

Analiza Matematyczna I

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład VI

Uniwersytet Warszawski
semestr zimowy

Ciągi

Twierdzenie Stolza

Twierdzenie Stolza

Założmy, że ciąg b_n jest ściśle rosnący i zbieżny do $+\infty$. Wtedy dla każdego ciągu a_n , jeśli ciąg

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

ma granicę (właściwą lub niewłaściwą) równą g , to ciąg

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

też ma granicę równą g .

Przykład zastosowania twierdzenia Stolza

Obliczmy granicę ciągu

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Biorąc $y_n = \ln x_n$ mamy

$$y_n = \ln \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\ln \frac{n!}{n^n}}{n}.$$

Niech

$$a_n = \ln \frac{n!}{n^n}, \quad b_n = n.$$

Wtedy $y_n = \frac{a_n}{b_n}$. Ponieważ b_n jest ciągiem rosnącym do $+\infty$, możemy skorzystać z twierdzenia Stolza.

Liczymy granicę ciągu

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \frac{\ln \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} - \ln \frac{n!}{n^n}}{n+1-n} \\ &= \ln \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} - \ln \frac{n!}{n^n} = \ln \frac{(n+1)! n^n}{n! (n+1)^{n+1}} = \ln \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= -\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = -\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\ln e = -1.\end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia Stolza, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -1$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -1$.

Wynika stąd, że $x_n = e^{y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} = \frac{1}{e}$, a zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Uwaga. Z poprzedniego przykładu wynika, że

$$n! \approx \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

dla dużych n .

Dokładniejsze oszacowanie wzrostu silni daje następujący wzór *Stirlinga*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n} = 1.$$

Tempo zbieżności ciągu

Szybkość zbieżności ciągu do granicy

W wielu przypadkach (np. przy stosowaniu przybliżonych obliczeń), interesuje nas, jak szybko dany ciąg a_n zbiega do granicy g , tzn. jak duża jest wielkość $|a_n - g|$ dla danego n . Znajomość tego pozwala nam oszacować, jak duży błąd robimy, zastępując dokładną wartość granicy g przez „ n -te przybliżenie” a_n .

Przykład. Ciąg $a_n = \frac{n^2+2}{n^2+1}$ dąży do $g = 1$.

Mamy

$$|a_n - g| = \left| \frac{n^2+2}{n^2+1} - 1 \right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}.$$

Ciąg a_n dąży więc do 1 mniej więcej w tempie $\frac{1}{n^2}$.

Przykład. Wiemy, że ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dąży do e . Można pokazać, że

$$|a_n - e| < \frac{e}{n}.$$

Zatem, biorąc a_n dla $n = 1000$ uzyskamy przybliżenie e z dokładnością mniej więcej do trzeciego miejsca po przecinku.

Istnieją ciągi, które dużo szybciej aproksymują liczbę e . Np. można pokazać, że ciąg

$$b_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

dąży do e z szybkością

$$|b_n - e| < \frac{1}{nn!}.$$

Zatem, do uzyskania e z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku wystarczy wziąć b_n dla $n = 6$, a dla $n = 1000$ uzyskujemy przybliżenie z dokładnością lepszą niż 2500 miejsc po przecinku.

Ciągi rekurencyjne

Ciągi określone rekurencyjnie (równania różnicowe)

Czasami ciąg a_n nie jest określony bezpośrednim wzorem, ale zdefiniowany w *sposób rekurencyjny* (lub *indukcyjny*): definiujemy pierwszy wyraz ciągu (lub kilka początkowych), a następnie podajemy regułę opisującą, jak następny wyraz zależy od poprzednich.

Przykłady

- $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + q$ ($a, q \in \mathbb{R}$) ciąg arytmetyczny
- $a_1 = a, a_{n+1} = a_n q$ ($a, q \in \mathbb{R}$) ciąg geometryczny
- $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n(n+1)$ silnia
- $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ciąg Fibonacciego

Uwaga. Ciągi określone rekurencyjnie występują często w modelowaniu matematycznym zachowania różnych układów w czasie, m.in. zjawisk ekonomicznych. Wyraz a_n określa wtedy wartość pewnej zmiennej (np. produkcji, ceny, kosztu etc.) układu w chwili n . Formuła rekurencyjna mówi, w jaki sposób wartość tej zmiennej w chwili n determinuje jej wartość w chwili $n+1$.

Obliczanie granic ciągów określonych rekurencyjnie

- Czasami można łatwo wyliczyć bezpośredni wzór na n -ty wyraz ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie, np. dla ciągu geometrycznego $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n q$ mamy $a_n = q^{n-1}$ (co można łatwo sprawdzić indukcyjnie), więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } |q| < 1 \\ 1 & \text{dla } q = 1 \\ +\infty & \text{dla } q > 1 \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } q \leq -1. \end{cases}$$

- W innych przypadkach obliczanie granic jest trudniejsze, czasami można skorzystać z monotoniczności ciągu.

Przykład obliczenia granicy ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie

Znajdziemy granicę ciągu określonego rekurencyjnie:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Indukcyjnie łatwo sprawdzamy, że $a_n > 0$ dla każdego n , więc ciąg jest dobrze określony. Załóżmy najpierw, że ciąg a_n jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$.

Wtedy ciąg a_{n+1} też jest zbieżny do g , a ciąg $\sqrt{2 + a_n}$ jest zbieżny do $\sqrt{2 + g}$, więc z formuły rekurencyjnej mamy $g = \sqrt{2 + g}$, co implikuje

$$g^2 - g - 2 = 0.$$

Rozwiązując to równanie kwadratowe, uzyskujemy, że $g = 2$ lub $g = -1$. Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu a_n są dodatnie, to $g \geq 0$, a więc

$$g = 2.$$

Pokazaliśmy zatem, że jeśli ciąg a_n ma granicę skończoną, to jest ona równa 2.

Pokażemy teraz, że ciąg a_n rzeczywiście jest zbieżny.

Najpierw sprawdzimy przez indukcję, że $a_n < 2$ dla każdego n .

Mamy $a_1 = 1 < 2$ oraz

$$a_n < 2 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

(bo $\sqrt{2 + x}$ jest funkcją rosnącą).

Mamy zatem $0 < a_n < 2$ dla każdego n .

Pokażemy teraz, że ciąg a_n jest rosnący. Zauważmy, że:

$$a_{n+1} > a_n \iff \sqrt{2 + a_n} > a_n \iff a_n^2 - a_n - 2 < 0.$$

Rozwiązując tę nierówność (jest to ta sama funkcja kwadratowa, co poprzednio), otrzymujemy $a_n \in (-1, 2)$.

Pokazaliśmy poprzednio, że $0 < a_n < 2$ dla każdego n , zatem nierówność ta jest spełniona i ciąg a_n jest ściśle rosnący.

Ponieważ każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny, ciąg a_n ma granicę. Jak wcześniej pokazaliśmy, ta granica jest równa 2.

Model rynku jednego towaru (ang. *cobweb model*, Kaldor 1934)

Oznaczenia

$n = 0, 1, 2, \dots$	czas
P_n	cena towaru (ang. <i>price</i>) w chwili n
D_n	popyt na towar (ang. <i>demand</i>) w chwili n
S_n	podaż towaru (ang. <i>supply</i>) w chwili n

Założenia ($\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ niezależne od n)

$S_n = D_n$	producent sprzedaje cały wytwarzany towar,
$D_n = \alpha - \beta P_n$	popyt maleje (proporcjonalnie) w wyniku wzrostu ceny,
$S_{n+1} = \gamma + \delta P_n$	producent zwiększa podaż (proporcjonalnie) w wyniku wzrostu ceny.

Pytanie

Jak zmienia się cena i podaż towaru w miarę upływu czasu?

Z równań opisujących model uzyskujemy

$$P_{n+1} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} P_n.$$

Wynika stąd, że model ma sens, jeśli $\alpha > \gamma$ (maksymalny popyt jest większy od minimalnej podaży). W przeciwnym razie cena stawałaby się niedodatnia.

Oznaczając $A = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$, $B = \frac{\delta}{\beta}$ mamy $P_{n+1} = A - B P_n$.

Indukcyjnie łatwo pokazujemy, że

$$P_n = A(1 - B + B^2 - \dots + (-1)^{n-1} B^{n-1}) + (-1)^n B^n P_0,$$

co daje

$$P_n = \frac{A}{1 + B} + (-B)^n \left(P_0 - \frac{A}{1 + B} \right) = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} + \left(-\frac{\delta}{\beta} \right)^n \left(P_0 - \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} \right).$$

Wynika stąd, że możliwe są następujące przypadki.

Przypadek stabilny (zbieżny)

Jeśli $\beta > \delta$ (popyt jest bardziej wrażliwy niż podaż na zmianę ceny), to dla $n \rightarrow \infty$ mamy $P_n \rightarrow P_{eq} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$. Cenę P_{eq} nazywamy *ceną równowagi rynkowej* (ang. equilibrium price). Jeśli początkowa cena P_0 jest różna od ceny równowagi rynkowej, to $P_n > P_{eq}$ dla n parzystych i $P_n < P_{eq}$ dla n nieparzystych lub odwrotnie. Z równań opisujących model wynika, że podaż S_n dla $n \rightarrow \infty$ również dąży do punktu równowagi $S_{eq} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta + \delta}$, oscylując wokół niego.

Jeśli początkowa cena jest równa cenie równowagi rynkowej, to cena, popyt i podaż nie zmieniają się w czasie (*stan równowagi rynkowej*).

Przypadek cykliczny

Jeśli $\delta = \beta$ (popyt jest tak samo wrażliwy jak podaż na zmianę ceny), to mamy $P_n = P_0$ dla n parzystych i $P_n = P_1$ dla n nieparzystych. To samo zachodzi dla S_n . Jeśli początkowa cena jest różna od ceny równowagi rynkowej, to cena zmienia się cyklicznie z okresem 2. Jeśli początkowa cena jest równa cenie równowagi rynkowej, to cena, popyt i podaż nie zmieniają się w czasie.

Przypadek niestabilny (rozbieżny)

Jeśli $\beta < \delta$ (popyt jest mniej wrażliwy niż podaż na zmianę ceny) i początkowa cena jest różna od ceny równowagi rynkowej, to dla $n \rightarrow \infty$ mamy $|P_n| \rightarrow +\infty$, przy czym $P_{2n} \rightarrow +\infty$ i $P_{2n+1} \rightarrow -\infty$ lub odwrotnie. To samo zachodzi dla S_n . Wartości ceny i podaży przyjmują na przemian coraz większe i coraz mniejsze wartości, a po pewnym czasie wychodzą poza zakres „rozsądnych” warunków, np. stają się ujemne, co oznacza, że model przestaje opisywać realną sytuację.

Jeśli początkowa cena jest równa cenie równowagi rynkowej, to cena, popyt i podaż nie zmieniają się w czasie. Jest to jednak sytuacja teoretyczna, bo dowolnie małe zaburzenie tego stanu prowadzi do rozbieżnych fluktuacji opisanych powyżej.