

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład IX

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Funkcje wielu zmiennych

Ekstrema funkcji w \mathbb{R}^k

Formy kwadratowe

Definicja. Niech $M = [a_{i,j}]_{i,j=1}^k$ będzie symetryczną macierzą kwadratową wymiaru $k \times k$ o współczynnikach rzeczywistych (tzn. $a_{i,j} = a_{j,i} \in \mathbb{R}$). *Formą kwadratową* (symetryczną) o macierzy M nazywamy funkcję $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną przez

$$\varphi(h) = h^T M h = \langle h, M h \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{i,j} h_i h_j,$$

gdzie $h = (h_1, \dots, h_k)$.

Przykład. $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, to $\varphi(h_1, h_2) = h_1^2 + 6h_1h_2 - 2h_2^2$.

Definicja. Niech $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową o macierzy M . Mówimy, że φ :

- jest *nieujemnie określona* lub *dodatnio półokreślona*, jeśli $\varphi(h) \geq 0$ dla każdego $h \in \mathbb{R}^k$,
- jest *niedodatnio określona*, lub *ujemnie półokreślona*, jeśli $\varphi(h) \leq 0$ dla każdego $h \in \mathbb{R}^k$,
- jest *dodatnio określona*, jeśli $\varphi(h) > 0$ dla każdego $h \in \mathbb{R}^k$, $h \neq 0$,

- jest *ujemnie określona*, jeśli $\varphi(h) < 0$ dla każdego $h \in \mathbb{R}^k$, $h \neq 0$,
- *zmienia znak*, lub jest *nieokreślona*, jeśli nie jest ani nieujemnie, ani niedodatnio określona, czyli istnieją $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^k$, takie że $\varphi(h_1) > 0$, $\varphi(h_2) < 0$.

Uwaga. Zawsze zachodzi $\varphi(0) = 0$.

Definicja. Niech M macierz wymiaru $k \times k$ i niech $l \in \{1, \dots, k\}$. *Minorem głównym* macierzy M stopnia l nazywamy wyznacznik macierzy wymiaru $l \times l$ powstałej z M przez skreślenie pewnych $k - l$ wierszy i $k - l$ kolumn o tych samych numerach, co wiersze.

Przykład. Obliczyć wszystkie minory główne macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Minory główne stopnia 1:

$$\det[1] = 1, \quad \det[4] = 4, \quad \det[6] = 6$$

(\det oznacza wyznacznik).

Minory główne stopnia 2:

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 4 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = -1, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = -3,$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Minor główny stopnia 3:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 5 \cdot 1 - 6 \cdot 2 \cdot 2 = -1.$$

Twierdzenie (kryterium Sylwestera). Niech $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ (symetryczna) forma kwadratowa o macierzy $M = [a_{i,j}]_{i,j=1}^k$. Wtedy:

- φ *nieujemnie określona* \iff każdy minor główny macierzy M jest nieujemny,
- φ *niedodatnio określona* \iff każdy minor główny macierzy M stopnia l (dla $l = 1, \dots, k$) pomnożony przez $(-1)^l$ jest nieujemny.

- φ *dodatnio określona* \iff dla każdego $l = 1, \dots, k$, $\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l,1} & \cdots & a_{l,l} \end{bmatrix} > 0$.

- φ ujemnie określona \iff dla każdego $l = 1, \dots, k$, $(-1)^l \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l,1} & \cdots & a_{l,l} \end{bmatrix} > 0$.

Uwaga. Punkt drugi kryterium Sylwestera \iff wszystkie minory główne stopnia parzystego są nieujemne, a stopnia nieparzystego — niedodatnie.

Podobnie, punkt czwarty kryterium Sylwestera $\iff \det[a_{i,j}]_{i,j=1}^l$ jest dodatni dla l parzystych, a ujemny dla l nieparzystych.

Przykład (kryterium Sylwestera w wymiarze 2). $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, to $\det M = ac - b^2$, $\varphi(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$. Wtedy φ jest:

- nieujemnie określona $\iff a \geq 0, c \geq 0, ac - b^2 \geq 0$,
- niedodatnio określona $\iff a \leq 0, c \leq 0, ac - b^2 \geq 0$,
- dodatnio określona $\iff a > 0, ac - b^2 > 0$,
- ujemnie określona $\iff a < 0, ac - b^2 > 0$.

Wniosek. Jeśli $\det M = ac - b^2 < 0$, to φ zmienia znak.

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ będzie funkcją rzeczywistą klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $x \in \text{int } A$. Formę drugiej różniczki funkcji f w punkcie x nazywamy (symetryczną) formę kwadratową, której macierz jest macierzą Hessego funkcji f w punkcie x , czyli formę

$$\varphi(h) = D^2 f(x)(h, h) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j,$$

gdzie $h = (h_1, \dots, h_k)$.

Twierdzenie (warunki konieczne istnienia minimum i maksimum lokalnego). Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ będzie funkcją rzeczywistą klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $x \in \text{int } A$, takim że $\text{grad } f(x) = 0$. Wtedy:

- jeśli f ma w punkcie x minimum lokalne, to forma drugiej różniczki f w punkcie x jest nieujemnie określona,
- jeśli f ma w punkcie x maksimum lokalne, to forma drugiej różniczki f w punkcie x jest niedodatnio określona.

Wniosek. Jeśli $\text{grad } f(x) = 0$ i forma drugiej różniczki f w punkcie x zmienia znak (punkt x nazywa się wtedy punktem siodłowym), to f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie x .

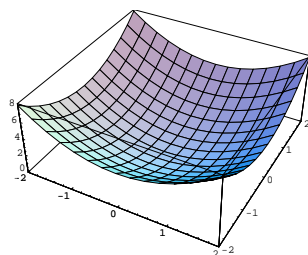
Twierdzenie (warunki wystarczające istnienia minimum i maksimum lokalnego). Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ będzie funkcją rzeczywistą klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $x \in \text{int } A$, takim że $\text{grad } f(x) = 0$. Wtedy:

- jeśli forma drugiej różniczki f w punkcie x jest dodatnio określona, to f ma w punkcie x (silne) minimum lokalne,
- jeśli forma drugiej różniczki f w punkcie x jest ujemnie określona, to f ma w punkcie x (silne) maksimum lokalne.

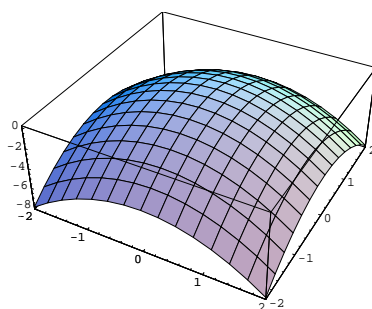
Uwaga. Przypadek wątpliwy jest wtedy, gdy forma drugiej różniczki f w punkcie x jest nieujemnie (niedodatnio) określona, a nie jest dodatnio (ujemnie) określona (np. wtedy, gdy ta forma jest zerowa).

Rozpatrzmy teraz kilka prostych przykładów zachowania funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ w otoczeniu punktu $(0, 0)$. We wszystkich tych przykładach mamy $\text{grad } f(0, 0) = 0$.

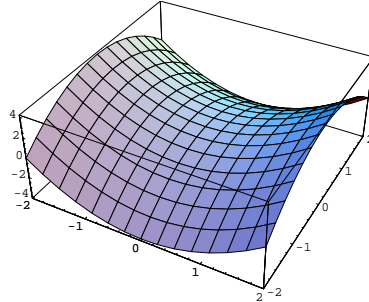
Przykład. Niech $f(x, y) = x^2 + y^2$. Mamy $\text{grad } f(x, y) = (2x, 2y)$, więc macierz Hessego funkcji f w $(0, 0)$ jest równa $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Z kryterium Sylwestera, forma drugiej różniczki w $(0, 0)$ jest dodatnio określona, zatem f ma w $(0, 0)$ (silne) minimum lokalne (i globalne) równe 0.



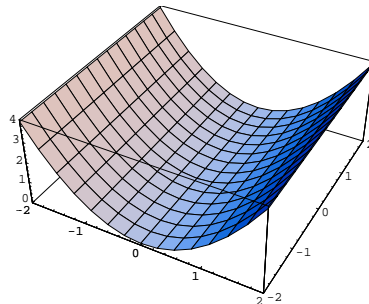
Przykład. Niech $f(x, y) = -x^2 - y^2$. Mamy $\text{grad } f(x, y) = (-2x, -2y)$, więc macierz Hessego funkcji f w punkcie $(0, 0)$ jest równa $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Z kryterium Sylwestera, forma drugiej różniczki w punkcie $(0, 0)$ jest ujemnie określona, zatem f ma w punkcie $(0, 0)$ (silne) maksimum lokalne (i globalne) równe 0.



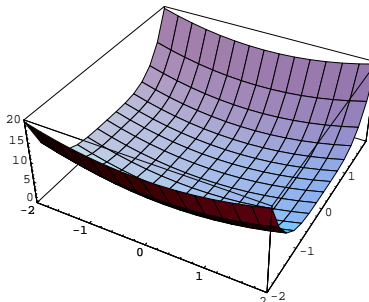
Przykład. Niech $f(x, y) = x^2 - y^2$. Mamy $\text{grad } f(x, y) = (2x, -2y)$, więc macierz Hessego funkcji f w punkcie $(0, 0)$ jest równa $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Z kryterium Sylwestera, forma drugiej różniczki w punkcie $(0, 0)$ zmienia znak, zatem f ma w punkcie $(0, 0)$ punkt siodłowy i nie ma ekstremum lokalnego.



Przykład. Niech $f(x, y) = x^2$. Mamy $\text{grad } f(x, y) = (2x, 0)$, więc macierz Hessego funkcji f w punkcie $(0, 0)$ jest równa $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Kryterium Sylwestera nie rozstrzyga o istnieniu ekstremum lokalnego. Z postaci funkcji widać, że $f(0, y) = 0$ i $f(x, y) > 0$ dla $x \neq 0$, więc f ma w punkcie $(0, 0)$ (słabe) minimum lokalne (i globalne) równe 0.



Przykład. Niech $f(x, y) = x^2 + y^4$. Mamy $\text{grad } f(x, y) = (2x, 4y^3)$, więc (jak w poprzednim przykładzie) macierz Hessego funkcji f w punkcie $(0, 0)$ jest równa $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Kryterium Sylwestera nie rozstrzyga o istnieniu ekstremum lokalnego. Z postaci funkcji widać, że $f(0, 0) = 0$ i $f(x, y) > 0$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$, więc f ma w punkcie $(0, 0)$ (silne) minimum lokalne (i globalne) równe 0.



Przykład. Niech $f(x, y) = x^2 - y^4$. Mamy $\text{grad } f(x, y) = (2x, -4y^3)$, więc (jak w poprzednich dwóch przykładach) macierz Hessego funkcji f w punkcie $(0, 0)$ jest równa $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Kryterium Sylwestera nie rozstrzyga o istnieniu ekstremum lokalnego. Z postaci funkcji widać, że $f(0, 0) = 0$, $f(x, 0) > 0$ dla $x \neq 0$ i $f(0, y) < 0$ dla $y \neq 0$, więc f nie ma w punkcie $(0, 0)$ ekstremum lokalnego.

