

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład II

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Rachunek całkowy

Funkcja pierwotna — całka nieoznaczona

Całkowanie funkcji wymiernych

Definicja. *Funkcja wymierna* to funkcja postaci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P, Q są wielomianami.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu

Każdy wielomian $Q(x)$ o współczynnikach rzeczywistych można jednoznacznie zapisać w postaci

$$Q(x) = \alpha(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_m)^{k_m} (x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \cdots (x^2 + b_nx + c_n)^{l_n},$$

gdzie a_i pierwiastek rzeczywisty wielomianu Q krotności k_i oraz trójmiany $x^2 + b_jx + c_j$ nie mają pierwiastków rzeczywistych.

Stwierdzenie. *Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci $f(x) = W(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie W, P, Q są wielomianami, $\deg P < \deg Q$ (gdzie \deg oznacza stopień wielomianu) oraz P, Q nie mają wspólnych czynników (w rozkładzie z poprzedniego twierdzenia).*

Twierdzenie o rozkładzie funkcji wymiernej

Niech $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P, Q są wielomianami bez wspólnych czynników i $\deg P < \deg Q$. Wtedy $f(x)$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy funkcji (tzw. *ułamków prostych*) postaci

$$\frac{A_{i,r}}{(x - a_i)^r} \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, k_i \quad \text{oraz} \\ \frac{B_{j,s}x + C_{j,s}}{(x^2 + b_jx + c_j)^s} \quad j = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, l_j,$$

dla pewnych stałych rzeczywistych $A_{i,r}, B_{j,s}, C_{j,s}$, gdzie $Q(x)$ ma rozkład

$$Q(x) = \alpha(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_m)^{k_m} (x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \cdots (x^2 + b_nx + c_n)^{l_n}.$$

Wniosek. Problem całkowania funkcji wymiernych sprowadza się do całkowania ułamków prostych.

Przykład. Obliczyć całkę $\int \frac{1}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} dx$.

Rozkładamy wielomian $Q(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$ na czynniki. Sprawdzamy, że 1 i 2 są pierwiastkami wielomianu Q . Dzieląc $Q(x)$ przez $x - 1$ i $x - 2$, otrzymujemy

$$Q(x) = (x - 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 1),$$

skąd mamy

$$Q(x) = (x - 1)^3(x - 2).$$

Z twierdzenia o rozkładzie funkcji wymiernej, wiemy że

$$\frac{1}{(x - 1)^3(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} + \frac{D}{x - 2}$$

dla pewnych $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Mnożąc to równanie przez $(x - 1)^3(x - 2)$, otrzymujemy

$$1 = A(x - 1)^2(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 2) + D(x - 1)^3.$$

To równanie jest spełnione dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Podstawiając kolejno za x liczby 1, 2, 0, 3, dostajemy $C = -1$, $D = 1$, $A = B$ i $4A + 2B = -6$. Stąd $A = -1$, $B = -1$. Mamy zatem

$$\frac{1}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{-1}{(x - 1)^2} + \frac{-1}{(x - 1)^3} + \frac{1}{x - 2},$$

skąd

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} dx &= -\int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx - \int \frac{1}{(x - 1)^3} dx + \int \frac{1}{x - 2} dx \\ &= -\ln|x - 1| + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2(x - 1)^2} + \ln|x - 2| \\ &= \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2(x - 1)^2} + \ln\left|\frac{x - 2}{x - 1}\right|. \end{aligned}$$

Przykład. Obliczyć całkę $\int \frac{1}{x^4 + 1} dx$.

Rozkładamy wielomian $Q(x) = x^4 + 1$ na czynniki. Mamy

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Zatem,

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

dla pewnych $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Mnożąc przez $x^4 + 1$, otrzymujemy

$$1 = (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1),$$

co po uporządkowaniu ma postać

$$(A + C)x^3 + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)x^2 + (A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D)x + B + D - 1 = 0.$$

Ponieważ ta równość ma miejsce dla każdego $x \in \mathbb{R}$, wszystkie współczynniki po lewej stronie równania muszą być równe 0. Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0 \\ B + D - 1 = 0. \end{cases}$$

Podstawiając $C = -A$ i $D = 1 - B$ do dwóch pozostałych równań, mamy

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}A + 1 = 0 \\ 2\sqrt{2}B - \sqrt{2} = 0, \end{cases}$$

skąd $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $D = \frac{1}{2}$.

Zatem,

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx.$$

Policzymy najpierw drugą całkę $\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} &= \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Licząc $\int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$, stosujemy podstawienie $y = x^2 + \sqrt{2}x + 1$. Ponieważ $dy = (2x + \sqrt{2})dx$, otrzymujemy

$$\int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln y = \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

W całce $\int \frac{1}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} dx$ stosujemy podstawienie $y = \sqrt{2}x + 1$ i dostajemy $dy = \sqrt{2} dx$,

$$\int \frac{1}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{y^2 + 1} dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan y = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x + 1).$$

Reasumując, mamy

$$\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1).$$

Licząc pierwszą całkę, podstawiamy $y = -x$ i mamy $dy = -dx$,

$$\begin{aligned} \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx &= - \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}y + \frac{1}{2}}{y^2 + \sqrt{2}y + 1} dy \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \ln(y^2 + \sqrt{2}y + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}y + 1) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(-\sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

przy pomocy wzoru na drugą całkę.

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} (\arctan(\sqrt{2}x + 1) - \arctan(-\sqrt{2}x + 1)).$$

Całka oznaczona

Całka oznaczona (Newtona)

Niech

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, będzie funkcją ciągłą.

Definicja. *Całką oznaczoną (Newtona) funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \stackrel{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b,$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f .

Uwaga. Wartość całki oznaczonej nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej.

Podstawowe własności całki oznaczonej

Twierdzenie. Niech $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe. Wtedy:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx, \\ \int_a^b c f(x) \, dx &= c \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Twierdzenie. Niech $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe oraz $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in [a, b]$. Wtedy

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej

Jeśli funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są klasy C^1 , to

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej

Niech $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 i niech f będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale zawierającym $g([a, b])$. Wtedy

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy.$$

Uwagi

- Przyjmujemy konwencję $\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$.
- W odróżnieniu od całki nieoznaczonej, możemy napisać $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(y) \, dy = \int_a^b f(t) \, dt$ etc. (według definicji, wartość całki oznaczonej zależy tylko od przedziału $[a, b]$ i funkcji f).

Przykład. $\int_a^b dx = [x]_a^b = b - a$.

Przykład. $\int_1^2 \ln x \, dx = \int_1^2 1 \cdot \ln x \, dx \underset{\text{przez części}}{=} [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1$.

Przykład. $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1} \, dx \underset{y=x^2+1}{=} \int_1^{10} \frac{1}{y} \, dy = [\ln y]_1^{10} = \ln 10$.

Wzór Taylora z resztą w postaci całkowej

Twierdzenie. Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^{n+1} . Wtedy n -ta reszta Taylora funkcji f w punkcie $x_0 \in (a, b)$ ma postać

$$r_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} (x-y)^n dy.$$

Funkcja górnej granicy całkowania

Twierdzenie. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, będzie funkcją ciągłą. Wtedy funkcja

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

jest różniczkowalna na przedziale (a, b) oraz

$$F'(x) = f(x).$$

Dowód. Z definicji całki oznaczonej, funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f . □