

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład XV

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Równania różniczkowe

Definicja. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym w \mathbb{R}^k w postaci normalnej nazywamy równanie*

$$y' = f(t, y),$$

gdzie $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ dla pewnego zbioru otwartego $A \subset \mathbb{R}^{k+1} = \{(t, y) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^k\}$.

Rozwiązaniem (trajektorią) tego równania nazywamy funkcję różniczkowalną $y(t)$ o wartościach w \mathbb{R}^k , określoną na pewnym przedziale otwartym $P \subset \mathbb{R}$, taką że

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{dla } t \in P,$$

tzn. $y'_j(t) = f_j(t, y_1(t), \dots, y_k(t))$ dla $j = 1, \dots, k$, gdzie

$$y = (y_1, \dots, y_k), \quad f = (f_1, \dots, f_k).$$

Uwaga. Równanie różniczkowe w \mathbb{R}^k nazywa się też układem k równań różniczkowych.

Uwaga. Rozpatruje się też *równania różniczkowe n -tego rzędu*, gdzie występują pochodne wyższych rzędów $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Przykład. Rozwiązaniami równania $y' = g(t)$, gdzie $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, P przedział otwarty w \mathbb{R} , są funkcje $y(t) = \int g(t) dt + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Przykład – równanie opisujące rozpad promieniotwórczy

Przyjmuje się, że przy rozpadzie pierwiastka promieniotwórczego ilość substancji radioaktywnej maleje z prędkością wprost proporcjonalną do ilości tej substancji w danej chwili. Prowadzi to do równania

$$y' = -ay,$$

gdzie a jest pewną stałą dodatnią, a $y(t)$ ilością substancji radioaktywnej w chwili t (zmienną t interpretujemy jako czas).

Rozwiązania tego równania są postaci

$$y(t) = ce^{-at}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Przykład – mechanika Newtona

Według zasad mechaniki Newtona, punkt materialny o masie m porusza się w polu sił \vec{F} po trajektoriach $y(t)$, które są rozwiązaniami równania

$$my'' = \vec{F}.$$

Przykład – ruch planet wokół Słońca

Słońce o masie M znajduje się w początku układu współrzędnych w \mathbb{R}^3 . Planeta o masie m (przy czym m jest dużo mniejsze od M) porusza się wokół Słońca pod działaniem siły grawitacji

$$\vec{F} = -GmM \frac{y}{\|y\|^3},$$

gdzie G stała grawitacji, $y \in \mathbb{R}^3$ położenie planety. Rozwiązaniami równania Newtona są funkcje opisujące elipsy o jednym z ognisk w początku układu współrzędnych (jest to tzw. pierwsze prawo Keplera).

Równanie o zmiennych rozdzielonych

Definicja. Równanie postaci

$$y' = g(y)h(t),$$

gdzie $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $h : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcje ciągłe oraz $g \neq 0$, nazywamy *równaniem o zmiennych rozdzielonych*.

Stwierdzenie. Rozwiązania tego równania są postaci

$$y(t) = G^{-1}(H(t)),$$

gdzie G jest funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{g}$, a H jest funkcją pierwotną funkcji h , czyli

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_0}^t h(s) ds \quad \text{dla pewnych } t_0, y_0.$$

Zagadnienie Cauchy'ego

Definicja. *Zagadnieniem Cauchy'ego* nazywamy problem znalezienia dla równania

$$y' = f(t, y),$$

gdzie $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^{k+1}$ otwarty, rozwiązania $y(t)$, takiego że $y(t_0) = y_0$ dla danych warunków początkowych $(t_0, y_0) \in A$.

Twierdzenie (Cauchy, Picard, Lindelöf). *Niech $(t_0, y_0) \in A$. Jeśli f ciągła i spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej y w pewnym otoczeniu (t_0, y_0) , to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkami początkowymi (t_0, y_0) . W szczególności, zachodzi to dla funkcji f klasy C^1 .*

Równania liniowe o stałych współczynnikach

Definicja. *Równaniem liniowym o stałych współczynnikach* w \mathbb{R}^k nazywamy równanie postaci

$$y' = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^k,$$

gdzie A jest macierzą rozmiaru $k \times k$.

Stwierdzenie. *Jeśli B macierz rozmiaru $k \times k$, to istnieje macierz*

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{B}{n} \right)^n,$$

gdzie I jest macierzą identycznościową.

Twierdzenie. *Rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania*

$$y' = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^k$$

przy warunkach początkowych $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k+1}$ jest funkcja

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0.$$

Twierdzenie. *Niech A macierz rozmiaru $k \times k$ i niech $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ będą wartościami własnymi macierzy A o krotnościach, odpowiednio, k_1, \dots, k_m , gdzie $k_1 + \dots + k_m = k$. Wtedy rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania*

$$y' = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^k$$

przy warunkach początkowych $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k+1}$ jest funkcja

$$y(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j(t-t_0)} \sum_{p=0}^{k_j-1} \frac{(t-t_0)^p}{p!} (A - \lambda_j I)^p y_{0,j},$$

gdzie $y_0 = \sum_{j=1}^m y_{0,j}$, $y_{0,j} \in \mathbb{C}^k$, $(A - \lambda_j I)^{k_j} y_{0,j} = 0$.

Przykład – model rynku pracy

Model pochodzi z książki W. Dubnicki, J. Kłopotowski, T. Szapiro, *Analiza Matematyczna. Podręcznik dla ekonomistów*, PWN 2010.

Rozważamy rynek pracy dla grupy N osób. Każda osoba może pracować legalnie, nielegalnie (w tzw. *szarej strefie*) lub być bezrobotna. Założenia modelu:

- Wśród osób zatrudnionych legalnie, odsetek tych, które tracą zatrudnienie wynosi α .
- Wśród osób bezrobotnych, odsetek tych, którzy są skłonni podjąć pracę legalnie wynosi ε .
- Wśród osób bezrobotnych skłonnych podjąć pracę legalnie, odsetek tych, którzy znajdują tę pracę wynosi β .
- Wszyscy bezrobotni, którzy nie znajdują legalnej pracy, przechodzą do szarej strefy.
- Wśród osób pracujących w szarej strefie, odsetek tych, którzy legalizują pracę wynosi δ .

Powyższe założenia prowadzą do następującego układu równań:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \alpha y_2 \\ y_2' = \varepsilon \beta y_1 - \alpha y_2 + \delta y_3 \\ y_3' = (1 - \varepsilon \beta) y_1 - \delta y_3, \end{cases}$$

gdzie y_1, y_2, y_3 oznaczają, odpowiednio, liczbę osób bezrobotnych, zatrudnionych legalnie i w szarej strefie. Układ ten jest liniowym układem równań o stałych współczynnikach o macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ \varepsilon \beta & -\alpha & \delta \\ 1 - \varepsilon \beta & 0 & -\delta \end{bmatrix}.$$

Rozwiązania uzyskuje się stosując wzory podane w poprzednim twierdzeniu.