

Analiza Matematyczna I

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład XIII

Uniwersytet Warszawski
semestr zimowy

Rachunek różniczkowy

Wzór Taylora

N -ta pochodna funkcji

Definicja (indukcyjna)

Mówimy, że dla $n \in \mathbb{N}$ funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest *n -krotnie różniczkowalna* w punkcie $x \in (a, b)$ (czyli istnieje w tym punkcie n -ta pochodna $f^{(n)}(x)$), jeśli $(n-1)$ -sza pochodna $f^{(n-1)}$ istnieje w pewnym otoczeniu x i jest funkcją różniczkowalną. Wtedy definiujemy $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

Uwaga. Przyjmujemy $f^{(0)} = f$. Piszemy zwykle $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$. Jeśli f ma n -tą pochodną dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to mówimy, że f jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy.

Przykłady

- Dla $f(x) = x^2$ mamy
 $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f^{(n)}(x) = 0$ dla $n > 2$.
- Dla $f(x) = \sin x$ mamy
 $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ i $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ dla $n \geq 0$.

Definicja. Mówimy, że $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest *klasy C^n* , jeśli f jest n -krotnie różniczkowalna oraz n -ta pochodna $f^{(n)}$ jest ciągła.

Jeśli f nieskończenie wiele razy różniczkowalna, to mówimy, że f jest *klasy C^∞* .

Symbol C^0 oznacza klasę funkcji ciągłych.

Przykład. Niech f będzie wielomianem stopnia n , czyli

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

dla $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $k = 0, \dots, n$ mamy $f^{(k)}(0) = k!a_k$, więc

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Wzór Taylora z resztą w postaci Peano

Twierdzenie. Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją n -krotnie różniczkowalną w punkcie $x_0 \in (a, b)$. Wtedy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

gdzie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Uwaga. Wielomian $T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ nazywa się n -tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie x_0 , a funkcja $r_n(x)$ nazywa się n -tą resztą w punkcie x_0 .

Uwagi

- Reszta $r_n(x)$ zależy również od punktu x_0 .
- Wielomian $T_n(x)$ ma w punkcie x_0 te same pochodne do rzędu n , co funkcja $f(x)$, to znaczy $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ dla $k = 0, \dots, n$.
- Wielomian $T_n(x)$ jest najlepszym przybliżeniem funkcji $f(x)$ w otoczeniu punktu x_0 spośród wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej n (to znaczy jest jedynym wielomianem $W(x)$ stopnia co najwyżej n , dla którego $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - W(x)}{(x - x_0)^n} = 0$).

Wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a

Twierdzenie. Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją $(n + 1)$ -krotnie różniczkowalną. Wtedy n -ta reszta Taylora funkcji f w punkcie x ma postać

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

gdzie y leży pomiędzy x i x_0 .

Uwagi

- Punkt y zależy od x_0 , x i n .
- Dla $n = 0$ to twierdzenie jest twierdzeniem Lagrange'a.

Przykłady n -tych rozwinięć Taylora (w punkcie $x_0 = 0$)

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$
- $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + r_{2n+1}(x),$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + r_{2n}(x),$
- $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + r_n(x),$
- $(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + r_n(x),$ $a \in \mathbb{R},$

gdzie $r_n(x)$ jest n -tą resztą Taylora.

Uwaga. Dla $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ określamy $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$

Warunki istnienia ekstremów lokalnych

Twierdzenie. Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in (a, b)$. Załóżmy, że f jest n -krotnie różniczkowalna w punkcie x_0 i $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Wtedy:

- Jeżeli n jest nieparzyste, to f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie x_0 .
- Jeżeli n jest parzyste, to:
 - f ma w punkcie x_0 lokalne maksimum dla $f^{(n)}(x_0) < 0$,
 - f ma w punkcie x_0 lokalne minimum dla $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Idea dowodu

Ze wzoru Taylora wynika, że $f(x) - f(x_0)$ ma taki sam znak, jak $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$. \square

Rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy

Szeregi Taylora

Definicja ($r_n(x)$ oznacza n -tą resztę Taylora funkcji f w punkcie x). Jeśli $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy oraz $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ dla każdego x w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in (a, b)$, to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Mówimy wtedy, że f rozwija się w *szereg Taylora* w otoczeniu punktu x_0 .

Uwaga. Nie wszystkie funkcje nieskończenie wiele razy różniczkowalne rozwijają się w szereg Taylora.

Szeregi potęgowe (przypomnienie)

Definicja. Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

dla pewnych $a_n, x \in \mathbb{R}$, przy konwencji $0^0 = 1$. Szereg potęgowy traktujemy jako funkcję zmiennej x przy ustalonych a_n, x_0 .

Twierdzenie. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym. Wtedy istnieje $r \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, zwane promieniem zbieżności tego szeregu, takie że szereg jest zbieżny dla każdego $|x - x_0| < r$, a rozbieżny dla każdego $|x - x_0| > r$. Przedział $(x_0 - r, x_0 + r)$ nazywa się przedziałem zbieżności.

Twierdzenie. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym. Jeśli istnieje (skończona lub nieskończona) granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$, to promień zbieżności tego szeregu jest równy $\frac{1}{g}$ (przy konwencji $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Podobnie, jeśli $a_n \neq 0$ i istnieje (skończona lub nieskończona) granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, to promień zbieżności tego szeregu jest równy $\frac{1}{g}$.

Twierdzenie. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym o niezerowym promieniu zbieżności r . Wtedy funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

jest różniczkowalna w przedziale zbieżności $(x_0 - r, x_0 + r)$ i

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1},$$

przy czym promień zbieżności tego szeregu potęgowego również wynosi r .

Wniosek. Każda funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

o niezerowym promieniu zbieżności r jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$, a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest jej szeregiem Taylora, czyli

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Przykłady funkcji, które rozwijają się w szeregi potęgowe

$$\bullet e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\bullet \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\bullet \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\bullet \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\bullet (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad a \in \mathbb{R}, \quad -1 < x < 1.$$