

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład XI

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Funkcje wielu zmiennych

Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Funkcyjne rozwiązywanie równań

Przykład. Rozważamy równanie

$$x^2 + y^2 = 1$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Traktujemy y jako niewiadomą. Dla danego punktu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ spełniającego to równanie szukamy rozwiązania y jako funkcji $y(x)$, takiej że $y(x_0) = y_0$.

- Dla każdego $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$ istnieje nieskończenie wiele takich funkcji $y(x)$ określonych w pewnym otoczeniu punktu x_0 (przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$). Funkcje te są postaci

$$y(x) = q(x)\sqrt{1 - x^2},$$

gdzie $q(x) = \pm 1$ (niezależnie dla różnych x).

- Dla każdego $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$ istnieje dokładnie jedna taka funkcja ciągła $y(x)$ określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Ta funkcja jest postaci

$$y(x) = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

(gdzie znak \pm ustalony tak samo dla wszystkich x) i jest funkcją klasy C^1 .

- Dla $(x_0, y_0) = (\pm 1, 0)$ nie ma takiej funkcji określonej w otoczeniu x_0 (jest określona w jednostronnym otoczeniu x_0 i nie jest różniczkowalna w x_0).

Twierdzenie o funkcji uwikłanej (wersja uproszczona)

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 , dla otwartego zbioru $A \subset \mathbb{R}^{k+1}$, gdzie współrzędne punktów zapisujemy jako (\underline{x}, y) dla $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ i $y \in \mathbb{R}$. Rozważamy równanie

$$f(\underline{x}, y) = 0.$$

Założmy, że pewien punkt $(\underline{x}_0, y_0) \in A$ jest rozwiązaniem tego równania i $\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}_0, y_0) \neq 0$.

Wtedy istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}^k$ punktu \underline{x}_0 , otoczenie $V \subset \mathbb{R}$ punktu y_0 oraz (dokładnie jedna) funkcja $y : U \rightarrow V$ klasy C^1 , taka że $y(\underline{x}_0) = y_0$ i $f(\underline{x}, y(\underline{x})) = 0$ dla każdego $\underline{x} \in U$. Co więcej, dla $i = 1, \dots, k$,

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(\underline{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}, y(\underline{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}, y(\underline{x}))}.$$

Uwaga. Wzór na $\frac{\partial y}{\partial x_i}(\underline{x})$ wynika ze wzoru na pochodną cząstkową złożenia funkcji przy różniczkowaniu równania $f(\underline{x}, y(\underline{x})) = 0$ po zmiennej x_i .

Uwaga. Twierdzenie o funkcji uwikłanej uogólnia się na przypadek równań z większą liczbą niewiadomych y_1, \dots, y_m .

Przykład.

$$x + y + \sin(xy) = 0, \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Równanie jest postaci

$$f(x, y) = 0 \quad \text{dla} \quad f(x, y) = x + y + \sin(xy).$$

Funkcja f jest klasy C^1 na \mathbb{R}^2 . Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ spełnia równanie $f(x, y) = 0$. Poza tym,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + x \cos(xy),$$

więc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1 \neq 0$. Zatem, dla punktu (x_0, y_0) są spełnione założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej, czyli istnieje funkcja $y(x)$ klasy C^1 określona w pewnym otoczeniu U punktu $x_0 = 0$, taka że $y(0) = 0$ i

$$x + y(x) + \sin(xy(x)) = 0$$

dla każdego $x \in U$. Poza tym,

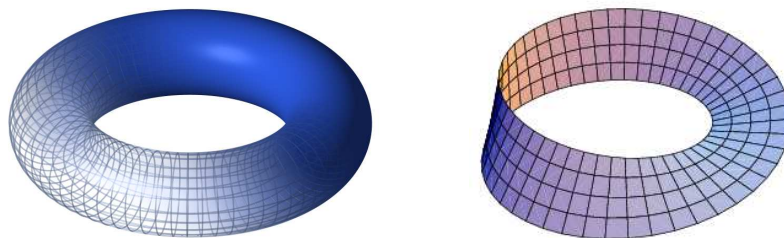
$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{1 + y(x) \cos(xy(x))}{1 + x \cos(xy(x))}.$$

W szczególności, $y'(x_0) = y'(0) = -\frac{1+0}{1+0} = -1$, co daje nam pierwsze przybliżenie Taylora funkcji y w otoczeniu 0.

Rozmaitości wyznaczone przez funkcje

Rozmaitości

Rozmaitości d -wymiarowe to zbiory, które lokalnie „przypominają” przestrzeń d -wymiarową przestrzeń euklidesową \mathbb{R}^d , np. okrąg i sinusoida to rozmaitości 1-wymiarowe, sfera i torus („dętka”) to rozmaitości 2-wymiarowe (powierzchnie) etc.



Torus i wstęga Möbiusa (powierzchnia jednostronna)

Definicja. Niech

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

będzie funkcją klasy C^1 , gdzie A jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^k i $k \geq m$. Niech

$$M = \{x \in A : g(x) = 0\}.$$

Założmy, że $M \neq \emptyset$ i różniczka $Dg(x)$ jest odwzorowaniem na \mathbb{R}^m dla każdego $x \in M$. Oznaczmy $d = k - m$. Wtedy M nazywamy d -wymiarową *rozmaitością* klasy C^1 *wyznaczoną przez funkcję* g .

Uwaga. $Dg(x)$ jest odwzorowaniem na $\mathbb{R}^m \iff$ macierz Jacobiego $MJg(x)$ ma rząd $m \iff$ gradienty $\text{grad } g_1(x), \dots, \text{grad } g_m(x)$ są liniowo niezależne, gdzie $g = (g_1, \dots, g_m)$. W szczególności, jeśli $m = 1$, to ten warunek jest równoważny temu, że $\text{grad } g(x) \neq 0$.

Uwaga. Warunek $M = \{x \in A : g(x) = 0\}$ można zastąpić przez $M = \{x \in A : g(x) = c\}$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}^m$. Taki zbiór nazywamy *poziomicą* funkcji g .

Definicja. Niech M będzie d -wymiarową rozmaitością wyznaczoną przez funkcję $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie A otwarty podzbiór \mathbb{R}^k i niech $x \in M$. *Przestrzenią styczną* do M w punkcie x nazywamy d -wymiarową podprzestrzeń liniową $T_x M$ przestrzeni \mathbb{R}^k równą $\text{Ker } Dg(x)$. Innymi słowy,

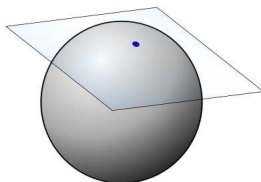
$$T_x M = \{v \in \mathbb{R}^k : Dg(x)(v) = 0\}.$$

Elementy przestrzeni stycznej $T_x M$ nazywamy *wektorami stycznymi* do M w punkcie x .

Uwaga. Przestrzeń styczną do rozmaitości M w punkcie x można zdefiniować geometrycznie jako przestrzeń liniową rozpiętą na wektorach, których kierunki są granicznymi kierunkami prostych siecznych przechodzących przez x i inne punkty M .

Uwaga. Przestrzeń styczna z definicji jest przestrzenią liniową. Definiuje się też *afiniczną przestrzeń styczną* do M w punkcie x („zaczepioną” w punkcie x) jako

$$T_x M + x = \{v + x : v \in T_x M\}.$$



Definicja. Dwa wektory $v, w \in \mathbb{R}^k$ są *ortogonalne* (prostopadłe), jeśli $\langle v, w \rangle = 0$.

Definicja. Przestrzeń normalną (prostopadłą) do rozmaitości M w punkcie $x \in M$ (ozn. $N_x M$) nazywamy dopełnienie ortogonalne przestrzeni stycznej $T_x M$, czyli m -wymiarową podprzestrzeń liniową przestrzeni \mathbb{R}^k złożoną ze wszystkich wektorów prostopadłych do wektorów stycznych do M w punkcie x . Innymi słowy,

$$N_x M = \{v \in \mathbb{R}^k : \forall w \in T_x M \langle v, w \rangle = 0\}.$$

Twierdzenie. Przestrzeń normalna $N_x M$ do rozmaitości M wyznaczonej przez funkcję g jest rozpięta na wektorach $\text{grad } g_1(x), \dots, \text{grad } g_m(x)$.

Przykład. Sfera $S(a, r)$ w \mathbb{R}^k jest $k - 1$ -wymiarową rozmaitością klasy C^1 .

Mamy

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - a\|^2 = r^2\}.$$

Zatem $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^k : g(x) = 0\}$ dla $g(x) = \|x - a\|^2 - r^2$. Funkcja g jest klasy C^1 . Mamy $S(a, r) \neq \emptyset$ oraz

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = 2(x_i - a_i)$$

dla $x = (x_1, \dots, x_k)$, $a = (a_1, \dots, a_k)$. Zatem

$$\text{grad } g(x) = 2(x - a),$$

więc $\text{grad } g(x) \neq 0$ dla $x \in S(a, r)$. Wynika stąd, że $S(a, r)$ jest $k - 1$ -wymiarową rozmaitością klasy C^1 wyznaczoną przez funkcję g .

Poza tym, dla $x \in S(a, r)$, przestrzeń normalna $N_x S(a, r)$ to 1-wymiarowa przestrzeń liniowa wyznaczona przez wektor $x - a$, tzn.

$$N_x S(a, r) = \{t(x - a) : t \in \mathbb{R}\},$$

a przestrzeń styczna $T_x S(a, r)$ ma równanie

$$T_x S(a, r) = \{v \in \mathbb{R}^k : \langle v, x - a \rangle = 0\}.$$

Np. w \mathbb{R}^3 płaszczyzna styczna do sfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ w punkcie (x_0, y_0, z_0) ma równanie $\{(u, v, w) : ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0\}$.

Przykład. Niech

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^2 - y^2$$

i niech

$$M_c = \{(x, y) : g(x, y) = c\} = \{(x, y) : x^2 - y^2 = c\}$$

dla $c \in \mathbb{R}$. Mamy $\text{grad } g(x, y) = (2x, -2y)$, więc

$$\text{grad } g(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0).$$

Zatem, jeśli $c \neq 0$, to M_c jest 1-wymiarową rozmaitością (łuki hiperboli). Dla $c = 0$, M_0 nie jest rozmaitością (jest sumą dwóch prostych $y = \pm x$).

Przestrzeń styczna do wykresu funkcji

Twierdzenie. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 , gdzie A otwarty podzbiór \mathbb{R}^k . Wtedy wykres f , to znaczy zbiór

$$\text{graph } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{k+1} : x = (x_1, \dots, x_k) \in A\}$$

jest rozmaitością k -wymiarową klasy C^1 oraz dla każdego $a \in A$,

$$\begin{aligned} T_{(a, f(a))} \text{graph } f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} : x \in \mathbb{R}^k, y = \langle \text{grad } f(a), x \rangle\} \\ &= \text{graph } Df(a). \end{aligned}$$

Afiniczna przestrzeń styczna do wykresu f w punkcie $(a, f(a))$ ma równanie

$$y = Df(a)(x - a) + f(a).$$

Dowód. Niech

$$g : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = f(x) - y.$$

Wtedy $\text{graph } f = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : g(x, y) = 0\}$.

Poza tym, g jest klasy C^1 oraz dla każdego $(x, y) \in A \times \mathbb{R}$,

$$\text{grad } g(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x), -1 \right) \neq 0,$$

więc $MJg(x, y)$ ma rząd 1. Zatem, wykres f jest rozmaitością k -wymiarową klasy C^1 wyznaczoną przez funkcję g oraz dla każdego $(a, f(a)) \in \text{graph } f$ mamy

$$\begin{aligned} T_{(a, f(a))} \text{graph } f &= \text{Ker } Dg(a, f(a)) \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} : \langle \text{grad } g(a, f(a)), (x, y) \rangle = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} : \langle \text{grad } f(a), x \rangle - y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} : y = Df(a)(x)\} = \text{graph } Df(a). \end{aligned}$$

□