

# Analiza Matematyczna I

## Wydział Nauk Ekonomicznych

### wykład VII

Uniwersytet Warszawski  
semestr zimowy

## Szeregi

### Zbieżność szeregu

#### Szeregi liczbowe

**Definicja.** Niech  $a_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$  będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Ciąg

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

nazywamy *ciągami sum częściowych szeregu*  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Jeśli ciąg sum częściowych  $S_n$  jest zbieżny do granicy  $S \in \mathbb{R}$ , to granicę tę nazywamy *sumą szeregu*  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nazywamy *zbieżnym*. W przeciwnym razie szereg nazywamy *rozbieżnym*. Ciąg  $a_n$  nazywamy *ciągami wyrazów szeregu*.

**Uwaga.** Symbolem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  oznacza się zarówno sam szereg, jak i jego sumę.

**Uwaga.** Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  zapisujemy również jako  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ , co może być traktowane jako „nieskończone sumowanie”. Ta interpretacja musi jednak być stosowana ostrożnie, np. zbieżność i suma szeregu może zależeć od kolejności składników  $a_n$  czy wstawienia nawiasów.

**Przykład** (Ile jest równe  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ?). W zależności od sposobu wstawienia nawiasów otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots &= 0 + 0 + 0 + \dots = 0, \\ 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1.\end{aligned}$$

Związane jest to z tym, że dla szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  mamy  $S_n = 0$  dla  $n$  parzystych i  $S_n = 1$  dla  $n$  nieparzystych, więc szereg ten jest rozbieżny.

**Uwaga.** Zamiast sumować szereg od  $n = 1$ , możemy to robić od  $n = 0$  lub innej liczby całkowitej.

**Przykład** (*Szereg geometryczny* o ilorazie  $q$ ). Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

dla  $a, q \in \mathbb{R}$ ,  $|q| < 1$  jest zbieżny i jego suma wynosi  $\frac{a}{1-q}$ .

Dla  $|q| \geq 1$  szereg jest rozbieżny.

*Dowód.* Wynika to z faktu, że dla tego szeregu  $S_n = a_0 + \dots + a_n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ . □

### Warunek konieczny zbieżności szeregu

**Twierdzenie.** *Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .*

*Dowód.* Niech  $S$  będzie sumą szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Wtedy

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S - S = 0.$$

□

**Uwaga.** Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, np. dla szeregu harmonicznego  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  mamy  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , a szereg ten jest rozbieżny.

*Dowód.*

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Zatem, gdyby szereg był zbieżny i miał sumę  $S$ , to

$$\frac{1}{2} < S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S - S = 0$$

co daje sprzeczność. □

## Własności arytmetyczne sumy szeregu

**Twierdzenie.** *Jeśli szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  są zbieżne i ich sumy wynoszą odpowiednio  $A$  i  $B$ , to:*

- Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  jest zbieżny i jego suma wynosi  $A + B$ .
- Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$  jest zbieżny i jego suma wynosi  $A - B$ .
- Dla każdego  $c \in \mathbb{R}$  szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  jest zbieżny i jego suma wynosi  $cA$ .

## Szeregi o wyrazach nieujemnych — kryteria zbieżności

### Szeregi o wyrazach nieujemnych

**Stwierdzenie.** *Jeśli  $a_n \geq 0$  dla dostatecznie dużych  $n$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych  $S_n$  jest ograniczony z góry.*

*Dowód.* Ciąg  $S_n$  jest rosnący dla dostatecznie dużych  $n$ , ponieważ

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0.$$

Zatem ciąg ten jest zbieżny do granicy skończonej wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony (z góry).  $\square$

### Kryteria zbieżności szeregów

**Uwaga.** Dokładne wyliczenie sumy szeregu jest w wielu wypadkach trudne. Najczęściej możemy stwierdzić tylko, czy dany szereg jest zbieżny czy rozbieżny. Do tego służą tzw. kryteria zbieżności szeregów.

**Twierdzenie** (Kryterium porównawcze). *Jeśli dla dostatecznie dużych  $n$  mamy  $0 \leq a_n \leq b_n$ , to:*

- Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.
- Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  jest rozbieżny.

### Przykład zastosowania kryterium porównawczego

Pokażemy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  jest zbieżny.

Niech

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_1 = a_1 = 1, \quad b_n = \frac{1}{(n-1)n} \text{ dla } n \geq 2.$$

Mamy  $0 < a_n \leq b_n$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .

Niech  $S_n$  będzie ciągiem sum częściowych szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Wtedy

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2. \end{aligned}$$

Zatem szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  jest zbieżny. Z kryterium porównawczego, szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  również jest zbieżny.

Pokazaliśmy zatem, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  jest zbieżny.

**Uwaga.** Można pokazać, że suma szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  jest równa  $\frac{\pi^2}{6}$ .

## Szeregi o wyrazach nieujemnych — kryteria zbieżności

### Kryterium ilorazowe (d'Alemberta)

**Twierdzenie.** Niech  $a_n > 0$  dla dostatecznie dużych  $n$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Wtedy:

- Jeśli  $q < 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.
- Jeśli  $q > 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny.

**Uwaga.** Jeśli  $q = 1$ , to szereg może być zarówno zbieżny, jak rozbieżny.

Nie jest prawdą, że warunek  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  implikuje zbieżność szeregu (np. szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  jest rozbieżny, a  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ ).

## Kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego)

**Twierdzenie.** Niech  $a_n \geq 0$  dla dostatecznie dużych  $n$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ . Wtedy:

- Jeśli  $q < 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.
- Jeśli  $q > 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny.

**Uwaga.** Jak poprzednio, przypadek  $q = 1$  jest przypadkiem wątpliwym.

## Przykład zastosowania kryterium d'Alemberta

Pokażemy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$  jest zbieżny.

Mamy  $a_n > 0$  oraz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e} < 1.$$

Zatem, z kryterium d'Alemberta, szereg ten jest zbieżny.

## Kryterium o zagęszczaniu

**Twierdzenie.** Niech  $a_n$  będzie malejącym ciągiem liczb nieujemnych. Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  jest zbieżny.

**Przykład** (Szereg harmoniczny o wykładniku  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ jest zbieżny } \iff \alpha > 1.$$

*Dowód.* Dla  $\alpha < 0$  mamy  $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , więc, z warunku koniecznego, szereg jest rozbieżny.

Dla  $\alpha \geq 0$  ciąg  $\frac{1}{n^\alpha}$  jest ciągiem malejącym liczb dodatnich, więc z kryterium o zagęszczaniu, szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Ten ostatni szereg jest szeregiem geometrycznym o ilorazie  $2^{1-\alpha}$ , który jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $2^{1-\alpha} < 1$ , co zachodzi dla  $1 - \alpha < 0$ , czyli dla  $\alpha > 1$ .  $\square$

## Kryterium o szeregach tego samego rzędu

**Twierdzenie.** Jeśli  $a_n, b_n > 0$  dla dostatecznie dużych  $n$  oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}, \text{ gdzie } c > 0,$$

to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  jest zbieżny.

**Uwaga.** Takie szeregi nazywa się szeregami tego samego rzędu.

## Przykład szeregów tego samego rzędu

Zbadamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 15n + 77}{2n^4 + 8n^3 + 91n + 6}.$$

Oznaczmy jego wyraz przez  $a_n$  i weźmy  $b_n = \frac{1}{n^2}$ .

Wtedy  $a_n, b_n > 0$  dla dostatecznie dużych  $n$  oraz

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 - 15n + 77)n^2}{2n^4 + 8n^3 + 91n + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 15n^3 + 77n^2}{2n^4 + 8n^3 + 91n + 6} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{15}{n} + \frac{77}{n^2}}{2 + \frac{8}{n} + \frac{91}{n^3} + \frac{6}{n^4}} = \frac{3}{2} > 0. \end{aligned}$$

Poza tym, szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  jest zbieżny jako szereg harmoniczny o wykładniku większym od 1, więc na mocy kryterium o szeregach tego samego rzędu, szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  też jest zbieżny.

## Szeregi o wyrazach dowolnego znaku

### Zbieżność bezwzględna i warunkowa

**Definicja.** Mówimy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli jest zbieżny szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, to mówimy, że jest *warunkowo zbieżny*.

**Twierdzenie.** Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny oraz

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

## Przestawianie wyrazów szeregu

**Twierdzenie.** *Jeśli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to każdy szereg powstały z niego przez przestawienie (zmianę kolejności) wyrazów jest zbieżny i jego suma nie ulega zmianie.*

## Twierdzenie Riemanna

*Jeśli szereg jest zbieżny warunkowo, to przez przestawienie (zmianę kolejności) jego wyrazów możemy uzyskać szereg rozbieżny lub szereg zbieżny o sumie będącej dowolną zadaną liczbą rzeczywistą.*

## Szeregi naprzemienne

**Definicja.** Szeregiem naprzemiennym nazywamy szereg postaci  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ , gdzie  $a_n \geq 0$ .

**Twierdzenie** (Kryterium Leibniza). *Jeśli ciąg  $a_n$  jest monotoniczny (dla dostatecznie dużych  $n$ ) i zbieżny do 0, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  jest zbieżny.*

## Przykłady zastosowania kryterium Leibniza

- Szereg anharmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

jest zbieżny. (Można pokazać, że jego suma jest równa  $\ln 2$ .)

- Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

jest zbieżny. (Można pokazać, że jego suma jest równa  $\frac{\pi}{4}$ .)

**Uwaga.** Oba te szeregi są zbieżne warunkowo.

## Mnożenie szeregów

**Definicja.** Iloczynem Cauchy'ego szeregów  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  nazywamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1).$$

## Twierdzenie Mertensa

*Jeśli szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  są zbieżne i co najmniej jeden z nich jest zbieżny bezwzględnie, to iloczyn Cauchy'ego tych szeregów jest zbieżny i jego suma jest iloczynem sum tych szeregów.*

### Kwadrat Cauchy'ego szeregu geometrycznego

Niech  $q \in \mathbb{R}$ ,  $|q| < 1$ . Wtedy szereg geometryczny  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  jest bezwzględnie zbieżny. Niech

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  będzie iloczynem Cauchy'ego dwóch szeregów  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ . Mamy  $c_n = qq^n + q^2q^{n-1} + \dots + q^nq = nq^{n+1}$ .

Zatem szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n+1}$  jest zbieżny i jego suma wynosi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n\right)^2 = \left(\frac{1}{1-q} - 1\right)^2 = \left(\frac{q}{1-q}\right)^2.$$

Stąd wynika, że  $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$ .

## Szeregi potęgowe

### Szeregi potęgowe

**Definicja.** Szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

gdzie  $a_n, a, x \in \mathbb{R}$ . (Przyjmujemy tutaj konwencję  $0^0 = 1$ .)

**Przykład.** Szereg geometryczny  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  jest szeregiem potęgowym (dla  $a_n = 1, a = 0$ ). Przypomnijmy, że jest on zbieżny dla  $|x| < 1$ .

### Promień zbieżności szeregu potęgowego

**Twierdzenie.** Niech  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  będzie szeregiem potęgowym. Wtedy istnieje  $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ , zwane promieniem zbieżności tego szeregu, takie że szereg jest zbieżny dla  $|x-a| < r$  i rozbieżny dla  $|x-a| > r$ .

Przedział  $(a-r, a+r)$  nazywa się przedziałem zbieżności tego szeregu (w przypadku  $r = \infty$  przedział zbieżności jest równy  $\mathbb{R}$ ).

### Uwagi

- Dla  $x = a$  szereg jest zawsze zbieżny.
- Dla  $x = a \pm r$  szereg może być zbieżny lub rozbieżny.



## Wzór na promień zbieżności szeregu potęgowego

**Twierdzenie** (Wzór Cauchy'ego-Hadamarda). *Jeśli istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  (skończona lub nieskończona), to promień zbieżności szeregu potęgowego  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  jest równy*

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

przy czym przyjmujemy tutaj konwencję  $\frac{1}{0} = \infty$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

**Twierdzenie.** *Jeśli  $a_n \neq 0$  i istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  (skończona lub nieskończona), to promień zbieżności szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  jest równy tej granicy.*

## Przykłady

- Dla szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  mamy  $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , więc promień zbieżności jest równy  $\infty$  (szereg jest zbieżny dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ ).  
Można pokazać, że suma tego szeregu jest równa  $e^x$ .
- Dla szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$  zachodzi  $\sqrt[n]{|a_n|} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , więc promień zbieżności jest równy 0. (Szereg jest zbieżny tylko dla  $x = 0$ .)
- Dla szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$  mamy  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ , a ten ciąg, jak poprzednio pokazaliśmy, zbiega do  $\frac{1}{e}$ . Zatem promień zbieżności wynosi  $e$ .