

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład III

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Rachunek całkowy

Całki niewłaściwe

Całki niewłaściwe

Definicja. Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$ będzie funkcją ciągłą i niech F funkcja pierwotna funkcji f . Załóżmy, że istnieją skończone granice jednostronne $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$. Wtedy mówimy, że istnieje *całka niewłaściwa* z f na przedziale (a, b) i piszemy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \stackrel{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b,$$

Przykład. Sprawdzić, czy istnieje całka niewłaściwa z funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Funkcja pierwotna funkcji f jest równa $F(x) = \arctg x + c$. Mamy więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctg x]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(x) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Przykład. Sprawdzić, dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje całka niewłaściwa z funkcji $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

Funkcja pierwotna funkcji f jest równa $F(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ dla $\alpha \neq 1$ i $F(x) = \ln x$ dla $\alpha = 1$.
Zatem,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{dla } \alpha \leq 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ 0 & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$$

Mamy więc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{dla } \alpha > 1 \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Twierdzenie (kryterium całkowe zbieżności szeregów). *Jeśli funkcja $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ jest malejąca, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka niewłaściwa $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.*

Przykład. Ponieważ $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ dla $\alpha > 0$ jest dodatnia i malejąca na przedziale $[1, +\infty)$ oraz (jak sprawdziliśmy),

całka niewłaściwa $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ istnieje $\iff \alpha > 1$, to

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny $\iff \alpha > 1$.

Funkcje wielu zmiennych

Struktura wielowymiarowej przestrzeni euklidesowej

Przestrzeń euklidesowa

Definicja ($k \in \mathbb{N}$). *Przestrzeń euklidesowa (kartezjańska) k -wymiarowa to zbiór*

$$\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\},$$

czyli zbiór k -elementowych ciągów liczb rzeczywistych, z odpowiednią strukturą opisaną poniżej. Liczba x_j (dla $j = 1, \dots, k$) to j -ta *współrzędna* punktu $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Uwaga. Przestrzeń euklidesowa ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej (wektorowej) wymiaru k nad ciałem liczb rzeczywistych, jeśli dla $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ i $t \in \mathbb{R}$ zdefiniujemy

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k), \quad tx = (tx_1, \dots, tx_k).$$

Norma w \mathbb{R}^k

Definicja. *Norma* (długość wektora) w \mathbb{R}^k to funkcja $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, taka że dla każdego $x, y \in \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}$,

- $\|x\| \geq 0$ oraz $\|x\| = 0 \iff x = 0 = (0, \dots, 0)$,
- $\|tx\| = |t|\|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ostatni warunek nazywa się *warunkiem trójkąta*.

Definicja. *Norma euklidesowa (standardowa)* to norma w \mathbb{R}^k zdefiniowana przez

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2},$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Uwaga. W przestrzeni \mathbb{R}^k istnieją też inne normy, np. *p-ta norma*

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

dla $p \in [1, +\infty)$ oraz *norma maksimum*

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_k|).$$

Uwaga. Elementy przestrzeni euklidesowej można traktować jak wektory lub punkty.

Definicja. Dla danej normy w \mathbb{R}^k możemy zdefiniować *metrykę* ϱ (odległość między punktami), *indukowaną* przez tę normę, kładąc

$$\varrho(x, y) = \|x - y\| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^k.$$

Definicja. *Metryka euklidesowa (standardowa)* to metryka w \mathbb{R}^k indukowana przez normę euklidesową, czyli

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_k - y_k)^2},$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$.

Iloczyn skalarny

Definicja. *Iloczyn skalarny* w \mathbb{R}^k to funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, taka że dla każdego $x, y, z \in \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}$,

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- $\langle tx, y \rangle = t\langle x, y \rangle$,

- $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$,
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Uwaga. Z warunków pierwszego, drugiego i trzeciego wynika

$$\begin{aligned}\langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \\ \langle x, ty \rangle &= t\langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

Definicja. *Euklidesowy (standardowy) iloczyn skalarny* jest zdefiniowany jako

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ky_k,$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$.

Twierdzenie. *Jeśli $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iloczyn skalarny w \mathbb{R}^k , to*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^k$$

jest normą w \mathbb{R}^k . Normę tę nazywamy normą indukowaną przez ten iloczyn skalarny.

Uwaga. Norma euklidesowa jest indukowana przez euklidesowy iloczyn skalarny.

Nierówność Schwarz

Twierdzenie. *Jeśli $\|\cdot\|$ norma w \mathbb{R}^k indukowana przez pewien iloczyn skalarny, to*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód.

Można założyć $x \neq 0$. Dla każdego $x, y \in \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle tx + y, tx + y \rangle = t^2\langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= t^2\|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

To wyrażenie przy ustalonych x, y jest funkcją kwadratową $f(t)$ zmiennej $t \in \mathbb{R}$ przyjmującą tylko wartości nieujemne. Zatem wyróżnik Δ równania kwadratowego $f(x) = 0$ jest niedodatni, czyli

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0,$$

co daje nierówność Schwarz.

□

W szczególności, dla euklidesowego iloczynu skalarnego otrzymujemy:

Twierdzenie (Klasyczna nierówność Schwarza). *Dla każdego $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\left(\sum_{j=1}^k x_j y_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^k x_j^2 \sum_{j=1}^k y_j^2.$$

Uwaga. Przy pomocy iloczynu skalarnego można zdefiniować kąty między wektorami $x, y \neq 0$:

$$\cos(\angle(x, y)) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

W szczególności, wektory x, y są *prostopadłe* (*ortogonalne*), jeśli $\langle x, y \rangle = 0$.

Definicja. *Kula (otwarta), kula domknięta i sfera o środku w punkcie $x \in \mathbb{R}^k$ i promieniu $r > 0$ w normie $\|\cdot\|$ to, odpowiednio, zbiory*

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}^k : \|x - y\| < r\}, \\ \overline{B}(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}^k : \|x - y\| \leq r\}, \\ S(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}^k : \|x - y\| = r\}, \end{aligned}$$

Uwaga. Dla normy euklidesowej mamy

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}^k : (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_k - y_k)^2 < r^2\}, \\ \overline{B}(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}^k : (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_k - y_k)^2 \leq r^2\}, \\ S(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}^k : (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_k - y_k)^2 = r^2\}, \end{aligned}$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$.

Przykłady

Dla normy euklidesowej:

- w $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ kule to przedziały otwarte, a sfery to zbiory dwupunktowe,
- w \mathbb{R}^2 kule to koła otwarte, a sfery to okręgi,
- w \mathbb{R}^3 kule i sfery to zwykłe kule i sfery.

Uwaga. Od tej pory będziemy rozpatrywać wyłącznie euklidesową normę i euklidesowy iloczyn skalarny w \mathbb{R}^k .