

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład V

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Funkcje wielu zmiennych

Granica i ciągłość w \mathbb{R}^k

Twierdzenie. *Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbieżnego ciągu punktów z A jego granica należy do A .*

Dowód. Załóżmy, że zbiór A jest domknięty. Niech ciąg punktów $x_n \in A$ będzie zbieżny do $y \in \mathbb{R}^k$. Gdyby $y \notin A$, to z otwartości $\mathbb{R}^k \setminus A$ istniałoby $\varepsilon > 0$, takie że $B(y, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Ale z definicji granicy ciągu, $\|x_n - y\| < \varepsilon$ dla prawie wszystkich n , więc $x_n \in B(y, \varepsilon) \cap A$, co daje sprzeczność. Zatem, $y \in A$.

Założmy teraz, że każdy zbieżny ciąg punktów z A ma granicę w A . Gdyby A nie był domknięty, to $\mathbb{R}^k \setminus A$ nie byłby otwarty, więc istniałby punkt $y \in \mathbb{R}^k \setminus A$, taki że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ kula $B(y, 1/n)$ przecinałaby A . Wybierając punkt $x_n \in A \cap B(y, 1/n)$, mielibyśmy $\|x_n - y\| < 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. To daje $x_n \in A$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, a więc sprzeczność z założeniem. Zatem, A jest domknięty. \square

Wniosek. *Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.*

Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa

Z każdego ciągu ograniczonego w \mathbb{R}^k można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu w \mathbb{R}^k .

Twierdzenie. *Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu punktów z A można wybrać podciąg zbieżny do punktu z A .*

Dowód. Wynika z dwóch poprzednich twierdzeń. □

Twierdzenie. Niech $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^k$ punkt skupienia A . Jeśli istnieją skończone granice $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, to:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow a} (tf(x)) = t \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}$.

Ponadto, jeśli $m = 1$, to

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{o ile } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

Uwaga. Twierdzenie o trzech funkcjach przenosi się na przypadek funkcji skalarnych określonych na podzbiorach \mathbb{R}^k .

Przykład.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Dowód.

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |y|,$$

więc w definicji ε - δ wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$. □

Przykład.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ nie istnieje.}$$

Dowód. Niech $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n})$. Wtedy $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ i

$$f(x_n, y_n) = \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Niech teraz $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Wtedy $(x'_n, y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, $(x'_n, y'_n) \neq (0, 0)$ i

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Zatem, z definicji Heinego, granica f w $(0, 0)$ nie istnieje. □

Ciągłość funkcji w \mathbb{R}^k

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ i niech $a \in A$ punkt skupienia A . Mówimy, że f jest ciągła w punkcie a , jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje i jest równa $f(a)$.

W przypadku, gdy a jest punktem izolowanym zbioru A , przyjmujemy zawsze, że f jest ciągła w a .

Funkcja f jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $a \in A$.

Definicja otoczeniowa ciągłości funkcji w \mathbb{R}^k

Funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ i $a \in A$ punkt skupienia A jest ciągła w punkcie a , jeśli dla każdego otoczenia $U \subset \mathbb{R}^m$ punktu $f(a)$ istnieje otoczenie $V \subset \mathbb{R}^k$ punktu a , takie że jeśli $x \in A \cap V$, to $f(x) \in U$.

Definicja Cauchy'ego (ε - δ) ciągłości funkcji w \mathbb{R}^k

Funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ i $a \in A$ punkt skupienia A jest ciągła w punkcie a , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \ \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Uwaga. Definicja Heinego (ciągowa) ciągłości funkcji w \mathbb{R}^k jest taka jak dla funkcji jednej zmiennej.

Uwaga. Wszystkie te definicje są równoważne.

Zbiory spójne

Definicja. Drogą łączącą punkty $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k$ nazwiemy dowolną funkcję ciągłą $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ taką, że $f(0) = x_1$, $f(1) = x_2$.

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest *spójny*, jeśli istnieje droga łącząca każde dwa punkty $x, y \in A$. Ponadto zbiór otwarty i spójny nazywamy *obszarem*.

Uwaga. Ogólnie, mówimy że dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest spójny, jeśli nie można go podzielić na niepuste rozłączne podzbiory X, Y , takie że $X = A \cap U$, $Y = A \cap V$, gdzie U, V otwarte w \mathbb{R}^k .

Własności funkcji ciągłych w \mathbb{R}^k

Twierdzenie. Suma, różnica i złożenie funkcji ciągłych są ciągłe (w swoich dziedzinach). Tak samo jest dla iloczynu i ilorazu funkcji ciągłych skalarnych.

Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ zwarty, to f osiąga maksimum i minimum.

Twierdzenie. Jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ciągła, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ zwarty, to $f(A)$ zwarty.

Twierdzenie. *Jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ciągła, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ spójny, to $f(A)$ spójny.*

Wniosek. *Jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ spójny, to dla każdego $x, y \in A$, jeśli c leży pomiędzy $f(x)$ i $f(y)$, to istnieje $z \in A$, takie że $f(z) = c$.*

Innymi słowy, ciągłe funkcje skalarne określone na spójnych podzbiorach \mathbb{R}^k mają własność Darboux.

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$, jeśli dla każdego $x, y \in A$ zachodzi

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Stwierdzenie. *Jeśli funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ spełnia warunek Lipschitza, to jest ciągła.*

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

Dowód.

$$\|f(x) - f(y)\| = \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

z warunku trójkąta w definicji normy. □

Funkcje wypukłe wielu zmiennych

Definicja. Niech $A \subset \mathbb{R}^k$ zbiór wypukły. Funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, jeśli dla każdych $x, y \in A$ i $t \in [0, 1]$ zachodzi

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Ścisłą wypukłość, wklęsłość i ścisłą wklęsłość definiujemy tak, jak dla funkcji jednej zmiennej.

Uwaga. Nierówność Jensena zachodzi również w przypadku funkcji wypukłych wielu zmiennych.