

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład XIV

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Rachunek całkowy

Całka z funkcji wielu zmiennych

Całka podwójna na prostokącie

Definicja (twierdzenie Fubiniego). Niech $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P = [a, b] \times [c, d]$ prostokąt w \mathbb{R}^2 , będzie funkcją ciągłą. Wtedy całkę z f na P (tzw. *całkę podwójną*) definiujemy jako

$$\iint_P f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

(dwie ostatnie całki, tzw. *całki iterowane* są równe). Całka podwójna na prostokącie jest więc równa całce iterowanej, której wartość nie zależy od kolejności całkowania.

Przykład. Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x, y) = x^2 \sin y$ na prostokącie $P = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Z definicji,

$$\begin{aligned} \iint_P f(x, y) \, dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 x^2 \sin y \, dx \right) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \sin y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin y \, dy = \left[-\frac{\cos y}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Całka podwójna na obszarze normalnym

Definicja. Jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [h(x), g(x)]\}$ dla pewnych funkcji ciągłych $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, takich że $h \leq g$, to całkę podwójną z f na A definiujemy jako

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Podobnie, jeśli $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], x \in [h(y), g(y)]\}$ dla pewnych funkcji ciągłych $h, g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, takich że $h \leq g$, to całkę podwójną z f na A definiujemy jako

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Uwaga. Tutaj nie możemy zmieniać kolejności całkowania po dx i dy .

Definicja. Jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą, gdzie $A \subset \mathbb{R}^2$ jest sumą skończonej liczby obszarów domkniętych A_1, \dots, A_n o rozłącznych wnętrzach, postaci takiej jak w poprzedniej definicji, to całkę podwójną z f na A definiujemy jako

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f(x, y) \, dx dy.$$

Uwaga. Podobnie jak całkę podwójną, można zdefiniować *całkę potrójną* z funkcji ciągłej określonej na odpowiednim obszarze domkniętym w \mathbb{R}^3 (np. prostopadłościanie), a także całki w \mathbb{R}^k dla $k > 3$.

Uwaga. Całkę podwójną i potrójną można też zdefiniować jako całkę Riemanna, np. całkę z funkcji ciągłej f na prostokącie $P = [a, b] \times [c, d]$ definiuje się jako granicę (przy $n \rightarrow \infty$) sum $\sum_{i,j} f(x_{i,j}^{(n)}, y_{i,j}^{(n)}) \cdot \text{pole } P_{i,j}^{(n)}$, gdzie $(x_{i,j}^{(n)}, y_{i,j}^{(n)}) \in P_{i,j}^{(n)}$, a $\{P_{i,j}^{(n)}\}_{n=1}^{k_n}$ są rodzinami prostokątów dzielącymi prostokąt P na coraz drobniejsze fragmenty.

Wniosek. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie domkniętym obszarem normalnym lub sumą skończonej liczby takich obszarów o rozłącznych wnętrzach i niech $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi, takimi że $f_1 \leq f_2$. Wtedy

$$\text{objętość}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z \in [f_1(x, y), f_2(x, y)]\} = \iint_A (f_2(x, y) - f_1(x, y)) \, dx dy.$$

Całka podwójna jako pole

Twierdzenie. Jeśli $A \subset \mathbb{R}^2$ jest domkniętym obszarem normalnym, tzn.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [h(x), g(x)]\}$$

dla pewnych funkcji ciągłych $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, takich że $h \leq g$, to

$$\text{pole } A = \iint_A dx dy.$$

To samo zachodzi, gdy A jest sumą skończonej liczby domkniętych obszarów normalnych o rozłącznych wnętrzach.

Dowód.

$$\iint_A dx dy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} dy \right) dx = \int_a^b (g(x) - h(x)) dx = \text{pole } A.$$

□

Twierdzenie o zamianie zmiennych w całce wielowymiarowej

Twierdzenie. Niech $\varphi : A \xrightarrow{\text{na}} B$ dyfeomorfizm klasy C^1 , gdzie A, B otwarte w \mathbb{R}^2 . Niech $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, gdzie C zwarty podzbiór B . Wtedy

$$\iint_C f(x, y) dx dy = \iint_{\varphi^{-1}(C)} f(\varphi(u, v)) |J\varphi(u, v)| du dv$$

(gdzie $J\varphi$ oznacza jacobian φ). Analogicznie twierdzenie zachodzi dla całki potrójnej.

Wniosek (Biegunowa zamiana zmiennych w całce podwójnej).

$$\iint_{\overline{B}(0, R)} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta.$$

Całka Eulera–Poissona

Przykład. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Obliczmy najpierw całkę podwójną $\iint_{Q_n} e^{-x^2-y^2} dx dy$ na kwadracie $Q_n = [-n, n] \times [-n, n] \subset \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$. Mamy

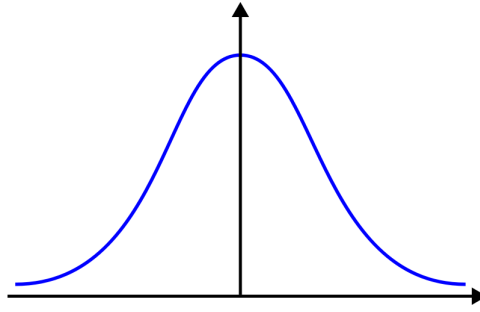
$$\begin{aligned} \iint_{Q_n} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-n}^n \left(\int_{-n}^n e^{-x^2-y^2} dx \right) dy = \int_{-n}^n e^{-y^2} \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right) dy \\ &= \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy = \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Zatem,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\iint_{Q_n} e^{-x^2-y^2} dx dy} \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_n} e^{-x^2-y^2} dx dy} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} e^{-x^2-y^2} dx dy}, \end{aligned}$$

gdzie $B_n = \overline{B}(0, n) \subset \mathbb{R}^2$.

Obliczamy teraz $\iint_{B_n} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Stosujemy zamianę zmiennych na współrzędne biegunowe $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ dla $r \in [0, n]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Funkcja φ przekształca prostokąt $[0, n] \times [0, 2\pi]$ na koło B_n i jest dyfeomorfizmem klasy C^1 na wnętrzu tego prostokąta.



Okazuje się, że w tej sytuacji możemy stosować twierdzenie o zamianie zmiennych w całce podwójnej.

Mamy $J\varphi(r, \theta) = r$, więc

$$\begin{aligned} \iint_{B_n} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{[0,n] \times [0,2\pi]} e^{-(r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2} r dr d\theta \\ &= \iint_{[0,n] \times [0,2\pi]} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^n \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^n e^{-r^2} r dr = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^n = \pi(1 - e^{-n^2}). \end{aligned}$$

W takim razie,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} e^{-x^2-y^2} dx dy} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-n^2})} = \sqrt{\pi}.$$

Uwaga. Całka Eulera–Poissona odgrywa ważną rolę w rachunku prawdopodobieństwa.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, zwany *krzywą Gaussa*, opisuje tzw. rozkład normalny zmiennej losowej.

Funkcja gamma Eulera

Definicja. Funkcję

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{dla } x > 0$$

nazywamy *funkcją gamma Eulera* lub *funkcją Eulera drugiego rodzaju*.

Uwaga. Całka w powyższej definicji to całka niewłaściwa, która istnieje dla każdego $x > 0$.

Własności funkcji Γ

Twierdzenie. Dla każdego $x > 0$ zachodzi $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Dowód. Całkując przez części, otrzymujemy:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-x t^{x-1} e^{-t}) dt = x\Gamma(x).$$

□

Twierdzenie. Γ jest funkcją dodatnią klasy C^∞ . Poza tym, $\ln \Gamma$ jest funkcją wypukłą.

Stwierdzenie.

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Dowód (indukcyjny). Mamy

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{+\infty} = 1$$

oraz $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

□

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Stwierdzenie.

Dowód.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

□

Twierdzenie (Wzór Eulera–Gaussa).

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Uwaga. Funkcja Γ ma zastosowanie w wielu gałęziach matematyki, a także w statystyce (tzw. rozkład gamma).