

Analiza Matematyczna II

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład VII

Uniwersytet Warszawski
semestr letni

Funkcje wielu zmiennych

Różniczkowalność funkcji w \mathbb{R}^k

Twierdzenie (Warunek dostateczny różniczkowalności). *Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty i niech $x \in A$. Jeżeli wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f istnieją w każdym punkcie pewnego otoczeniu punktu x i są ciągłe w punkcie x , to f jest różniczkowalna w x .*

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$ otwarty. Mówimy, że funkcja f jest klasy C^1 , jeśli wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f istnieją i są ciągłe w każdym punkcie zbioru A . Piszemy wtedy $f \in C^1$ lub $f \in C^1(A)$.

Wniosek. *Funkcje klasy C^1 są różniczkowalne.*

Twierdzenie. *Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna w punkcie $x \in A$ oraz $\text{grad } f(x) \neq 0$. Rozważmy pochodne kierunkowe $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ dla $h \in \mathbb{R}^k$, $\|h\| = 1$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ przyjmuje maksimum (minimum) dla $h = \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}$ ($h = -\frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}$).*

Dowód (dla maksimum). Jeśli $\|h\| = 1$, to z nierówności Schwarza,

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = Df(x)(h) = \langle \text{grad } f(x), h \rangle \leq \|\text{grad } f(x)\| \|h\| = \|\text{grad } f(x)\|,$$

a dla $h_0 = \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}$ mamy $\|h_0\| = 1$ i

$$\frac{\partial f}{\partial h_0}(x) = \left\langle \text{grad } f(x), \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|} \right\rangle = \frac{\|\text{grad } f(x)\|^2}{\|\text{grad } f(x)\|} = \|\text{grad } f(x)\|.$$

□

Wniosek. Gradient jest kierunkiem najszybszego wzrostu funkcji.

Twierdzenie. Jeśli $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^k$ są różniczkowalne w punkcie $x \in A$, to:

- $D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x)$,
- $D(tf)(x) = tDf(x)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Wniosek.

- $\frac{\partial(f + g)}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$,
- $\frac{\partial(tf)}{\partial x_i}(x) = t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ dla $t \in \mathbb{R}$

dla $i = 1, \dots, k$.

Twierdzenie (o różniczkowaniu złożenia funkcji). Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^l$, gdzie A otwarty w \mathbb{R}^k i B otwarty w \mathbb{R}^m i niech $x \in A$, tak że $f(x) \in B$. Wtedy, jeśli f różniczkowalna w punkcie x i g różniczkowalna w punkcie $f(x)$, to $g \circ f$ różniczkowalna w punkcie x i

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

Wniosek.

$$MJ(g \circ f)(x) = MJg(f(x)) \cdot MJf(x).$$

Wniosek.

$$\frac{\partial(g \circ f)_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(x)) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(x)) \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)$$

dla $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$.

Przykład. Jeśli

$$h(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

dla pewnej różniczkowalnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, to:

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta,$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta)(-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)(r \cos \theta).$$

Przykład. Jeśli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to:

$$(g \circ f)'(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) f_1'(x) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x)) f_m'(x).$$

Uwaga. Biorąc w ostatnim przykładzie

$$g(y_1, \dots, y_m) = y_1 \cdots y_m,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} (f_1 \cdots f_m)'(x) &= f_1'(x)f_2(x)f_3(x) \cdots f_m(x) \\ &\quad + f_1(x)f_2'(x)f_3(x) \cdots f_m(x) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f_1(x)f_2(x)f_3(x) \cdots f_m'(x), \end{aligned}$$

czyli wzór na pochodną iloczynu m funkcji jednej zmiennej.

Twierdzenie (o różniczkowaniu odwrotnej). *Niech $f : A \rightarrow B$, gdzie A, B otwarte w \mathbb{R}^k , będzie funkcją wzajemnie jednoznacznie i niech $x \in A$. Załóżmy, że zbiór B jest otoczeniem punktu $f(x)$, funkcja f^{-1} jest ciągła w punkcie $f(x)$, funkcja f jest różniczkowalna w x i $Df(x)$ jest liniowym automorfizmem \mathbb{R}^k . Wtedy funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $f(x)$ i*

$$D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}.$$

Wniosek.

$$MJ(f^{-1})(f(x)) = (MJf(x))^{-1}.$$

Uwaga. $Df(x)$ jest liniowym automorfizmem \mathbb{R}^k wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy Jacobiego (tzw. *jacobian*) jest różny od 0.

Twierdzenie (o wartości średniej). *Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie A otwarty w \mathbb{R}^k , będzie funkcją skalarną i niech $x, y \in A$. Załóżmy, że odcinek $[x, y]$ jest zawarty w A i funkcja f jest różniczkowalna na $[x, y]$. Wtedy istnieje $z \in [x, y]$, takie że*

$$f(x) - f(y) = Df(z)(x - y).$$

Uwaga. Dla $k = 1$ jest to twierdzenie Lagrange'a.

Przykład. To twierdzenie nie zachodzi dla funkcji wektorowych, np. dla $f(x) = (\cos x, \sin x)$ mamy $f(2\pi) - f(0) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0)$, ale $Df(z)(2\pi - 0) = (-2\pi \sin z, 2\pi \cos z) \neq (0, 0)$ dla każdego $z \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie. *Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie A otwarty w \mathbb{R}^k i niech $x, y \in A$. Załóżmy, że odcinek $[x, y]$ jest zawarty w A i funkcja f jest różniczkowalna na $[x, y]$. Wtedy*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sqrt{m} \sup_{z \in [x, y]} \max_{j=1, \dots, m} \|\text{grad } f_j(z)\| \cdot \|x - y\|.$$