : A \rightarrow \mathbb{R}^l$ klasy C^1 , gdzie A otwarty podzbiór \mathbb{R}^k i niech

$$M = \{x \in A : g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0, h_1(x) \leq 0, \dots, h_l(x) \leq 0\},$$

gdzie $g = (g_1, \dots, g_m)$, $h = (h_1, \dots, h_l)$. Załóżmy, że $M \neq \emptyset$ i dla każdego $x \in M$ wektory $\text{grad } g_1(x), \dots, \text{grad } g_m(x), \text{grad } h_{i_1}(x), \dots, \text{grad } h_{i_s}(x)$ są liniowo niezależne, gdzie i_1, \dots, i_s są tymi indeksami i , dla których $h_i(x) = 0$.

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 . Wtedy, jeśli $f|_M$ ma minimum lokalne w punkcie $x_0 \in M$, to istnieją liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $\mu_1, \dots, \mu_l \geq 0$, takie że dla funkcji

$$K(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x) + \mu_1 h_1(x) + \dots + \mu_l h_l(x)$$

zachodzi

$$\text{grad } K(x_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad \mu_1 h_1(x_0) + \dots + \mu_l h_l(x_0) = 0.$$

Poza tym, jeśli dodatkowo zbiór M wypukły i funkcja $f|_M$ ściśle wypukła (tzn. $f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ dla $x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2, t \in (0, 1)$), to $f|_M$ przyjmuje minimum w dokładnie jednym punkcie x_0 określonym powyższymi równaniami.

Uwaga. Aby otrzymać odpowiedni warunek dla maksimum lokalnego funkcji f , należy zastosować twierdzenie Kuhna–Tuckera dla funkcji $-f$.