

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład VI

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Funkcje wielu zmiennych

Różniczkowalność funkcji w \mathbb{R}^k

Pochodne kierunkowe i cząstkowe

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty i niech $x \in A$, $h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Mówimy, że funkcja f ma *pochodną kierunkową* w punkcie x w kierunku wektora h , jeśli istnieje (skończona) granica

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Pochodną kierunkową (czyli tę granicę) oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ lub $f'_h(x)$.

Uwaga. Pochodna kierunkowa w punkcie x jest wektorem w \mathbb{R}^m .

Uwaga. Pochodna kierunkowa w punkcie x jest pochodną funkcji jednej zmiennej powstałej przez obcięcie f do prostej przechodzącej przez x w kierunku wektora h , tzn. $\frac{\partial f}{\partial h}(x) = g'(0)$ dla $g(t) = f(x + th)$, gdzie $g' = (g'_1, \dots, g'_m)$.

Definicja. *Pochodna cząstkowa* funkcji f względem i -tej zmiennej ($i = 1, \dots, k$), oznaczana $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ lub $f'_{x_i}(x)$, to pochodna kierunkowa f w kierunku i -tego wektora $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, tzn.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x).$$

Uwaga. W oznaczeniu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ symbol x_i nie oznacza i -tej współrzędnej punktu x , tylko różniczkowanie po i -tej zmiennej.

Uwaga. Pochodna cząstkowa f względem i -tej zmiennej to pochodna f jako funkcji jednej zmiennej x_i przy ustalonych innych zmiennych.

Przykład. Niech $f(x, y) = (e^{x^2+y^3}, \sin x \cos y)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= (2xe^{x^2+y^3}, \cos x \cos y), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= (3y^2e^{x^2+y^3}, -\sin x \sin y).\end{aligned}$$

Twierdzenie. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty i niech $x \in A$, $h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Wtedy pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją pochodne kierunkowe $\frac{\partial f_1}{\partial h}(x), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial h}(x)$, gdzie $f = (f_1, \dots, f_m)$ i wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial h}(x), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial h}(x) \right).$$

W szczególności, to samo zachodzi dla pochodnych czątkowych, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \right),$$

$i = 1, \dots, k$.

Gradient funkcji

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty, będzie funkcją skalarną i niech $x \in A$. Gradientem funkcji f w punkcie x nazywamy wektor

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right).$$

Uwaga. $\text{grad } f(x)$ jest wektorem w \mathbb{R}^k .

Inne oznaczenia gradientu to $\nabla f(x)$, $\vec{\nabla} f(x)$.

Macierz Jacobiego

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty i niech $x \in A$. Załóżmy, że f ma w punkcie x pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych. Macierzą Jacobiego funkcji f w punkcie x nazywamy macierz

$$MJf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{grad } f_1(x) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(x) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right],$$

gdzie $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Przykład. Macierzą Jacobiego funkcji

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

jest macierz

$$MJf(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Istnienie pochodnych cząstkowych nie jest dostatecznie silną własnością wystarczającą do zdefiniowania różniczkowalności funkcji wielu zmiennych.

Przykład. Niech $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = 0 \text{ lub } y = 0, \\ 1 & \text{gdy } x, y \neq 0. \end{cases}$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, a funkcja f nie jest ciągła w $(0, 0)$.

Uwaga. Właściwe pojęcie różniczkowalności funkcji wielu zmiennych jest związane z możliwością dobrego przybliżania funkcji f w otoczeniu danego punktu przez przekształcenie liniowe.

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty i niech $x \in A$. Mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie x , jeśli istnieje przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, takie że

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^k}} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Wtedy takie przekształcenie liniowe L jest wyznaczone jednoznacznie i nazywamy je *różniczką* lub *pochodną* funkcji f w punkcie x . Oznaczamy je $Df(x)$ (inne oznaczenia to $D_x f$, $df(x)$).

Uwaga. Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczką funkcji f w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x+h) = f(x) + L(h) + \alpha(h)$, gdzie $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0$.

Uwaga. Dla $k = m = 1$ funkcja f jest różniczkowalna $\iff f$ jest różniczkowalna według definicji z rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej i wtedy $Df(x)(h) = f'(x)h$ dla $h \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x , to f jest ciągła w punkcie x .

Twierdzenie (Warunek konieczny różniczkowalności). Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x , to f ma pochodne kierunkowe w punkcie x we wszystkich kierunkach $h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$

$$Df(x)(h) = \frac{\partial f}{\partial h}(x) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

dla $h = (h_1, \dots, h_k)$.

Wniosek. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x , to macierz różniczki $Df(x)$ jako przekształcenia liniowego jest macierzą Jacobiego $MJf(x)$. Innymi słowy,

$$Df(x)(h) = MJf(x) \cdot h = \begin{bmatrix} \langle \text{grad } f_1(x), h \rangle \\ \vdots \\ \langle \text{grad } f_m(x), h \rangle \end{bmatrix},$$

gdzie $f = (f_1, \dots, f_m)$. W szczególności, jeśli $m = 1$ (czyli f jest skalarna), to

$$Df(x)(h) = \langle \text{grad } f(x), h \rangle.$$

Wniosek. Aby sprawdzić różniczkowalność funkcji f w punkcie x , należy obliczyć jej pochodne cząstkowe w punkcie x (jeśli nie istnieją, to f nie jest różniczkowalna w x), następnie napisać „kandydata” na różniczkę $L(h) = \sum_{i=1}^k h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ i sprawdzić, czy granica z definicji różniczki istnieje i jest równa 0.

Przykład. Zbadać różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

w punkcie $(0, 0)$.

Obliczamy najpierw pochodne cząstkowe.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = 0.$$

Podobnie, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Kandydatem na różniczkę jest więc przekształcenie $L(h) = L(h_1, h_2) = 0h_1 + 0h_2 = 0$.

Sprawdzamy istnienie granicy z definicji różniczki.

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - L(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{-\frac{1}{h_1^2 + h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = 0.$$

Zatem, funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$ i $Df(0, 0) = 0$.