

# Analiza Matematyczna I

## Wydział Nauk Ekonomicznych

### wykład XII

Uniwersytet Warszawski  
semestr zimowy

## Rachunek różniczkowy

### Znajdowanie ekstremów funkcji

#### Znajdowanie ekstremów funkcji za pomocą pochodnych

Z poprzednich twierdzeń uzyskujemy następujący wniosek:

**Wniosek.** *Niech  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  gdzie  $P$  dowolny przedział w  $\mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą, która jest różniczkowalna poza (ewentualnymi) końcami przedziału  $P$ . Wtedy maksimum lub minimum funkcji może być przyjęte tylko w (ewentualnych) końcach przedziału  $P$  lub w punktach zerowania się pochodnej funkcji  $f$ .*

**Uwaga.** Jeśli przedział  $P$  nie jest domknięty i ograniczony, to  $f$  nie musi przyjmować maksimum i minimum.

#### Przykład

##### Zadanie

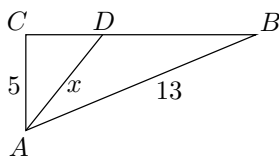
Zmęczony podróżnik znajduje się na równinie w lesie, w odległości 13 km od schroniska. W odległości 5 km od miejsca, gdzie jest podróżnik, biegnie wygodna prostoliniowa ścieżka prowadząca do schroniska. Po ścieżce podróżnik porusza się z prędkością 5 km/h, a po lesie tylko z prędkością 3 km/h. Znaleźć minimalny czas, w jakim podróżnik może dotrzeć do schroniska.

## Rozwiązanie

Na początku staramy się znaleźć matematyczny model sytuacji opisanej w zadaniu. Czas, w którym podróżnik dojdzie do schroniska zależy od obranej przez niego drogi.

Matematycznie rzecz biorąc, ten czas to funkcja o wartościach rzeczywistych dodatnich, zależąca od kształtu i długości marszruty podróżnika. Teoretycznie podróżnik może poruszać się po wielu skomplikowanych krzywych. Jednak, proste rozumowanie pozwala ograniczyć zakres możliwych dróg. Mianowicie, jeśli podróżnik dojdzie w pewnym momencie do ścieżki, to aby dojść jak najszybciej do schroniska, nie będzie już z niej schodził, będzie więc poruszał się po linii prostej. Podobnie, aby najszybciej dotrzeć do ścieżki, podróżnik również będzie się poruszał po linii prostej. Możemy zatem założyć, że marszruta podróżnika składa się z dwóch prostoliniowych odcinków: pierwszego poza ścieżką, a drugiego po ścieżce. (Drugi odcinek może być zdegenerowany do punktu, jeśli podróżnik od początku obierze prostoliniową drogę do schroniska.)

Teraz opisujemy nasz model w języku matematyki. Zakładamy, że podróżnik porusza się na płaszczyźnie. Oznaczmy przez  $A$  początkowy punkt, gdzie znajduje się podróżnik, przez  $B$  — punkt, gdzie znajduje się schronisko, przez  $C$  — punkt ścieżki, który jest najbliższy punktu  $A$  i przez  $D$  — punkt, gdzie podróżnik wejdzie na ścieżkę.



Rozpatrywana marszruta jest sumą odcinków  $\overline{AD}$  i  $\overline{DB}$ . Z warunków zadania wynika, że punkty  $B, C, D$  leżą na jednej prostej, a punkt  $A$  poza nią oraz kąt  $\angle ACB$  jest prosty. Poza tym, nietrudno zauważyć, że aby zminimalizować czas dojścia do schroniska, wystarczy rozpatrywać przypadek, gdy punkt  $D$  należy do odcinka  $\overline{BC}$ .

Ustalamy, że jednostką długości jest 1 km, a czasu 1 h. Z warunków zadania, długość odcinka  $\overline{AB}$  jest równa 13, a długość odcinka  $\overline{AC}$  równa 5. Oznaczmy przez  $x$  długość odcinka  $\overline{AD}$ .

Czas  $T_1$  przejścia przez odcinek  $\overline{AD}$  jest równy jego długości podzielonej przez prędkość poruszania się poza ścieżką, czyli

$$T_1 = \frac{x}{3}.$$

Podobnie, czas  $T_2$  przejścia przez odcinek  $\overline{DB}$  jest równy jego długości podzielonej przez prędkość poruszania się po ścieżce, czyli

$$T_2 = \frac{|\overline{DB}|}{5}.$$

Obliczymy teraz długość odcinka  $\overline{DB}$ . Ponieważ trójkąty  $\triangle ACB$  i  $\triangle ACD$  są prostokątne, to z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$\begin{aligned} |\overline{CB}| &= \sqrt{|\overline{AB}|^2 - |\overline{AC}|^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \\ |\overline{CD}| &= \sqrt{|\overline{AD}|^2 - |\overline{AC}|^2} = \sqrt{x^2 - 5^2} = \sqrt{x^2 - 25}. \end{aligned}$$

Zatem,

$$|\overline{DB}| = |\overline{CB}| - |\overline{CD}| = 12 - \sqrt{x^2 - 25}.$$

Całkowity czas  $T$  przejścia do schroniska jest więc równy

$$T = T_1 + T_2 = \frac{x}{3} + \frac{12 - \sqrt{x^2 - 25}}{5}.$$

Wyraziliśmy zatem ten czas jako funkcję zmiennej rzeczywistej  $x$ . Jak wynika z powyższych rozważań,  $x$  jest liczbą należącą do przedziału  $[|\overline{AC}|, |\overline{AB}|] = [5, 13]$  (wartości  $x = 5$  i  $x = 13$  odpowiadają odpowiednio przypadkom prostopadłego dojścia do ścieżki oraz prostoliniowemu dojściu do schroniska).

Możemy teraz użyć rachunku różniczkowego w celu znalezienia minimalnego czasu  $T$ . Funkcja  $T = T(x)$  jest określona i ciągła na przedziale  $[5, 13]$  i różniczkowalna na  $(5, 13)$ . Zatem, osiąga minimum w pewnym punkcie przedziału  $[5, 13]$ , który jest jednym z końców przedziału lub miejscem zerowania się pochodnej.

Pochodna funkcji  $T$  jest równa

$$T'(x) = \frac{1}{3} - \frac{x}{5\sqrt{x^2 - 25}},$$

więc równanie  $T'(x) = 0$  ma postać

$$\frac{x}{5\sqrt{x^2 - 25}} = \frac{1}{3},$$

czyli

$$3x = 5\sqrt{x^2 - 25}.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy  $16x^2 = 25^2$ , co daje  $x = \pm \frac{25}{4}$ . W przedziale  $(5, 13)$  znajduje się jeden z tych punktów, mianowicie  $x_0 = \frac{25}{4}$ . Obliczając wartość funkcji  $T$  w  $x_0$  otrzymujemy

$$T(x_0) = T\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{25}{12} + \frac{12 - \sqrt{\frac{25^2}{4^2} - 25}}{5} = \frac{25}{12} + \frac{33}{20} = \frac{56}{15} = 3 \text{ h } 44 \text{ min.}$$

Trzeba jeszcze obliczyć wartości funkcji  $T$  na końcach przedziału, czyli w punktach 5 i 13. Mamy

$$\begin{aligned} T(5) &= \frac{5}{3} + \frac{12}{5} = 4 \text{ h } 4 \text{ min,} \\ T(13) &= \frac{13}{3} = 4 \text{ h } 20 \text{ min.} \end{aligned}$$

Najmniejszą wartość spośród tych trzech punktów funkcja  $T$  przyjmuje w punkcie  $x_0 = \frac{25}{4}$ , więc minimalny czas dojścia do schroniska jest równy

$$T\left(\frac{25}{4}\right) = 3 \text{ h } 44 \text{ min.}$$

Zauważmy jeszcze, że największą wartość funkcja  $T$  przyjmuje w punkcie  $x = 13$ , zatem droga najkrótsza w sensie długości nie jest wcale najkrótszą w sensie czasu potrzebnego do jej przebycia. Przejście najkrótszą drogą do ścieżki (przypadek  $x = 5$ ) również nie jest najlepszą strategią.

### Inny przykład

#### Zadanie

Znaleźć największy obwód trójkąta wpisanego w okrąg o danym promieniu  $r > 0$ .

#### Rozwiązanie

Oznaczmy przez  $a, b, c$  długości boków takiego trójkąta, a przez  $\alpha, \beta, \gamma$  — miary kątów tego trójkąta leżących odpowiednio naprzeciw tych boków. Z twierdzenia sinusów, mamy

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r.$$

Zatem, obwód tego trójkąta jest równy

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2r(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \\ &= 2r(\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\pi - (\alpha + \beta))) = 2r(\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Jak widać, obwód trójkąta jest funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych  $\alpha, \beta$ , takich że  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in [0, \pi]$  (dla wygody dołączamy końce przedziału, chociaż odpowiadają one sytuacji trójkąta zdegenerowanego). Rozważmy więc funkcję

$$f(\alpha, \beta) = 2r(\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)).$$

Ponieważ chcemy skorzystać z rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej, ustalamy najpierw zmienną  $\beta \in [0, \pi]$  i znajdujemy maksymalny obwód trójkąta przy danym kącie  $\beta$ . Chcemy zatem zmaksymalizować funkcję

$$f_\beta(\alpha) = f(\alpha, \beta) = 2r(\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)),$$

która jest funkcją jednej zmiennej rzeczywistej  $\alpha$  na przedziale  $[0, \pi - \beta]$ .

Funkcja  $f_\beta$  jest ciągła i różniczkowalna na  $[0, \pi - \beta]$ . Obliczając pochodną, mamy

$$f'_\beta(\alpha) = 2r(\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta)),$$

więc

$$f'_\beta(\alpha) = 0 \iff \cos \alpha = -\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - (\alpha + \beta)).$$

Ponieważ funkcja  $\cos$  jest różnowartościowa na  $[0, \pi]$ , otrzymujemy

$$\alpha = \pi - (\alpha + \beta),$$

czyli

$$\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

Funkcja  $f_\beta$  przyjmuje zatem maksimum dla  $\alpha = 0, \pi - \beta$  lub dla  $\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}$ . W przypadku  $\alpha = 0, \pi - \beta$  mamy  $f_\beta(0) = f_\beta(\pi - \beta) = 4r \sin \beta$ , co przyjmuje największą wartość dla  $\beta = \frac{\pi}{2}$  i wtedy obwód trójkąta jest równy  $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 4r$ . (Przypadek ten odpowiada trójkątowi zdegenerowanemu.)

W przypadku  $\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}$  mamy

$$f_\beta\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) = 2r\left(\sin \frac{\pi - \beta}{2} + \sin \beta + \sin \frac{\pi + \beta}{2}\right) = 2r\left(\sin \beta + 2 \cos \frac{\beta}{2}\right).$$

Zmaksymalizujemy teraz funkcję

$$g(\beta) = f_\beta\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) = 2r\left(\sin \beta + 2 \cos \frac{\beta}{2}\right)$$

na przedziale  $[0, \pi]$ .

Ponieważ

$$g'(\beta) = 2r\left(\cos \beta - \sin \frac{\beta}{2}\right),$$

to

$$g'(\beta) = 0 \iff \cos \beta = \sin \frac{\beta}{2} \iff \cos \beta = \cos \frac{\pi - \beta}{2}.$$

Skoro  $\beta \in [0, \pi]$ , daje to  $\beta = \frac{\pi - \beta}{2}$ , czyli  $\beta = \frac{\pi}{3}$ . Sprawdzamy, że

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2r\left(\sin \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}r.$$

Na końcach przedziału mamy  $g(0) = 4r$  i  $g(\pi) = 0$ . Ponieważ  $3\sqrt{3} > 4$ , funkcja  $g$  przyjmuje maksimum (równe  $3\sqrt{3}r$ ) dla  $\beta = \frac{\pi}{3}$ . To maksimum jest większe od  $4r$ , które maksymalizowało funkcję  $f$  przy  $\alpha = 0, \pi - \beta$ . Zatem, funkcja  $f$  jest największa dla  $\beta = \frac{\pi}{3}$  i  $\alpha = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ . Największy obwód spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu  $r$  ma więc trójkąt równoboczny. Obwód ten jest równy  $3\sqrt{3}r$ .

## Inne zastosowania pochodnych

### Rozwiązywanie nierówności przy pomocy pochodnych

**Przykład.** Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi

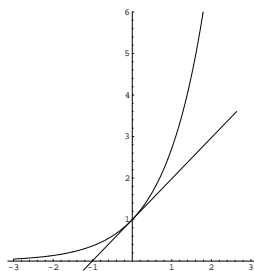
$$e^x \geq x + 1,$$

przy czym równość ma miejsce tylko dla  $x = 0$ .

*Dowód.* Niech  $f(x) = e^x - x - 1$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $f$  jest różniczkowalna i  $f'(x) = e^x - 1$ . Funkcja  $f'(x)$  jest ściśle rosnąca, bo jej pochodna to  $e^x > 0$  (z własności funkcji wykładniczej). Zatem, ponieważ  $f'(0) = e^0 - 1 = 0$ , to  $f'(x) < 0$  dla  $x \in (-\infty, 0)$  i  $f'(x) > 0$  dla  $x \in (0, +\infty)$ . Wynika stąd, że  $f$  jest ściśle malejąca na przedziale  $(-\infty, 0)$  i ściśle rosnąca na przedziale  $(0, +\infty)$ . Zatem,  $f$  osiąga minimum właściwe w  $x_0 = 0$ , czyli  $f(x) > f(0) = 0$  dla każdego  $x \neq 0$ . Mamy więc  $e^x > x + 1$  dla  $x \neq 0$ .  $\square$

### Geometryczna interpretacja nierówności $e^x \geq x + 1$ .

Funkcja  $f(x) = e^x$  ma pochodną  $e^x$ , która jest równa 1 dla  $x = 0$ . Zatem, prosta styczna do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(0, 1)$  ma równanie  $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$ , czyli  $y = x + 1$ . Nierówność  $e^x \geq x + 1$  mówi zatem, że wykres funkcji  $e^x$  leży nad tą prostą styczną.



Rysunek 1: Ilustracja nierówności  $e^x \geq x + 1$ .

**Przykład** (Inny dowód znanej nierówności). Dla każdego  $x > 0$  zachodzi

$$\sin x < x.$$

*Dowód.* Niech  $f(x) = x - \sin x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Mamy  $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ , przy czym  $f'(x) = 0$  tylko dla  $x = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Zatem,  $f$  jest rosnąca. Co więcej,  $f$  jest ściśle rosnąca na każdym przedziale postaci  $(2k\pi, (2k + 2)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Ponieważ te przedziały wraz z końcami pokrywają całą prostą rzeczywistą, wynika stąd, że  $f$  jest ściśle rosnąca na  $\mathbb{R}$ . Zatem, dla każdego  $x > 0$  mamy  $f(x) > f(0) = 0$ , czyli  $\sin x < x$ .  $\square$

## Obliczanie granic przy pomocy pochodnych

### Reguła de l'Hospitala

**Twierdzenie.** Niech  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , będą funkcjami różniczkowalnymi, przy czym  $g(x), g'(x) \neq 0$  dla  $x$  w pewnym prawostronnym otoczeniu punktu  $a$ ,  $x \neq a$ . Załóżmy, że  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$  lub  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$ . Wtedy,

jeśli istnieje granica (skończona lub nieskończona)  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G$ , to istnieje granica

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  i jest równa  $G$ .

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla granic lewostronnych oraz obustronnych.

**Przykład.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

*Dowód.* Niech  $f(x) = e^x - 1$ ,  $g(x) = x$ . Funkcje  $f$  i  $g$  są różniczkowalne,  $g(x), g'(x) \neq 0$  dla  $x \neq 0$  oraz  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . Poza tym,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Na mocy reguły de l'Hospitala,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ . □

**Przykład.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{6}$ .

*Dowód.* Niech  $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ ,  $g(x) = \operatorname{tg}^2 x$ . Ponieważ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , to  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . Obliczamy według reguły de l'Hospitala,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x \cos x - \sin x) \cos^2 x}{2x^2 \sin x \operatorname{tg} x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x) \cos^3 x}{x \sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}. \end{aligned}$$

Ponieważ licznik i mianownik tego ułamka dążą do 0, stosujemy powtórnie regułę de l'Hospitala.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x^3)'} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Zatem,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{6}$ . □