

# Analiza Matematyczna II

## Wydział Nauk Ekonomicznych

### wykład XIII

Uniwersytet Warszawski  
semestr letni

## Rachunek całkowy

### Całka oznaczona

#### Całka Riemanna

**Definicja.** Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dla  $a < b$ . Podziałem odcinka  $[a, b]$  o średnicy  $\delta > 0$  nazywamy skończony ciąg punktów  $x_0, \dots, x_k \in [a, b]$ , taki że

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$$

oraz  $\max_{j=1, \dots, k} \{x_j - x_{j-1}\} = \delta$ .

**Twierdzenie** (istnienie całki Riemanna). *Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła (lub ma skończenie wiele punktów nieciągłości), to istnieje liczba  $S \in \mathbb{R}$ , taka że dla każdego ciągu podziałów*

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{k_n-1}^{(n)} < x_{k_n}^{(n)} = b$$

*o średnicy  $\delta_n$ , takiego że  $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  i dla każdego  $t_j^{(n)} \in [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}]$ ,  $j = 1, \dots, k_n$ , zachodzi*

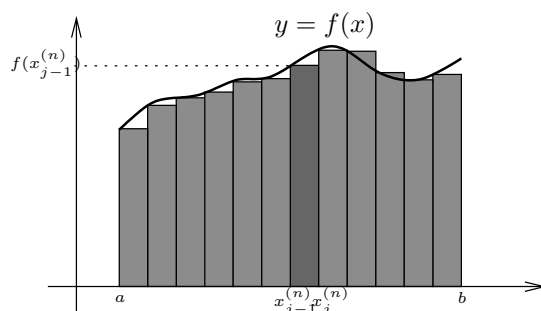
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(t_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) = S.$$

*Liczbę  $S$  nazywamy całką Riemanna funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$ .*

**Uwaga.** Całka Riemanna istnieje dla znacznie szerszej klasy funkcji.

## Geometryczna interpretacja całki Riemanna

Całka Riemanna z funkcji nieujemnej  $f$  jest granicą sumy pól prostokątów o podstawach wyznaczonych przez  $n$ -ty podział odcinka  $[a, b]$  i wysokościach takich, że górna krawędź każdego prostokąta przecina wykres funkcji  $f$ .



**Wniosek.** Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ciągła i  $f \geq 0$ , to

$$\int_a^b f(x) dx = \text{pole obszaru } \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}.$$

**Twierdzenie.** Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to całka Riemanna jest równa całce Newtona, czyli całce

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b,$$

gdzie  $F$  jest funkcją pierwotną funkcji  $f$ .

**Wniosek.** Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{n(b-a)}{n}\right)}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

W szczególności, jeśli  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f(x) dx.$$

**Przykład.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

*Rozwiązanie.* Mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} &= \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \cdots + \frac{n}{n+n}}{n} \\ &= \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}}{n} = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n} \end{aligned}$$

dla  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . Zatem, szukana granica jest równa  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$ .  $\square$

**Wniosek** (wzór na pole obszarów normalnych). *Jeśli*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [f(x), g(x)]\}$$

*dla pewnych funkcji ciągłych  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , takich że  $f \leq g$ , to*

$$\text{pole } A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx.$$

**Uwaga.** Przy pomocy tego wzoru możemy obliczać pola figur będących skończonymi sumami zbiorów, które są obrazami obszarów normalnych pod działaniem pewnych izometrii (np. obrotów czy symetrii).

**Przykład.** Obliczyć pole koła o promieniu  $r$ .

Koło  $K$  o środku w punkcie  $(0, 0)$  i promieniu  $r$  ma postać

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-r, r], y \in [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]\}.$$

Zatem,

$$\begin{aligned} \text{pole } K &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 2r \int_{-r}^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \, dx \\ &\stackrel{t=\frac{x}{r}}{=} 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} \, dt = 2r^2 \left[ \frac{1}{2} \arcsin t + \frac{1}{2} t \sqrt{1 - t^2} \right]_{-1}^1 \\ &= 2r^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \pi r^2. \end{aligned}$$

**Definicja.** Krzywa w  $\mathbb{R}^k$  to przekształcenie ciągłe  $\gamma : P \rightarrow \mathbb{R}^k$ , gdzie  $P$  przedział w  $\mathbb{R}$ . Krzywą nazywamy też zbiór punktów  $\gamma(P)$ .

**Uwaga.** Ta definicja jest bardzo szeroka, np. kwadrat jest krzywą według tej definicji (tzw. krzywa Peano). Zwykle zakłada się pewne dodatkowe warunki. W naszym przypadku zakładamy zwykle, że funkcja  $\gamma$  jest różnowartościowa i klasy  $C^1$ .

**Uwaga.** Długość krzywej można zdefiniować jako górny kres długości łamanych wpisanych w tę krzywą.

**Twierdzenie** (wzór na długość krzywej). *Niech  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ , będzie krzywą różnowartościową klasy  $C^1$ . Wtedy*

$$\text{długość } \gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2} \, dt,$$

*gdzie  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ . Analogicznie, jeśli  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  jest krzywą różnowartościową klasy  $C^1$ , to*

$$\text{długość } \gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2 + (\gamma'_3(t))^2} \, dt,$$

*gdzie  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ .*

**Uwaga (i uogólnienie na przypadek krzywych w  $\mathbb{R}^k$ )**

Ten wzór (w obu przypadkach) można zapisać jako

$$\text{długość } \gamma = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

**Wniosek.** *Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^1$ , to*

$$\text{długość wykresu funkcji } f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Przykład.** Obliczyć długość krzywej (tzw. linii śrubowej)  $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ .

Przekształcenie  $\gamma$  jest różnowartościowe i klasy  $C^1$ . Mamy

$$\gamma'_1(t) = -\sin t, \quad \gamma'_2(t) = \cos t, \quad \gamma'_3(t) = 1.$$

Zatem,

$$\text{długość } \gamma = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{2} dt = 4\sqrt{2}\pi.$$

**Twierdzenie** (wzór na objętość bryły obrotowej). *Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą, taką że  $f \geq 0$ . Niech  $V \subset \mathbb{R}^3$  bryła obrotowa powstała przez obrót obszaru domkniętego  $\{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$  wokół osi  $OX$ . Wtedy*

$$\text{objętość } V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

**Twierdzenie** (wzór na pole powierzchni obrotowej). *Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją klasy  $C^1$ , taką że  $f \geq 0$ . Niech  $S \subset \mathbb{R}^3$  powierzchnia obrotowa powstała przez obrót wykresu funkcji  $f$  wokół osi  $OX$ . Wtedy*

$$\text{pole } S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Przykład.** Obliczyć objętość kuli w  $\mathbb{R}^3$  o promieniu  $r$ .

Dla kuli (domkniętej)  $B \subset \mathbb{R}^3$  o środku w punkcie  $(0, 0, 0)$  i promieniu  $r$  mamy

$$B = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq r\}.$$

Zatem,  $B$  powstaje przez obrót półkuli  $K^+ = \{(x, y) : x \in [-r, r], y \in [0, \sqrt{r^2 - x^2}]\}$  wokół osi  $OX$ . Objętość  $B$  jest więc równa

$$\pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

**Przykład.** Obliczyć pole powierzchni sfery w  $\mathbb{R}^3$  o promieniu  $r$ .

Sfera  $S \subset \mathbb{R}^3$  o środku w punkcie  $(0, 0, 0)$  i promieniu  $r$  ma równanie

$$S = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r\}.$$

Zatem,  $S$  powstaje przez obrót wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in [-r, r]$  wokół osi  $OX$ . Mamy  $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ . Pole powierzchni  $S$  jest zatem równe

$$2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r r dx = 4\pi r^2.$$

**Przykład.** Obliczyć objętość stożka obrotowego w  $\mathbb{R}^3$  o promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$ .

Taki stożek możemy przedstawić jako bryłę  $V \subset \mathbb{R}^3$  opisaną przez

$$V = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{y^2 + z^2} \leq \frac{r}{h}x, x \in [0, h] \right\}.$$

Zatem,  $V$  powstaje przez obrót trójkąta  $\{(x, y) : x \in [0, h], y \in [0, \frac{r}{h}x]\}$  wokół osi  $OX$ . Objętość  $V$  jest więc równa

$$\pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

co jest równe jednej trzeciej objętości walca obrotowego o tym samym promieniu podstawy i wysokości.

**Przykład.** Obliczyć pole powierzchni bocznej stożka obrotowego w  $\mathbb{R}^3$  o promieniu  $r$  i wysokości  $h$ .

Powierzchnia boczna takiego stożka ma równanie

$$S = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{r}{h}x, x \in [0, h] \right\}.$$

Zatem,  $S$  powstaje przez obrót wykresu funkcji  $f(x) = \frac{r}{h}x$ ,  $x \in [0, h]$  wokół osi  $OX$ . Mamy  $f'(x) = \frac{r}{h}$ . Pole powierzchni  $S$  jest zatem równe

$$2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dx = 2\pi \frac{r\sqrt{h^2 + r^2}}{h^2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^h = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \pi r l,$$

gdzie  $l$  jest długością tworzącej stożka.