

# Analiza Matematyczna I

## Wydział Nauk Ekonomicznych

### wykład IV

Uniwersytet Warszawski  
semestr zimowy

## Wstęp do Analizy

### Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

#### Kapitalizacja w sposób ciągły

##### Pytanie

Jak bardzo wzrośnie wartość wkładu na lokacie, jeśli odsetki są naliczane w każdej chwili („nieskończenie często”)?

Założmy najpierw, że przy początkowym wkładzie  $w_0$  roczne oprocentowanie wynosi 100% i odsetki są naliczane  $n$  razy w roku. Wtedy wartość wkładu na lokacie po 1 roku wyniesie

$$w_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Spójrzmy na ciąg

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

#### Liczba $e$

Na poprzednim wykładzie udowodniliśmy, że ciąg  $b_n$  jest ściśle rosnący. (Np. jeśli odsetki są naliczane raz w roku, to wartość wkładu po 1 roku wynosi  $2w_0$ , przy dwukrotnym naliczaniu  $2,25w_0$ , przy trzykrotnym naliczaniu ok.  $2,37w_0$  etc.)

W podobny sposób można pokazać, że ten ciąg jest ograniczony z góry (tzn. wszystkie wyrazy  $b_n$  są mniejsze od pewnej liczby). Stąd wynika, że gdy  $n$  jest bardzo duże (dąży

do nieskończoności), to ciąg  $b_n$  dąży do pewnej liczby, którą oznaczamy  $e$  (*liczba Eulera*). (Ścisła definicja zbieżności ciągu podana będzie później.) Piszemy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \quad \text{lub} \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Uwaga.** Liczba  $e$  jest niewymierna. W przybliżeniu

$$e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369 \dots$$

Zatem przy oprocentowaniu 100% w skali roku i ciągłej kapitalizacji wartość wkładu na lokacie po 1 roku wyniesie ok.  $2,7w_0$ .

Podobnie, przy rocznym oprocentowaniu  $p\%$  i naliczaniu odsetek  $n$  razy w roku, wartość wkładu po 1 roku wyniesie

$$w_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n.$$

Przyjmując  $x = \frac{p}{100}$  i badając ciąg

$$b_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

uzyskujemy, że ciąg  $b_n$  dąży do pewnej liczby dodatniej, którą oznaczamy  $e^x$ . Ogólnie, zachodzi to dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ .

## Funkcja wykładnicza (eksponencjalna)

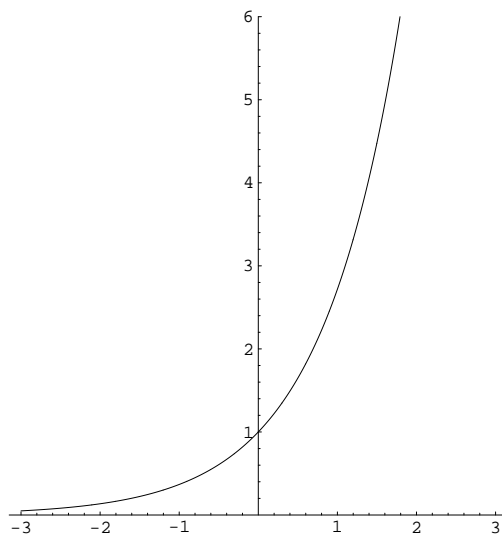
**Definicja.** *Funkcja wykładnicza* (ozn.  $e^x$  lub  $\exp(x)$ ) jest zdefiniowana dla  $x \in \mathbb{R}$  przez

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x.$$

## Własności funkcji wykładniczej

- $e^x > 0$
- $e^x$  jest funkcją ściśle rosnącą (tzn.  $e^{x_1} < e^{x_2}$  dla  $x_1 < x_2$ )
- $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$
- $e^0 = 1$

**Wykres funkcji**  $f(x) = e^x$



**Definicja.** *Logarytm naturalny* (ozn.  $\ln x$ ) liczby dodatniej  $x$  to taka liczba  $y \in \mathbb{R}$ , że  $e^y = x$ .

*Funkcja logarytmiczna* jest zatem funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej.

**Uwaga.** Poprawność definicji wynika z własności funkcji  $e^x$ .

### Własności funkcji logarytmu naturalnego

- $\ln x$  jest określony dla  $x > 0$
- $e^{\ln x} = x$  dla  $x > 0$  i  $\ln(e^x) = x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\ln x$  jest funkcją ściśle rosnącą (tzn.  $\ln x_1 < \ln x_2$  dla  $x_1 < x_2$ )
- $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$
- $\ln 1 = 0$

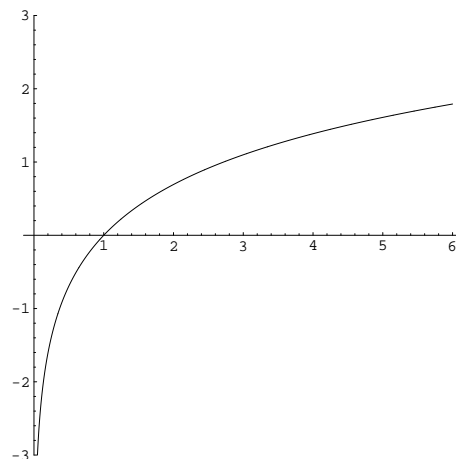
**Wykres funkcji**  $f(x) = \ln x$

**Uwaga.** Wykres funkcji  $\ln$  jest odbiciem wykresu  $\exp$  względem prostej  $y = x$ .

## Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

### Potęga o podstawie dodatniej

**Uwaga** (przypomnienie). Wyrażenie  $a^b$  jest dobrze zdefiniowane m. in. dla  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{N}$  (wielokrotne mnożenie), dla  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$  (odwrotność) i dla  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{Q}$  (pierwiastek).



### Pytanie

Jak zdefiniować  $a^b$  dla innych  $a, b \in \mathbb{R}$ , np.  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ?

Mając daną funkcję wykładniczą  $\exp$  i jej funkcję odwrotną  $\ln$  możemy zdefiniować dowolną potęgę o podstawie dodatniej.

**Definicja** ( $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ ).

$$a^b = e^{b \ln a}$$

### Uwagi

- Dla  $b \in \mathbb{Q}$  ta definicja jest zgodna z poprzednią.
- Zachodzi  $a^{b_1} a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$ ,  $(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 b_2}$ ,  $(a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^b$ .
- Nie definiujemy potęgi o podstawie ujemnej i dowolnym wykładniku rzeczywistym, np. nie definiujemy  $(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ .

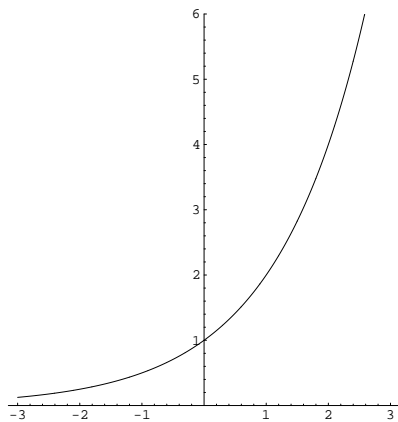
### Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$

**Definicja** ( $a \in \mathbb{R}, a > 0$ ). Funkcję  $f(x) = a^x$  dla  $x \in \mathbb{R}$  nazywamy *funkcją wykładniczą (eksponencjalną) o podstawie  $a$* .

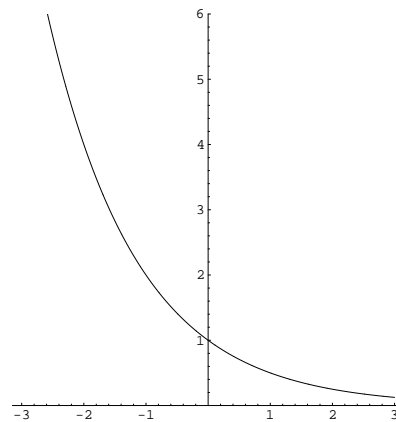
### Własności funkcji wykładniczej o podstawie $a > 0$

- $a^x > 0$
- $a^x$  jest funkcją ściśle rosnącą dla  $a > 1$ , ściśle malejącą dla  $a < 1$  i stałą (równą 1) dla  $a = 1$
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}$

- $a^0 = 1$



Wykres funkcji  $f(x) = 2^x$ .



Wykres funkcji  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ .

### Logarytm przy podstawie $a$

**Definicja** ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). *Logarytmem przy podstawie  $a$  (ozn.  $\log_a x$ ) z liczby  $x > 0$ , nazywamy taką liczbę  $y \in \mathbb{R}$ , że  $a^y = x$ .*

### Uwagi

- Jak poprzednio, poprawność definicji wynika z własności funkcji  $a^x$ .
- Logarytm przy podstawie  $e$  to logarytm naturalny.

### Własności funkcji logarytmicznej przy podstawie $a$

- $a^{\log_a x} = x$  dla  $x > 0$  i  $\log_a(a^x) = x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\log_a x$  jest funkcją ściśle rosnącą dla  $a > 1$  i ściśle malejącą dla  $0 < a < 1$ .
- $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ .
- $\log_a(x^b) = b \log_a x$  dla  $b \in \mathbb{R}$ .
- $\log_a 1 = 0$ ,  $\log_a a = 1$ .

### Wzór na zamianę podstawy logarytmu

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a x \quad \text{dla } x > 0, a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, a, b \neq 1.$$

**Uwaga.** Najczęściej używane podstawy logarytmu (oprócz  $e$ ) to 10 i 2.

**Przykład.** Funkcja logarytmiczna jest używana w modelach ekonomicznych jako *funkcja użyteczności inwestora* mająca własność *awersji do ryzyka* (ang.: *risk aversion utility function*).

**Definicja.** *Skala logarytmiczna* to skala pomiarowa używająca logarytmów pewnej wielkości fizycznej (np. wartości 1, 2, 3, ... są zaznaczone na skali w punktach  $\log 1$ ,  $\log 2$ ,  $\log 3$ , ...).

### Przykłady

- skala Richtera do określania siły wstrząsów sejsmicznych
- skala decybelowa do określania wielkości akustycznych
- skala pH do określania kwasowości i zasadowości
- interwały w muzyce
- skala wielkości gwiazdowych w astronomii

**Uwaga.** Skala logarytmiczna jest naturalna dla niektórych ludzkich zmysłów, np. słuchu.