

Analiza Matematyczna I

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład XIV

20 lutego 2024

Rachunek różniczkowy

Elastyczność i asymptoty

Elastyczność funkcji

Definicja. *Elastycznością* funkcji f różniczkowalnej w punkcie x , gdzie $f(x) \neq 0$, nazywamy liczbę

$$E_f(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Elastyczność funkcji mierzy względny przyrost funkcji f przy (małej) względnej zmianie argumentu funkcji.

$$qE_f(x) = qx \frac{f'(x)}{f(x)} \approx \frac{f(x+qx) - f(x)}{f(x)} \quad \text{dla } q \approx 0.$$

Np. jeśli popyt na pewien produkt w zależności od ceny ma elastyczność $E = -3$, to przy wzroście ceny o 1% popyt zmniejszy się o około 3%.

Własności elastyczności funkcji

Twierdzenie. *Jeśli funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie x oraz $f(x), g(x) \neq 0$, to:*

- $E_{fg}(x) = E_f(x) + E_g(x)$,
- $E_{f/g}(x) = E_f(x) - E_g(x)$,
- $E_{f+g}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} E_f(x) + \frac{g(x)}{f(x) + g(x)} E_g(x)$.

Asymptoty

Definicja. Mówimy że prosta $y = ax + b$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ jest *asymptotą* wykresu funkcji $f : (c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ w $+\infty$, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Jeśli $a \neq 0$, to mówimy o asymptocie *ukośnej*, a jeśli $a = 0$ — o asymptocie *poziomej*. Podobnie definiujemy asymptoty w $-\infty$.

Definicja. Prosta $x = x_0$ jest asymptotą *pionową* prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji $f : (x_0, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ($f : (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$), jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$) jest równa $\pm\infty$.

Stwierdzenie. Jeśli $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lub poziomą wykresu funkcji f w $\pm\infty$, to

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax).$$

Poza tym, jeśli f różniczkowalna i istnieje skończona granica $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x)$, to a jest równe tej granicy.

Wypukłość funkcji

Funkcje wypukłe

Definicja. Funkcja $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P przedział w \mathbb{R} , jest *wypukła*, jeśli dla każdych punktów $x_1, x_2 \in P$ i liczby $t \in [0, 1]$ zachodzi

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Funkcja f jest *ściśle wypukła*, jeśli ta nierówność jest ostra dla $x_1 \neq x_2$, $t \neq 0$. Funkcja f jest *wklęsła* (*ściśle wklęsła*), jeśli funkcja $-f$ jest wypukła (*ściśle wypukła*).

Uwaga. W sensie geometrycznym, f jest (ściśle) wypukła, jeśli dla każdego $x_1, x_2 \in P$ część wykresu f pomiędzy punktami $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ leży pod prostą sieczną przechodzącą przez te punkty lub na tej prostej.

Podstawowe własności funkcji wypukłych

Twierdzenie. Niech P przedział w \mathbb{R} .

- Jeśli $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ są wypukłe, to $f + g$ oraz $\max(f, g)$ są wypukłe.
- Jeśli $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła oraz $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie Q przedział zawierający $f(P)$, jest rosnąca i wypukła, to $g \circ f$ jest wypukła.

- Jeśli $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ jest wklęsła oraz $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie Q przedział zawierający $f(P)$, jest malejąca i wypukła, to $g \circ f$ jest wypukła.

Twierdzenie. Jeśli $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} , jest wypukła, to jest ciągła i ma pochodne jednostronne w każdym punkcie $x \in P$. Poza tym, f spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale postaci $[a, b]$ zawartym w P .

Twierdzenie. Jeśli $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} , jest różniczkowalna, to f jest wypukła (ściśle wypukła) wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest funkcją rosnącą (ściśle rosnącą). Jest to równoważne temu, że dla każdego $x_0 \in P$ wykres f leży nad prostą styczną do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ lub na tej prostej.

Przypomnienie

Prosta styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Twierdzenie. Jeśli $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} , jest dwukrotnie różniczkowalna, to f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \geq 0$ dla każdego $x \in P$. Jeśli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in P$, to f jest ściśle wypukła.

Uwaga. Analogiczne twierdzenia (z przeciwnymi znakami nierówności) zachodzą dla funkcji wklęsłych (ściśle wklęsłych).

Przykład. Funkcja $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ jest ściśle wypukła, bo $f''(x) = e^x > 0$. Podobnie ściśle wypukła jest funkcja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Natomiast funkcje $f(x) = \ln x$, $x > 0$ i $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ są ściśle wklęsłe.

Przykład. Ponieważ funkcja $f(x) = e^x$ jest ściśle wypukła na \mathbb{R} , a styczna do jej wykresu w punkcie $(0, 1)$ ma równanie $y = x + 1$, otrzymujemy nierówność

$$e^x \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

przy czym równość zachodzi tylko dla $x = 0$. Podobnie, z wklęsłości funkcji $f(x) = \ln x$ otrzymujemy nierówność

$$\ln x \leq x - 1 \quad x > 0,$$

przy czym równość zachodzi tylko dla $x = 1$.

Twierdzenie. Jeśli $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} , jest ściśle wypukła, to albo jest ściśle monotoniczna, albo osiąga minimum w dokładnie jednym punkcie przedziału P .

Uwaga. Ze względu na powyższe własności, funkcje wypukłe mają duże znaczenie w zagadnieniach optymalizacyjnych (np. w modelach ekonomicznych).

Przykład. Funkcja zysku (ang.: *profit function*) w klasycznych modelach ekonomicznych jest funkcją wypukłą.

Wypukłość w teorii wyboru konsumenta

Definicja. *Zbiór budżetowy* (ang.: *budget set*) (przecięcie wszystkich *ograniczeń budżetowych*), to zbiór wszystkich możliwych koszyków (kombinacji) dóbr i usług, na które konsument może sobie pozwolić przy danych cenach i dochodach.

Przykład. Zbiór budżetowy w klasycznych modelach mikroekonomicznych jest zbiorem wypukłym (np. wielokątem).

Funkcja użyteczności

Definicja. *Funkcja użyteczności* (ang.: *utility function*) $u(x)$ określa użyteczność posiadania przez osobę lub instytucję pewnej wartości (pieniężnej) x . Zwykle zakłada się, że funkcja użyteczności ma własność *nienasycenia* (ang.: *non-satiation*), co oznacza $u' > 0$ (funkcja użyteczności jest ściśle rosnąca). Mówimy, że funkcja użyteczności ma własność *awersji do ryzyka* (ang.: *risk aversion*), jeśli $u'' < 0$ (funkcja użyteczności jest wklęsła).

Przykład. Jako funkcja użyteczności z awersją do ryzyka w modelach ekonomicznych jest używana m.in. funkcja $u(x) = \ln x$.

Preferencje konsumenta i krzywe obojętności

Definicja. *Krzywe obojętności* (ang.: *indifference curve*) to zbiory takich koszyków dóbr i usług, które sprawiają konsumentowi jednakowe zadowolenie (dostarczają mu takiej samej użyteczności całkowitej).

Przykład. Wypukłe preferencje konsumenta dotyczące doboru koszyków dóbr i usług odpowiadają strategii „średnia jest lepsza niż ekstrema”. Prowadzi to do wypukłości krzywych obojętności.

Nierówność Jensena

Definicja. Funkcja $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P przedział w \mathbb{R} spełnia nierówność Jensena, jeśli dla każdego $n \geq 2$, każdych punktów $x_1, \dots, x_n \in P$ i liczb $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$, takich że $t_1 + \dots + t_n = 1$ zachodzi

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n).$$

Twierdzenie. *Funkcja $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P przedział w \mathbb{R} jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia nierówność Jensena.*

Poza tym, f jest ściśle wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia nierówność Jensena z ostrym znakiem nierówności poza przypadkiem $t_k = 1$ dla pewnego k lub $x_1 = \dots = x_n$.

Uwagi

- Analogiczne twierdzenie (z przeciwnymi znakami nierówności) zachodzi dla funkcji wklęsłych (ściśle wklęsłych).
- Dla $n = 2$ nierówność Jensena jest nierównością z definicji wypukłości funkcji.

Przykład. Ponieważ $f(x) = -\ln x$, $x > 0$ jest funkcją ściśle wypukłą, to z nierówności Jensena dla $t_1 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ otrzymujemy

$$-\ln \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leqslant -\frac{1}{n}(\ln x_1 + \dots + \ln x_n) \quad \text{dla } x_1, \dots, x_n > 0,$$

co daje

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n},$$

czyli nierówność o średniej arytmetycznej i geometrycznej.

Punkty przegięcia

Definicja (jeden z wariantów). Punkt $x \in P$, gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} , jest *punktem przegięcia* wykresu funkcji $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli istnieje $\delta > 0$, taka że f jest ściśle wypukła na przedziale $(x - \delta, x)$, a ściśle wklęsła na przedziale $(x, x + \delta)$ lub odwrotnie.

Twierdzenie. Jeśli x jest punktem przegięcia wykresu funkcji f i f dwukrotnie różniczkowalna w x , to $f''(x) = 0$.

Twierdzenie. Jeśli f jest n -krotnie różniczkowalna w punkcie x dla pewnego $n > 2$ oraz

$$0 = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x), \quad f^{(n)}(x) \neq 0,$$

to:

- jeśli n nieparzyste, to x jest punktem przegięcia wykresu funkcji f ,
- jeśli n parzyste, to x nie jest punktem przegięcia wykresu funkcji f .

Dowód. Rozwinięcie Taylora. □