

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład IV

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Funkcje wielu zmiennych

Struktura wielowymiarowej przestrzeni euklidesowej

Zbiory otwarte i domknięte

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest:

- *otwarty*, jeśli dla każdego punktu $x \in A$ istnieje $r > 0$, takie że $B(x, r) \subset A$,
- *otoczeniem* punktu $x \in \mathbb{R}^k$, jeśli A otwarty i $x \in A$,
- *domknięty*, jeśli $\mathbb{R}^k \setminus A$ otwarty,
- *ograniczony*, jeśli jest zawarty w pewnej kuli, tzn. istnieje $x \in \mathbb{R}^k$ i $r > 0$, takie że $A \subset B(x, r)$,
- *zwarty*, jeśli A domknięty i ograniczony.

Przykład. Przedział otwarty (a, b) jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} , a przedział domknięty $[a, b]$ jest zbiorem domkniętym (i zwartym) w \mathbb{R} . Przedział $[a, b)$ nie jest ani zbiorem otwartym, ani domkniętym w \mathbb{R} .

Przykład. Kula w \mathbb{R}^k jest zbiorem otwartym i ograniczonym, a kula domknięta i sfera są zbiorami zwartymi. Punkt w \mathbb{R}^k (zbiór jednopunktowy) jest zbiorem zwartym. Cała przestrzeń \mathbb{R}^k jest zbiorem otwartym, domkniętym i nieograniczonym.

Przykład. Zbiór $\{(x, 0) : x \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ jest zwarty, a zbiór $\{(x, 0) : x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ nie jest otwarty ani domknięty.

Twierdzenie.

- Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.
- Przecięcie (część wspólna) skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.
- Przecięcie dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.
- Suma skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Definicja.

- Wnętrze zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$ (ozn. $\text{int } A$) to zbiór

$$\{x \in A : \text{istnieje otoczenie punktu } x \text{ zawarte w } A\}$$

.

- Brzeg zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$ (ozn. ∂A) to zbiór

$$\{x \in \mathbb{R}^k : \text{każde otoczenie punktu } x \text{ przecina zarówno } A, \text{ jak i } \mathbb{R}^k \setminus A\}$$

.

- Domknięcie zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$ (ozn. \overline{A}) to suma wnętrza A i brzegu A .

Uwagi

- $\text{int } A \subset A \subset \overline{A}$.
- $\text{int } A$ jest zbiorem otwartym (sumą wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A), a \overline{A} jest zbiorem domkniętym (przecięciem wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A). Poza tym, ∂A jest zbiorem domkniętym.

Stwierdzenie. A jest otwarty $\iff \text{int } A = A$.

A jest domknięty $\iff \overline{A} = A$.

Przykłady

- Wnętrzem dowolnego przedziału o końcach $a, b \in \mathbb{R}$ jest przedział otwarty (a, b) , brzegiem zbiór dwupunktowy $\{a, b\}$, a domknięciem przedział domknięty $[a, b]$.
- Brzegiem kuli $B(x, r)$ w \mathbb{R}^k jest sfera $S(x, r)$, a jej domknięciem — kula domknięta $\overline{B}(x, r)$.
- Brzegiem kuli domkniętej $\overline{B}(x, r)$ w \mathbb{R}^k jest sfera $S(x, r)$, a jej wnętrzem — kula $B(x, r)$.
- Domknięciem oraz brzegiem zbioru $\{(x, 0) : x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiór $\{(x, 0) : x \in [0, 1]\}$, a wnętrzem — zbiór pusty.

Zbiory wypukłe

Definicja. *Odcinek* (domknięty) o końcach $x, y \in \mathbb{R}^k$ (ozn. $[x, y]$) to zbiór $\{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$.

Uwaga. Przy tym oznaczeniu mamy $[x, y] = [y, x]$.

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest *wypukły*, jeśli dla każdego punktu $x, y \in A$ odcinek $[x, y]$ jest zawarty w A .

Przykład. Kula w \mathbb{R}^k (w dowolnej normie) jest zbiorem wypukłym.

Dowód. Jeśli $y, z \in B(x, r)$ i $t \in [0, 1]$, to

$$\begin{aligned}\|ty + (1-t)z - x\| &= \|t(y-x) + (1-t)(z-x)\| \\ &\leq t\|y-x\| + (1-t)\|z-x\| < tr + (1-t)r = r,\end{aligned}$$

więc $ty + (1-t)z \in B(x, r)$. □

Przykład. Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b), y \geq f(x)\}$ jest zbiorem wypukłym.

Zbiory spójne

Definicja. *Łamana* w \mathbb{R}^k to suma skończonej liczby odcinków $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{m-1}, x_m]$ dla pewnych $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^k$.

Definicja. Zbiór otwarty $A \subset \mathbb{R}^k$ jest *spójny*, jeśli każde dwa punkty $x, y \in A$ można połączyć łamaną zawartą w A . Zbiór otwarty i spójny nazywamy *obszarem*.

Uwaga. Ogólnie, mówimy że dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest spójny, jeśli nie można go podzielić na niepuste rozłączne podzbiory X, Y , takie że $X = A \cap U, Y = A \cap V$, gdzie U, V otwarte w \mathbb{R}^k .

Granica i ciągłość w \mathbb{R}^k

Granica ciągu w \mathbb{R}^k

Definicja. Mówimy, że ciąg punktów $x_n \in \mathbb{R}^k$ ma granicę $y \in \mathbb{R}^k$, jeśli $\|x_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Piszemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ lub $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$.

Mamy zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_0} \|x_n - y\| < \varepsilon.$$

Twierdzenie. Jeśli $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k}) \in \mathbb{R}^k$ i $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, to

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \iff x_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_j \text{ dla } j = 1, \dots, k.$$

(Zbieżność ciągu w \mathbb{R}^k jest równoważna zbieżności po współrzędnych.)

Dowód. Wynika z twierdzenia o równoważności norm w \mathbb{R}^k (dla normy euklidesowej i normy maksimum). \square

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n}, n \sin \frac{1}{n}, e^{-n} \right) = (1, 1, 0).$$

Przykład.

Uwaga. W \mathbb{R}^k nie można zdefiniować zbieżności niewłaściwej ciągu (do $\pm\infty$) w ten sam sposób jak w \mathbb{R} . Zwykle mówi się, że ciąg x_n dąży do ∞ , jeśli $\|x_n\|$ dąży do $+\infty$.

Uwaga. Rozszerzamy pojęcie „prawie wszystkie wyrazy ciągu” na przypadek ciągów w \mathbb{R}^k . Podobnie, rozszerzamy definicję punktu skupienia i punktu izolowanego zbioru na przypadek zbiorów w \mathbb{R}^k .

Funkcje wektorowe i skalarne

Rozpatrujemy funkcje postaci

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ dla pewnych $k, m \in \mathbb{N}$. Jeśli $m > 1$, to taką funkcję nazywamy funkcją *wektorową*. Piszemy wtedy

$$f = (f_1, \dots, f_m),$$

gdzie $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ i $f_j(x)$ jest j -tą współrzędną punktu $f(x)$.

Jeśli $m = 1$, to funkcję f nazywamy funkcją *skalarną* lub *rzeczywistą*.

Każda funkcja wektorowa $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ może być zatem traktowana jak uporządkowany ciąg m funkcji skalnych f_1, \dots, f_m .

Granica i ciągłość funkcji w \mathbb{R}^k

Definicja Heinego (ciągowa) granicy funkcji w \mathbb{R}^k

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ i niech $a \in \mathbb{R}^k$ będzie punktem skupienia zbioru A . Mówimy, że f ma granicę $b \in \mathbb{R}^m$ w punkcie a , jeśli dla każdego ciągu punktów $x_n \in A$ zbieżnego do a i takiego że $x_n \neq a$, ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do b . Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$.

Definicja otoczeniowa granicy funkcji w \mathbb{R}^k

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ i niech $a \in \mathbb{R}^k$ będzie punktem skupienia zbioru A . Wtedy f ma granicę $b \in \mathbb{R}^m$ w punkcie a , jeśli dla każdego otoczenia $U \subset \mathbb{R}^m$ punktu b istnieje otoczenie $V \subset \mathbb{R}^k$ punktu a , takie że jeśli $x \in A \cap V$ i $x \neq a$, to $f(x) \in U$.

Definicja Cauchy’ego (ε - δ) granicy funkcji w \mathbb{R}^k

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ dla $A \subset \mathbb{R}^k$ i niech $a \in \mathbb{R}^k$ będzie punktem skupienia zbioru A . Wtedy f ma granicę $b \in \mathbb{R}^m$ w punkcie a , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \ 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

Uwaga. Dwie normy występujące w powyższej definicji to normy w różnych przestrzeniach (pierwsza w \mathbb{R}^k , druga w \mathbb{R}^m).

Uwaga. Warunek w powyższej definicji jest równoważny temu, że

$$\begin{aligned} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in A} x \neq a, |x_i - a_i| < \delta \text{ dla } i = 1, \dots, k \\ \Rightarrow |f_j(x) - b_j| < \varepsilon \text{ dla } j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_k)$, $a = (a_1, \dots, a_k)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$.

Uwaga. Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, możemy rozpatrywać granice w przypadku, gdy pewne współrzędne x_i dążą do $\pm\infty$. Wtedy w powyższym wzorze trzeba warunek $\exists_{\delta} 0 < |x_i - a_i| < \delta$ zastąpić przez $\exists_M x_i > M$ ($x_i < -M$). Robimy tak oddzielnie dla każdej współrzędnej i , można więc rozpatrywać przypadki, gdy pewne współrzędne x_i dążą do skończonych wartości a_i , a inne do $\pm\infty$.

Analogicznie, w przypadku funkcji skalarnej ($m = 1$) można zdefiniować granice niewłaściwe ($b = \pm\infty$).