

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład I

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Rachunek całkowy

Funkcja pierwotna — całka nieoznaczona

Funkcja pierwotna

Niech

$$f : P \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} .

Definicja. Funkcja $F : P \rightarrow \mathbb{R}$ jest *funkcją pierwotną* (całką nieoznaczoną) funkcji f , jeśli F jest różniczkowalna i $F' = f$.

Stwierdzenie. Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to funkcja $F + c$, gdzie c jest stałą rzeczywistą, też jest funkcją pierwotną funkcji f .

Odwrotnie, jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to każda inna funkcja pierwotna funkcji f jest postaci $F + c$, gdzie c jest stałą rzeczywistą.

Dowód. Jeśli $F' = f$, to $(F + c)' = F' + 0 = F'$, więc $F + c$ jest funkcją pierwotną funkcji f . Odwrotnie, jeśli F, G funkcje pierwotne funkcji f , to oznaczając $H = F - G$, mamy $H' = F' - G' = f - f = 0$. Zatem, z twierdzenia Lagrange'a, dla każdego $x, y \in P$ istnieje $z \in P$, takie że $H(x) - H(y) = H'(z)(x - y) = 0 \cdot (x - y) = 0$, więc H jest funkcją stałą. Oznacza to, że G jest postaci $F + c$, gdzie c jest stałą rzeczywistą. \square

Oznaczenie

Oznaczamy przez $\int f(x) dx$ zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f , tzn.

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

gdzie c jest dowolną stałą rzeczywistą (czasami literę c będziemy opuszczać).

Uogólnienie

Jeśli funkcja f jest określona na sumie rozłącznych przedziałów otwartych, to funkcję pierwotną określamy oddzielnie na każdym przedziale. Wtedy poprzednie stwierdzenie nie za-

chodzi, np. dla $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ mamy $F(x) = \begin{cases} x + c_1 & \text{dla } x > 0 \\ -x + c_2 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ dla dowolnych stałych $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Przykład.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

dla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (na odpowiednim przedziale określoności funkcji). W szczególności,

$$\int dx = x + c.$$

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ nie ma funkcji pierwotnej.

Dowód. Załóżmy, że $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji f . Wtedy

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1 & \text{dla } x > 0 \\ -x + c_2 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

dla pewnych $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Funkcja F jest ciągła (bo jest różniczkowalna), więc $c_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = c_2$. Stąd, $F(x) = |x| + c_1$ dla $x \in \mathbb{R}$, więc F nie jest różniczkowalna w 0 — sprzeczność. \square

Twierdzenie. Jeśli $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} , to f ma funkcję pierwotną.

Przykład. Funkcja pierwotna funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ nie jest funkcją elementarną.

Twierdzenie. Jeśli $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe, gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} , to:

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx, \\ \int a f(x) dx &= a \int f(x) dx \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Całki pewnych funkcji elementarnych

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	dla $\alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	dla $x > 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	dla $a > 0, a \neq 1$
$\int e^x dx = e^x + c$	
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	
$\int \cos x dx = \sin x + c$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$	
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$	

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Jeśli funkcje $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} , są klasy C^1 , to

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Dowód. Wynika ze wzoru $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. □

Przykład. Obliczyć całkę $\int x \cos x dx$.

Niech $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$. Wtedy $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$, więc

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Niech $g : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P przedział otwarty w \mathbb{R} , będzie funkcją klasy C^1 i niech f będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale otwartym zawierającym $g(P)$. Oznaczmy przez F funkcję pierwotną funkcji f . Wtedy

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

Dowód. Wynika ze wzoru $(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$. □

Uwaga. Jeśli przyjmiemy oznaczenie $y = g(x)$, to powyższe twierdzenie możemy zapisać w postaci

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(y) dy.$$

Jeśli zapiszemy $g'(x) = \frac{dg}{dx}(x) = \frac{dy}{dx}$, to ta równość ma postać

$$\int f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(y) dy.$$

Możemy tu posługiwać się (formalnymi) napisami postaci $dy = g'(x)dx$ (mają one ścisłe uzasadnienie matematyczne, o którym nie będziemy tu mówić).

Przykład. Obliczyć całkę $\int \operatorname{tg} x dx$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Piszemy

$$y = \cos x \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x \quad dy = -\sin x dx.$$

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie, otrzymujemy

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dy}{y} = -\ln y + c = -\ln \cos x + c.$$

Uwaga. Znalezienie dobrego podstawienia jest w wielu przypadkach trudne i może wymagać dużej pomysłowości.

Przykład. Obliczyć całkę $\int \sqrt{1-x^2} dx$ dla $x \in (-1, 1)$.

Niech $x = \sin y$ dla $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Mamy

$$\frac{dx}{dy} = \cos y, \quad dx = \cos y dy.$$

Zauważmy, że $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{\cos^2 y} = \cos y$ (bo $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). Zatem, całkując przez części, otrzymujemy

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 y dy.$$

Ponieważ $\cos^2 y = \frac{1+\cos(2y)}{2}$, mamy

$$\int \cos^2 y dy = \frac{1}{2} \int dy + \frac{1}{2} \int \cos(2y) dy.$$

Wiemy, że $\frac{1}{2} \int dy = \frac{y}{2} + c$. Aby obliczyć $\frac{1}{2} \int \cos(2y) dy$, stosujemy podstawienie $2y = t$. Wtedy $2dy = dt$, więc

$$\frac{1}{2} \int \cos(2y) dy = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + c.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{y}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{y}{2} + \frac{1}{4} \sin(2y) + c \\ &= \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \sin y \cos y + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

Przykład. Obliczyć całkę $\int x^2 e^x dx$.

Niech $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$. Wtedy $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 2x$, więc całkując przez części, otrzymujemy

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Biorąc teraz $f(x) = e^x$, $g(x) = x$ i powtórnie całkując przez części, mamy

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c.$$

Ostatecznie,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c = (x^2 - 2x + 2) e^x + c.$$

Uwaga. Podobnie można obliczyć $\int x^n e^x dx$ dla $n \in \mathbb{N}$, co pozwala wyprowadzić wzór na

$$\int W(x) e^x dx,$$

gdzie W jest dowolnym wielomianem.

Przykład. Obliczyć całkę $\int e^x \sin x dx$.

Niech $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$. Wtedy $f'(x) = e^x$, $g'(x) = \cos x$, więc całkując przez części, otrzymujemy

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Biorąc $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$, mamy $f'(x) = e^x$, $g'(x) = -\sin x$. Całkując powtórnie przez części, mamy

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

Otrzymaliśmy równanie

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

Wiedząc, że $\int e^x \sin x dx$ istnieje (bo funkcja $e^x \sin x$ jest ciągła), mamy stąd

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x,$$

więc

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c.$$