

# Analiza Matematyczna II

## Wydział Nauk Ekonomicznych

### wykład X

Uniwersytet Warszawski  
semestr letni

## Funkcje wielu zmiennych

### Ekstrema funkcji w $\mathbb{R}^k$

**Przykład.** Znaleźć ekstrema lokalne funkcji  $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Liczymy pochodne cząstkowe funkcji  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x^3 - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4y.$$

Rozwiązujemy równanie  $\text{grad } f(x, y) = 0$ , czyli układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

Mamy

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0, \end{cases}$$

co daje  $x = 0, \pm \frac{1}{2}$  i  $y = 0, \pm 1$ . Jest więc 9 punktów, w których mogą być ekstrema lokalne:  $(0, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ ,  $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\pm \frac{1}{2}, \pm 1)$ .

Liczymy teraz pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji  $f$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 24x^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 4.$$

Macierz Hessego funkcji  $f$  jest więc równa

$$\begin{bmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}.$$

W punkcie  $(0, 0)$  mamy macierz  $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ , więc  $f$  ma tu lokalne maksimum (równe 0).

W punktach  $(0, \pm 1)$  mamy macierz  $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ , więc są to punkty siodłowe i  $f$  nie ma tam lokalnego ekstremum.

W punktach  $(\pm \frac{1}{2}, 0)$  mamy macierz  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ , więc są to punkty siodłowe i  $f$  nie ma tam lokalnego ekstremum.

W punktach  $(\pm \frac{1}{2}, \pm 1)$  mamy macierz  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ , więc  $f$  ma tam lokalne minima (wszystkie równe  $-\frac{9}{8}$ ).

**Uwaga.** Mamy  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  dla  $g(x) = 2x^4 - x^2$ ,  $h(y) = y^4 - 2y^2$ . Funkcje  $g$ ,  $h$  są ciągłe na  $\mathbb{R}$  i  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} h(y) = +\infty$ . Wynika stąd, że funkcja  $f$  jest ograniczona z dołu i jej cztery lokalne minima są minimami globalnymi. Z drugiej strony,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, 0) = +\infty$ , więc funkcja  $f$  nie jest ograniczona z góry i nie ma maksimum globalnego.

**Przykład.** Znaleźć ekstrema lokalne funkcji  $f(x, y) = 3x^8 + 8x^3y^3 + 3y^8$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 24x^7 + 24x^2y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 24x^3y^2 + 24y^7.$$

Rozwiązujemy równanie wektorowe  $\text{grad } f(x, y) = 0$ , czyli układ równań

$$\begin{cases} 24x^7 + 24x^2y^3 = 0 \\ 24x^3y^2 + 24y^7 = 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że jeśli  $x = 0$ , to  $y = 0$  i punkt  $(0, 0)$  jest rozwiązaniem układu. Załóżmy teraz  $x \neq 0$  (wtedy również  $y \neq 0$ ). Dzieląc równania odpowiednio przez  $x^2$  i  $y^2$ , otrzymujemy

$$\begin{cases} x^5 = -y^3 \\ y^5 = -x^3, \end{cases}$$

co daje  $(\frac{x}{y})^5 = (\frac{y}{x})^3$ , więc  $(\frac{x}{y})^8 = 1$ , czyli

$$x = \pm y.$$

Jeśli  $x = y$ , to  $x^5 = -x^3$ , więc  $x^2 = -1$ , co nie ma rozwiązań (rzeczywistych). Jeśli  $x = -y$ , to  $x^5 = x^3$ , więc  $x^2 = 1$ , co daje  $x = \pm 1$ . Podsumowując, mamy trzy rozwiązania:  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ . Obliczamy teraz pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji  $f$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 24(7x^6 + 2xy^3), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 24 \cdot 3x^2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 24(2x^3y + 7y^6).$$

Macierz Hessego funkcji  $f$  jest zatem równa

$$\begin{bmatrix} 24(7x^6 + 2xy^3) & 24 \cdot 3x^2y^2 \\ 24 \cdot 3x^2y^2 & 24(2x^3y + 7y^6) \end{bmatrix}.$$

W punktach  $(1, -1)$  i  $(-1, 1)$  ta macierz ma postać  $\begin{bmatrix} 24 \cdot 5 & 24 \cdot 3 \\ 24 \cdot 3 & 24 \cdot 5 \end{bmatrix}$ . Forma kwadratowa o tej macierzy jest dodatnio określona, więc w tych punktach funkcja  $f$  ma lokalne minima (oba równe  $-2$ ).

W punkcie  $(0, 0)$  macierz Hessego ma postać  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , więc nasze kryteria istnienia lub nieistnienia ekstremum lokalnego nie działają (są spełnione warunki konieczne, a nie są spełnione warunki dostateczne). W tej sytuacji trzeba bezpośrednio zbadać zachowanie funkcji  $f$  w otoczeniu punktu  $(0, 0)$ .

Mamy  $f(0, 0) = 0$  i  $f(x, 0) = 3x^8$ , co jest większe od 0 dla  $x \neq 0$ . Zatem, funkcja  $f$  przyjmuje pewne wartości dodatnie w każdym otoczeniu punktu  $(0, 0)$ , więc nie ma w tym punkcie maksimum lokalnego. Z drugiej strony, mamy

$$f(x, -x) = 6x^8 - 8x^6 = x^6(6x^2 - 8),$$

co jest mniejsze do 0 dla  $x \neq 0$ ,  $|x| < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Zatem, funkcja  $f$  przyjmuje pewne wartości ujemne w każdym otoczeniu punktu  $(0, 0)$ , więc nie ma w tym punkcie minimum lokalnego. Zatem,  $f$  nie ma ekstremum lokalnego w punkcie  $(0, 0)$ .

**Uwaga.** Mamy  $|x^3y^3| \leq \frac{x^6+y^6}{2}$ , więc  $f(x, y) \geq 3x^8 - 4x^6 + 3y^8 - 4y^6$ . Korzystając z tego, w ten sam sposób co w poprzednim przykładzie pokazujemy, że  $f$  jest ograniczona z dołu i dwa minima lokalne funkcji  $f$  są minimami globalnymi. Z drugiej strony, funkcja  $f$  nie jest ograniczona z góry, więc nie ma maksimum globalnego.

## Odwracalność funkcji wielu zmiennych i dyfeomorfizmy

**Definicja.** Niech  $f : A \rightarrow B$ , gdzie  $A, B$  otwarte podzbiory  $\mathbb{R}^k$ . Mówimy, że  $f$  jest *dyfeomorfizmem klasy  $C^1$* , jeśli  $f$  jest wzajemnie jednoznaczna (tzn. różnowartościowa i „na”) oraz funkcje  $f$ ,  $f^{-1}$  są klasy  $C^1$ .

**Uwaga.** W takiej sytuacji różniczka  $Df(x)$  jest liniowym automorfizmem  $\mathbb{R}^k$  i  $D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}$  dla każdego  $x \in A$ .

*Dowód* ( $\text{Id}$  oznacza przekształcenie identycznościowe). Z twierdzenia o różniczce złożenia funkcji,

$$D(f^{-1})(f(x)) \circ Df(x) = D(f^{-1} \circ f)(x) = D(\text{Id}_A)(x) = \text{Id}_{\mathbb{R}^k}.$$

Podobnie,  $Df(x) \circ D(f^{-1})(f(x)) = \text{Id}_{\mathbb{R}^k}$ . Zatem,  $D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}$ .  $\square$

### Twierdzenie o lokalnej odwracalności funkcji

Niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ , gdzie  $A$  otwarty w  $\mathbb{R}^k$  będzie funkcją klasy  $C^1$  i niech  $x \in A$ . Załóżmy, że  $Df(x)$  jest liniowym automorfizmem  $\mathbb{R}^k$ . Wtedy istnieje otoczenie  $U \subset A$  punktu  $x$ , takie że

- $f$  jest różnowartościowa na  $U$ ,
- $V = f(U)$  jest otwarty w  $\mathbb{R}^k$ ,
- $f|_U$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^1$  z  $U$  na  $V$ .

### Uwagi

- $Df(x)$  liniowy automorfizm  $\mathbb{R}^k \iff$  macierz Jacobiego  $MJf(x)$  jest odwracalna (ma rząd  $k$ )  $\iff$  jacobian  $Jf(x)$  jest niezerowy.
- Twierdzenie nie implikuje, że  $f$  jest różnowartościowa w całej dziedzinie.

**Przykład.** Funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$  jest lokalnie odwracalna w otoczeniu każdego punktu  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , ale nie jest globalnie odwracalna (różnowartościowa).

*Dowód.* Funkcja  $f$  jest klasy  $C^1$ . Macierz Jacobiego tej funkcji ma postać

$$MJf(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}.$$

Jacobian funkcji  $f$  jest równy  $Jf(x, y) = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} \neq 0$ .

Zatem, z twierdzenia o lokalnej odwracalności, funkcja  $f$  jest odwracalna w otoczeniu każdego punktu  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Z drugiej strony,  $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ , więc funkcja  $f$  nie jest różnowartościowa na  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Wniosek.** Niech  $f : A \rightarrow B$ , gdzie  $A, B$  otwarte podzbiory  $\mathbb{R}^k$ . Jeśli  $f$  jest wzajemnie jednoznaczna, klasy  $C^1$  i  $Df(x)$  jest liniowym automorfizmem  $\mathbb{R}^k$  dla każdego  $x \in A$ , to  $f$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^1$ .

**Definicja.** Zbiory otwarte  $A, B \subset \mathbb{R}^k$  nazywamy *dyfeomorficznymi* lub  $C^1$ -*dyfeomorficznymi*, jeśli istnieje dyfeomorfizm  $f$  klasy  $C^1$  przekształcający  $A$  na  $B$ .

**Przykład.** Wszystkie kule w  $\mathbb{R}^k$  są dyfeomorficzne.

*Dowód.* Niech  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k$  i niech  $r_1, r_2 > 0$ . Wtedy funkcja  $f(x) = \frac{r_2}{r_1}(x - x_1) + x_2$  przekształca wzajemnie jednoznacznie kulę  $B(x_1, r_1)$  na kulę  $B(x_2, r_2)$  (bo  $\|f(x) - x_2\| = \frac{r_2}{r_1}\|x - x_1\|$ ). Jest oczywiste, że funkcje  $f, f^{-1}$  są klasy  $C^1$ .  $\square$

**Przykład.** Kwadrat bez brzegu i koło bez brzegu są dyfeomorficzne.

*Dowód.* Funkcja  $f(x, y) = (x, \sqrt{1-x^2} y)$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^1$  kwadratu bez brzegu  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1\}$  na koło bez brzegu  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ .  $\square$

**Przykład.** Płaszczyzna i kwadrat bez brzegu są dyfeomorficzne.

*Dowód.* Funkcja  $f(x, y) = (\frac{2}{\pi} \arctan x, \frac{2}{\pi} \arctan y)$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^1$  płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$  na kwadrat  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1\}$ .  $\square$

**Przykład** (współrzędne biegunowe). Niech

$$f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Wtedy dla każdego  $\varphi_0 \in \mathbb{R}$  funkcja  $f$  przekształca dyfeomorficznie zbiór  $(0, +\infty) \times (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$  na  $\mathbb{R}^2 \setminus L_{\varphi_0}$ , gdzie  $L_{\varphi_0}$  jest (domkniętą) półprostą zaczynającą się w początku układu współrzędnych i tworzącą kąt  $\varphi_0$  z osią  $OX$ .

Jakobian  $f$  jest równy

$$Jf(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

**Przykład** (współrzędne sferyczne). Niech  $f : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta).$$

Wtedy  $f$  przekształca dyfeomorficznie zbiór  $(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  na  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ .

Jakobian  $f$  jest równy

$$Jf(r, \varphi) = r^2 \cos \theta.$$

**Uwaga.** Przy ustalonym  $r > 0$  kąty  $\varphi$  i  $\theta$  to odpowiednio długość i szerokość geograficzna na sferze  $S(0, r)$ .