

Analiza Matematyczna I

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład II

Uniwersytet Warszawski
semestr zimowy

Wstęp do Analizy

Kresy, wartość bezwzględna, potęgi i pierwiastki

Oznaczenia ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$)

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	<i>przedział otwarty o końcach a, b</i>
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	<i>przedział domknięty o końcach a, b</i>
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	<i>przedział prawostronnie otwarty (lewostronnie domknięty)</i>
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	<i>przedział lewostronnie otwarty (prawostronnie domknięty)</i>
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$	
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	

Kresy zbiorów w \mathbb{R}

Definicja. Niech A będzie niepustym podzbiorem \mathbb{R} . *Ograniczeniem górnym (dolnym)* zbioru A nazywamy każdą liczbę $y \in \mathbb{R}$, taką że $y \geq x$ ($y \leq x$) dla każdego $x \in A$. Zbiór A jest *ograniczony z góry (z dołu)*, jeśli ma ograniczenie górne (dolne). Zbiór *ograniczony* to zbiór ograniczony z góry i z dołu.

Istnienie kresu

Jeśli zbiór A jest ograniczony z góry, to ma najmniejsze ograniczenie górne. Tę liczbę nazywamy *kresem górnym* lub *supremum* zbioru A (ozn. $\sup A$). Podobnie, jeśli zbiór A jest ograniczony z dołu, to ma największe ograniczenie dolne. Tę liczbę nazywamy *kresem dolnym* lub *infimum* zbioru A (ozn. $\inf A$).

Uwaga. Jeśli A nie jest ograniczony z góry (z dołu), to piszemy $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$).

Wartość bezwzględna

Definicja. *Wartością bezwzględną* albo *modułem* liczby rzeczywistej x (ozn. $|x|$) nazywamy liczbę x w przypadku $x \geq 0$ i liczbę $-x$ w przypadku $x < 0$.

Uwaga. Geometrycznie, wartość bezwzględna x jest odległością punktu x od punktu 0 na osi liczbowej.

Podstawowe własności wartości bezwzględnej ($x, y \in \mathbb{R}$)

- $|x| \geq 0$ oraz $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Potęgi

Definicja. Jeśli $x \in \mathbb{R}$ (*podstawa*) i $n \in \mathbb{N}$ (*wykładnik*), to n -tą *potęgę* liczby x definiujemy jako

$$x^n = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ razy}}$$

Uwaga. Definicja indukcyjna to: $x^1 = x$, $x^{n+1} = x \cdot x^n$.

Definicja. Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Pierwiastki

Definicja pierwiastka

Dla $x \in \mathbb{R}$ takiego, że $x \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $y \geq 0$ taka, że $y^n = x$. Liczbę tę nazywamy n -tym *pierwiastkiem* z x (ozn. $x^{\frac{1}{n}}$ lub $\sqrt[n]{x}$). Możemy rozszerzyć tę definicję na przypadek, gdy $x < 0$ i n jest nieparzyste (wtedy $\sqrt[n]{x} < 0$).

Uwaga. Powyższe definicje pozwalają określić dowolną potęgę o podstawie dodatniej i wykładniku wymiernym (dla $x > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiujemy $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$).

Podstawowe własności potęgowania

Dla x, y, a, b takich, że odpowiednie potęgi są zdefiniowane, zachodzi

$$\begin{aligned}x^{a+b} &= x^a x^b \\(x^a)^b &= x^{ab} \\(xy)^a &= x^a y^a.\end{aligned}$$

Wielomiany

Definicja. *Wielomianem* zmiennej rzeczywistej x stopnia $n \in \mathbb{N}$ o współczynnikach rzeczywistych nazywamy wyrażenie postaci

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Pierwiastkiem* rzeczywistym tego wielomianu nazywamy każdą liczbę rzeczywistą x , dla której to wyrażenie jest równa 0.

Uwaga. Dwa wielomiany zmiennej x są równe, jeśli mają równe stopnie i współczynniki. Wielomiany możemy dodawać, odejmować i mnożyć, uzyskując inne wielomiany.

Definicja. Wielomian W jest podzielny przez wielomian V , jeśli $W = V \cdot U$, gdzie U jest pewnym wielomianem.

Uwaga. Stopień wielomianu W jest wtedy równy sumie stopni V i U .

Twierdzenie Bézouta

Liczba p jest pierwiastkiem wielomianu W zmiennej x wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W jest podzielny przez wielomian $x - p$.

Wniosek. *Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.*

Trójmian kwadratowy

Przykład. Wielomian $x^2 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Uwaga. Jeśli wielomian W jest podzielny przez wielomian $(x - p)^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to p nazywamy pierwiastkiem k -krotnym.

Definicja. *Trójmian kwadratowy* zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych to wielomian drugiego stopnia, czyli wyrażenie

$$ax^2 + bx + c$$

dla $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Definicja. *Wyróżnikiem* trójmianu nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$.

Twierdzenie.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Trójmian można wtedy przedstawić w postaci $a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty

$$x_1 = -\frac{b}{2a}.$$

Trójmian można wtedy przedstawić w postaci $a(x - x_1)^2$.

- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmian nie ma pierwiastków rzeczywistych.

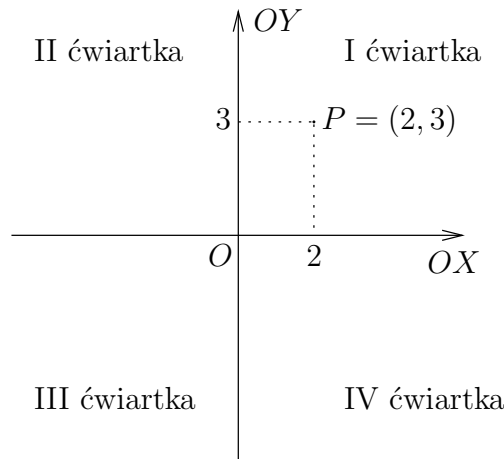
Wzory Viete'a

Jeśli x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $ax^2 + bx + c$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Kartezjański układ współrzędnych

Definicja. *Kartezjański układ współrzędnych* na płaszczyźnie jest określony w następujący sposób. Dane są dwie prostopadłe proste na płaszczyźnie – *oś odciętych* OX (pozioma) i *oś rzędnych* OY (pionowa), przecinające się w punkcie O (*początku* układu współrzędnych). Każdą z tych prostych utożsamiamy ze zbiorem liczb rzeczywistych, przy czym porządek rosnący na osi poziomej przebiega od lewej do prawej, a na osi pionowej — od dołu do góry. Każdemu punktowi P płaszczyzny są przyporządkowane dwie liczby (*współrzędne*) — *odcięta* (pierwsza współrzędna) i *rzędna* (druga współrzędna). Liczby te są wartościami odpowiadającymi rzutom prostopadłym punktu P na odpowiednie osie. Osie współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki — pierwszą jest złożona z punktów o obu współrzędnych dodatnich, a następne ponumerowane są przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



Rysunek 1: Kartezjański układ współrzędnych na płaszczyźnie

Uwaga. Kartezjański układ współrzędnych utożsamia płaszczyznę ze zbiorem $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Uwaga. Podobnie definiujemy kartezjański układ współrzędnych w przestrzeni utożsamiając ją ze zbiorem $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Uwaga. Współrzędne punktów w \mathbb{R}^2 będziemy najczęściej oznaczać przez (x, y) , a w \mathbb{R}^3 — przez (x, y, z) , pisząc

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \\ \mathbb{R}^3 &= \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Kąty

Definicja. *Kąt* na płaszczyźnie to suma dwóch półprostych (*ramion* kąta) mających wspólny początek (*wierzchołek* kąta) oraz jednego z dwóch obszarów wyciętych z płaszczyzny przez te półproste.

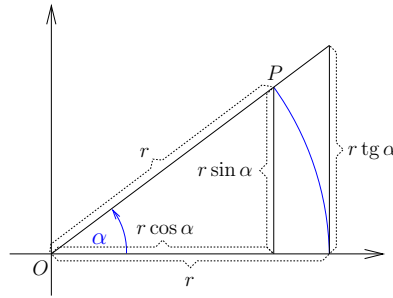
Kąt skierowany to kąt, w którym jest ustalona kolejność ramion. Pierwsze ramię nazywamy wtedy *początkowym*, a drugie *końcowym*.

Definicja. *Miarą łukową kąta* nazywamy stosunek długości łuku okręgu opartego na tym kącie do promienia tego okręgu (łuk okręgu oparty na kącie to część okręgu o środku w wierzchołku kąta zawarta w tym kącie). Jednostkę miary łukowej nazywa się *radianem*.

Przykład. Miara łukowa kąta pełnego (360°) jest równa 2π . Miara łukowa kąta prostego (90°) jest równa $\frac{\pi}{2}$.

Uwaga. Długość łuku można zdefiniować, przybliżając go łamanymi wpisanymi w ten łuk.

Definicja. Miarą łukową kąta skierowanego nazywamy miarę tego kąta, jeśli przy przejściu od ramienia początkowego do końcowego wewnątrz kąta poruszamy się przeciwnie do ruchu wskazówki zegara (czyli zgodnie z ruchem od osi OX do osi OY w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych) oraz minus miarę tego kąta — w przeciwnym przypadku.



Rysunek 2: Definicje funkcji trygonometrycznych.

Trygonometria

Funkcje trygonometryczne

Definicja. Niech $\alpha \in [0, 2\pi]$. Jeśli kąt skierowany o mierze łukowej α ma wierzchołek w początku układu współrzędnych i pierwsze ramie leżące na dodatniej półosi osi OX , to *sinusem* kąta α (ozn. $\sin \alpha$) nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu $P \neq O$ leżącego na drugim ramieniu kąta do długości odcinka \overline{OP} .

Cosinusem kąta α (ozn. $\cos \alpha$) nazywamy stosunek odciętej punktu P do długości odcinka \overline{OP} .

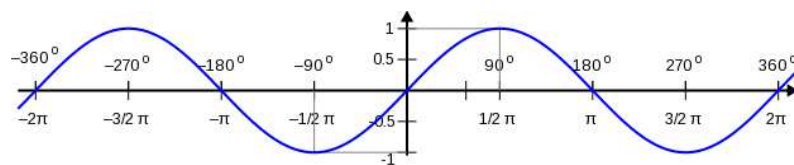
Jeśli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$, to *tangensem* kąta α (ozn. $\operatorname{tg} \alpha$) nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu.

Jeśli $\alpha \neq k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$, to *cotangensem* kąta α (ozn. $\operatorname{ctg} \alpha$) nazywamy stosunek odciętej punktu P do rzędnej tego punktu.

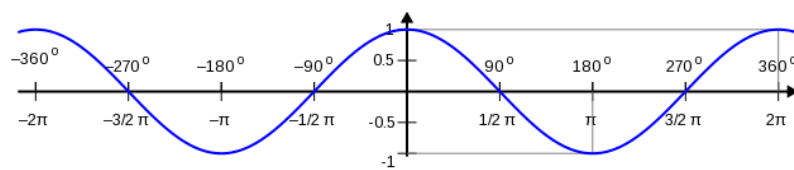
Dla dowolnego kąta $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcje \sin , \cos , tg , ctg określamy jako odpowiednie funkcje kąta β , gdzie $\beta \in [0, 2\pi]$ i $\alpha = \beta + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład.

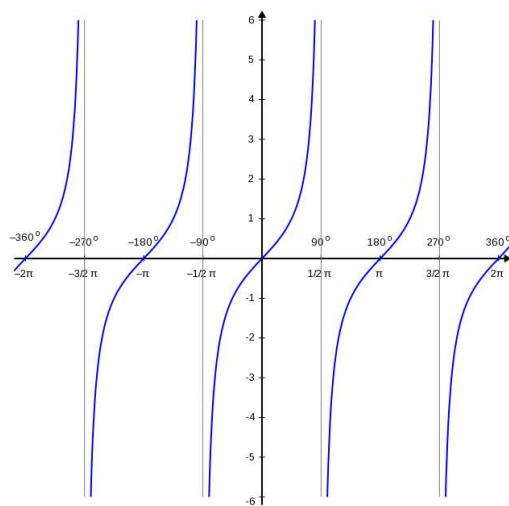
$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{6} &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, & \sin \frac{\pi}{4} &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin \frac{\pi}{3} &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} &= \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, & \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1, & \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} &= \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$



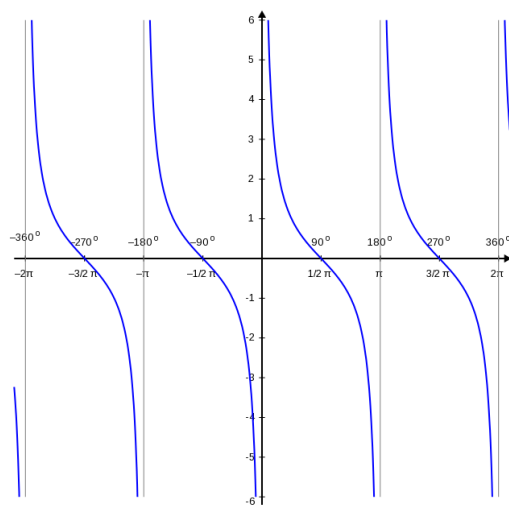
Rysunek 3: Wykres funkcji sin.



Rysunek 4: Wykres funkcji cos.



Rysunek 5: Wykres funkcji tg.



Rysunek 6: Wykres funkcji ctg .

Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{array}{ll}
 \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\
 \sin \alpha = \sin(\alpha + 2k\pi) & \cos \alpha = \cos(\alpha + 2k\pi) \\
 \text{tg } \alpha = \text{tg}(\alpha + k\pi) & \text{ctg } \alpha = \text{ctg}(\alpha + k\pi) \\
 \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\
 \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha & \text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg } \alpha
 \end{array}$$

Wzór na jedynkę trygonometryczną

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Dowód. Wynika z twierdzenia Pitagorasa.

□

Funkcje trygonometryczne sumy kątów

$$\begin{array}{l}
 \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta} \\
 \text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg } \alpha \text{ctg } \beta - 1}{\text{ctg } \beta + \text{ctg } \alpha}
 \end{array}$$

Wniosek.

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Niektóre wzory redukcyjne

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin (\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$