

Analiza Matematyczna I

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład I

Uniwersytet Warszawski
semestr zimowy

Regulamin

Regulamin — Sylabus

1. Wykład prowadzony jest równolegle w dwóch terminach zgodnie z planem podanym w USOSie. Każdy student wybiera odpowiadający mu termin według własnego uznania.
2. Ćwiczenia odbywają się dwa razy w tygodniu. Uczestnictwo w ćwiczeniach jest obowiązkowe. W przypadku co najmniej czterech nieusprawiedliwionych nieobecności na ćwiczeniach w trakcie semestru, student traci prawo do zaliczania przedmiotu (nie jest klasyfikowany).
3. Ocena końcowa z przedmiotu obliczana jest na podstawie sumy punktów uzyskanych w ciągu semestru (max. 100p). Punkty można uzyskać na ćwiczeniach (max. 20p), na dwóch wspólnych kolokwiah w trakcie semestru (max. $15+15=30$ p) i na egzaminie po zakończeniu semestru (max. 50p). Pozytywną ocenę końcową z przedmiotu mogą otrzymać tylko osoby, które uzyskały co najmniej 15p z egzaminu.
4. Punkty z ćwiczeń można uzyskać na kartkówkach przeprowadzanych w poszczególnych grupach oraz za aktywność na ćwiczeniach. W trakcie semestru odbędzie się 8 kartkówek (co ok. dwa tygodnie, w trakcie ćwiczeń) sprawdzających wiedzę z bieżącego materiału. Za każdą kartkówkę można uzyskać max. 2p. Punkty za aktywność (max. 4p w semestrze) przyznaje prowadzący ćwiczenia według własnej oceny.
5. Wspólne kolokwia w trakcie semestru (poza godzinami ćwiczeń) polegają na pisemnym rozwiązaniu pewnej liczby zadań z dotychczasowego materiału przerabianego na wykładzie i ćwiczeniach.

6. Po zakończeniu zajęć w semestrze (przed sesją egzaminacyjną) student otrzymuje ocenę z ćwiczeń, obliczaną na podstawie sumy punktów uzyskanych na ćwiczeniach i wspólnych kolokwiah (max. $20+30=50p$), wg następującej skali: dst = 20p, dst+ = 25p, db = 30p, db+ = 35p, bdb = 40p, cel = 45p.
7. Aby przystąpić do egzaminu, student musi zaliczyć ćwiczenia, tzn. uzyskać z ćwiczeń ocenę co najmniej dst (20p).
8. Egzamin jest przeprowadzany w dwóch terminach: w sesji egzaminacyjnej głównej i poprawkowej. Egzamin jest pisemny i polega na rozwiązaniu pewnej liczby zadań z całości materiału przerabianego w czasie semestru na wykładzie i ćwiczeniach. Zasady obliczania oceny końcowej są takie same w każdym z dwóch terminów egzaminu.
9. W przypadku nieuzyskania zaliczenia ćwiczeń, student ma możliwość poprawkowego zaliczenia (o formie i terminie decyduje prowadzący ćwiczenia). W przypadku uzyskania takiego zaliczenia, student może przystąpić do egzaminu w drugim terminie, jednak z tą samą liczbą punktów za ćwiczenia, którą uzyskał poprzednio.
10. Nieusprawiedliwiona nieobecność na egzaminie powoduje utratę tego terminu egzaminu i skutkuje brakiem oceny.
11. W przypadku usprawiedliwionej nieobecności na sprawdzianie (odpowiednio kartkówce, kolokwium lub egzaminie) spowodowanej ważnymi okolicznościami student ma prawo zaliczenia tego sprawdzianu w dodatkowym terminie. W tym celu student powinien złożyć wniosek o usprawiedliwienie (odpowiednio do prowadzącego ćwiczenia, prowadzącego wykład lub Dziekana WNE). W przypadku niezłożenia takiego wniosku, student traci prawo do zaliczenia tego sprawdzianu w dodatkowym terminie. Wg Szczegółowych Zasad Studiowania na WNE, wniosek o usprawiedliwienie wraz z odpowiednią dokumentacją należy złożyć nie później niż 7 dni od daty egzaminu lub 7 dni od ustania przyczyn, które powodowały nieobecność. Dodatkowe terminy zaliczenia kartkówki i kolokwium są ustalane i przeprowadzane przez prowadzących ćwiczenia. Dodatkowy termin egzaminu przypada w następnej sesji egzaminacyjnej lub jest ustalany przez Dziekana WNE.
12. Wszystkie powyższe zasady dotyczą również studentów WNE wyższych lat z zaliczeniem warunkowym.
13. Dla studentów I roku MSEM, którzy chcą przenieść się na WNE w trakcie semestru, nie ma możliwości przeliczenia punktów i ocen uzyskanych podczas kolokwium i sprawdzianów na wydziale MIM na punkty za ćwiczenia i kolokwia na WNE.
14. Prowadzący wykład i ćwiczenia są dostępni dla studentów w trakcie konsultacji (1,5 godz. tygodniowo, terminy podane w USOS). Korespondencja elektroniczna powinna być kierowana z oficjalnego adresu poczty elektronicznej UW. Nie gwarantujemy odpowiedzi i nadania biegu sprawom przekazywanym przez studentów wyłącznie za pomocą poczty elektronicznej.

15. W sprawach nieujętych w powyższym regulaminie obowiązuje Regulamin Studiów na Uniwersytecie Warszawskim oraz Szczegółowe Zasady Studiowania na WNE UW, umieszczone na stronie internetowej WNE.

Regulamin oraz bieżące ogłoszenia dostępne będą na stronie

<http://www.mimuw.edu.pl/~tkali>

Wprowadzenie

Elementy logiki matematycznej

Zdania logiczne

Zdaniem logicznym nazywamy zdanie oznajmujące, któremu można jednoznacznie przypisać jedną z dwóch *wartości logicznych* — prawdę lub fałsz (oznaczane często odpowiednio przez 1 i 0).

Przykłady zdań logicznych

„Na wykład z Analizy jest zapisanych 270 studentów.”

„Każdy student jest człowiekiem.”

„Istnieje liczba parzysta podzielna przez 6.”

„Istnieje liczba nieparzysta podzielna przez 6.”

„Dla każdej liczby dodatniej x , $x > -1$.”

Przykłady wypowiedzi, które nie są zdaniami logicznymi

„Która godzina?”

„Proszę wyjść!”

„ $x > -1$.”

„To zdanie jest fałszywe.”

Spójniki logiczne

Zdania logiczne możemy łączyć za pomocą *spójników logicznych*, tworząc nowe (złożone) zdania logiczne.

Definicja (p, q zdania logiczne). *Alternatywa* $p \vee q$ (p lub q) jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedno ze zdań p, q jest prawdziwe.

Koniunkcja $p \wedge q$ (p i q) jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania p, q są prawdziwe.

Negacja $\neg p$ (*nieprawda, że* p) jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy p jest fałszywe. (Inne oznaczenie negacji to $\sim p$.)

Implikacja $p \Rightarrow q$ (*jeśli* p , *to* q) jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy p jest prawdziwe, a q fałszywe.

Równoważność $p \iff q$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy p i q mają tę samą wartość logiczną.

Przykłady

Każdy student jest człowiekiem i każdy człowiek jest studentem.

Istnieje parzysta liczba podzielna przez 6 lub istnieje nieparzysta liczba podzielna przez 6.

Jeśli x jest liczbą rzeczywistą i $x > 1$, to $x > 0$.

Uwaga. Zdanie

jeśli $1 > 2$, to $2 \cdot 2 = 5$

jest prawdziwe!

Definicja. *Tautologia* (prawo rachunku zdań) to zdanie logiczne złożone z pewnych wyjściowych zdań, które jest zawsze prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zdań wyjściowych.

Przykładowe prawa rachunku zdań

$p \vee \neg p$	prawo wyłączonego środka
$\neg(p \wedge \neg p)$	prawo sprzeczności
$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	prawo Dunsza Szkota
$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	prawo odrywania (<i>modus ponendo ponens</i>)
$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	prawo sylogizmu
$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p$	prawo redukcji do absurdu
$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$	prawa de Morgana
$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$	

Sprawdzanie tautologii metodą zero-jedynkową

Metoda polega na podstawieniu wszystkich możliwych wartości logicznych zdań wyjściowych i sprawdzeniu, czy wyrażenie złożone ma zawsze wartość logiczną 1 (prawda).

Przykład (sprawdzenie, że prawo odrywania jest tautologią).

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Funkcje zdaniowe i kwantyfikatory

Definicja. *Kwantyfikator ogólny* (ozn. \forall od ang. *All*) to wyrażenie „dla każdego” (przyp. ogólny). *Kwantyfikator szczegółowy* (ozn. \exists od ang. *Exists*) to wyrażenie „istnieje” (przyp. szczególny). Używany jest także symbol $\exists!$ oznaczający „istnieje dokładnie jeden”.

Definicja. *Funkcja zdaniowa* (*forma zdaniowa*, *predykat*) to wyrażenie zawierające zmienne wolne (czyli symbole mogące przyjmować różne wartości z pewnego zbioru), które staje się zdaniem logicznym, jeśli podstawimy za te zmienne pewne ustalone wartości lub poprzedzimy to wyrażenie kwantyfikatorami odnoszącymi się do wszystkich tych zmiennych.

Przykład. Niech x zmienna przyjmująca wartości w zbiorze liczb rzeczywistych.

$x > 2$	funkcja zdaniowa
$3 > 2, 0 > 2, \forall x x > 2, \exists x x > 2$	zdania logiczne

Zaprzeczanie zdań z kwantyfikatorami — prawa de Morgana

Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją zdaniową zawierającą zmienną x . Wtedy:

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \varphi(x)) &\iff \exists x \neg\varphi(x), \\ \neg(\exists x \varphi(x)) &\iff \forall x \neg\varphi(x).\end{aligned}$$

Przykłady

$$\neg(\text{wszystkie liczby są ujemne}) \iff \text{istnieje liczba nieujemna.} \quad \neg(\exists x x^2 = -1) \iff \forall x x^2 \neq -1.$$

Rachunek zbiorów

Podstawowe pojęcia i oznaczenia w rachunku zbiorów

Przyjmujemy intuicyjne pojęcie *zbioru* i relacji *należenia* (bycia *elementem* zbioru). Oznaczamy $x \in A$ (element x należy do zbioru A). Zamiast A można napisać $\{x : x \in A\}$.

Standardowe oznaczenia w rachunku zbiorów

$A \subset B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$	zbiór A zawiera się w zbiorze B
$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$	suma zbiorów A i B
$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	iloczyn (przecięcie, część wspólna) zbiorów A i B
$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	różnica zbiorów A i B
$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x : \exists t \in T x \in A_t\}$	uogólniona suma zbiorów
$\bigcap_{t \in T} A_t = \{x : \forall t \in T x \in A_t\}$	uogólniony iloczyn zbiorów

Definicja. *Iloczyn kartezjański* zbiorów A i B (ozn. $A \times B$), to zbiór wszystkich uporządkowanych par (a, b) , takich że $a \in A$ i $b \in B$.

Przyjmujemy również intuicyjne (szkolne) pojęcia najważniejszych rodzajów liczb oraz ich podstawowe własności.

Oznaczenia

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	liczby naturalne
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	liczby całkowite
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$	liczby wymierne
\mathbb{R}	liczby rzeczywiste

Indukcja matematyczna

Zasada indukcji (jedna z kilku równoważnych wersji)

Niech \mathcal{W} będzie pewną własnością dotyczącą liczb naturalnych. Załóżmy, że:

1. Liczba 1 ma własność \mathcal{W} .
2. Dla każdej liczby naturalnej n , jeśli n ma własność \mathcal{W} , to $n + 1$ też ma własność \mathcal{W} .

Wtedy wszystkie liczby naturalne mają własność \mathcal{W} .

Uwaga. W pierwszym warunku zasady indukcji możemy zastąpić liczbę 1 inną liczbą naturalną k . Wtedy ta zasada orzeka, że własność \mathcal{W} zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych większych lub równych k .

Nierówność Bernoulliego

Przykład dowodu indukcyjnego

Nierówność Bernoulliego

Niech $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Wtedy:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Uwaga (wynika z dowodu). Jeśli $n > 1$ i $x \neq 0$, to nierówność Bernoulliego jest ostra.

Dowód. Korzystamy z zasady indukcji. Sprawdzamy najpierw, czy wzór jest prawdziwy dla $n = 1$.

$$(1 + x)^1 = 1 + x,$$

więc nierówność jest oczywiście spełniona.

Następnie zakładamy, że nierówność zachodzi dla pewnej liczby naturalnej n i sprawdzamy, że zachodzi również dla liczby $n + 1$.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\stackrel{\text{zał. ind.}}{\geq} (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

□

Dwumian Newtona

Dwumian Newtona

Indukcyjna definicja symbolu $n!$ (n *silnia*) dla $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

$0! = 1$, $(n+1)! = n!(n+1)$.

Definicja. Niech $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tak że $k \leq n$. Wyrażenie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ nazywamy *symbolem Newtona*.

Dwumian Newtona

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Dowód wzoru na rozwinięcie dwumianu Newtona

Podobnie jak poprzednio, używamy zasady indukcji. Sprawdzamy najpierw, czy wzór zachodzi dla $n = 1$.

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1.$$

Następnie zakładając prawdziwość wzoru pewnego naturalnego n , sprawdzamy prawdziwość wzoru dla $n+1$.

Będziemy korzystać z następującego lematu (prosty rachunkowy dowód pomijamy).

Lemat. Dla każdych $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, takich że $k < n$ zachodzi

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\stackrel{\text{zał. ind.}}{=} (a+b) \left(\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \right) \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^1 b^n \\
&\quad + \binom{n}{0} a^n b^1 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right) a^n b^1 + \dots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right) a^1 b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&\stackrel{\text{Lemat}}{=} \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \dots + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dowód został zakończony.