

Analiza Matematyczna I

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład X

Uniwersytet Warszawski
semestr zimowy

Granica i ciągłość funkcji

Funkcje ciągłe

Ciągłość funkcji odwrotnej

Twierdzenie. *Jeśli $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ jest różnowartościowa i ciągła, gdzie P przedział w \mathbb{R} , to funkcja odwrotna f^{-1} jest określona i ciągła w przedziale $f(P)$. Co więcej, funkcje f i f^{-1} są ściśle monotoniczne.*

Przykłady

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Wtedy $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \ln y$, $f^{-1}((0, +\infty)) = \mathbb{R}$.
- $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Wtedy $f((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = (-1, 1)$, $f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \arcsin y$, $f^{-1}((-1, 1)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$. Wtedy $f((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$, $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \arctan y$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Warunek Lipschitza

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $A \subset \mathbb{R}$ spełnia *warunek Lipschitza* ze stałą $L > 0$, jeśli dla każdego $x, y \in A$ zachodzi

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

Dowód. Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $|\sin x - \sin y| = \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{|x-y|}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-y|}{2} = |x-y|$. \square

Twierdzenie. *Jeśli funkcja spełnia warunek Lipschitza, to jest ciągła.*

Dowód. Dla $\varepsilon > 0$ określamy $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, gdzie L jest stałą Lipschitza funkcji f . Wtedy, dla każdego a, x z dziedziny funkcji, jeśli $|x - a| < \delta$, to

$$|f(x) - f(a)| \leq L|x - a| < L\delta = \varepsilon,$$

więc jest spełniona definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji. \square

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ jest ciągła, ale nie spełnia warunku Lipschitza.

Dowód. Załóżmy, że f spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$. Wtedy dla każdego $x > 0$ mamy

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| \leq L|x - 0|,$$

czyli $\sqrt[3]{x} \leq Lx$. Wynika stąd $x \leq L^3 x^3$, co daje

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{L^3}}$$

dla każdego $x > 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że f nie spełnia warunku Lipschitza. \square

Twierdzenia o punkcie stałym

Definicja. *Punktem stałym funkcji $f : A \rightarrow A$ nazywamy punkt $x \in A$, dla którego $f(x) = x$.*

Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym

Jeśli $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ jest ciągła, to f ma punkt stały.

Dowód. Niech $g(x) = f(x) - x$ dla $x \in [a, b]$. Zauważmy, że funkcja g jest ciągła oraz $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$. Podobnie, $g(b) \leq 0$. Jeśli $g(a) = 0$ lub $g(b) = 0$, to znaczy że $f(a) = a$ lub $f(b) = b$, więc f ma punkt stały. Pozostał zatem przypadek, gdy $g(a) > 0$, $g(b) < 0$. Wtedy, z własności Darboux, istnieje $x \in (a, b)$, takie że $g(x) = 0$, czyli $f(x) = x$, więc x jest punktem stałym dla f . \square

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Jeśli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lub $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L < 1$, to f ma dokładnie jeden punkt stały.

Uwaga. Oba powyższe twierdzenia są prawdziwe w daleko ogólniejszych sytuacjach i są używane w wielu dziedzinach matematyki przy dowodach istnienia różnych obiektów.

Przykład. Funkcja $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{2}x(1 - x)$ jest ciągła i spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L < 1$, ale nie ma punktu stałego.

Rachunek różniczkowy

Pochodna funkcji

Pojęcie pochodnej funkcji w punkcie

Intuicyjnie, pochodna opisuje, jak szybko zmienia się wartość danej funkcji przy zmianie argumentu.

Interpretacja fizyczna pochodnej — prędkość chwilowa

Rozważmy poruszające się ciało punktowe, którego położenie w chwili t opisuje funkcja $S(t)$. W pewnej chwili t_0 ciało znajduje się w położeniu $S(t_0)$, a potem przez czas Δt przebywa drogę ΔS . *Prędkość średnia* tego ciała między chwilą t_0 a $t_0 + \Delta t$ jest równa $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. *Prędkość chwilowa* v w chwili t_0 to granica prędkości średnich, gdy czas Δt dąży do 0, tzn.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

Jest to pochodna funkcji $S(t)$ w chwili t_0 .

Definicja pochodnej

Definicja. Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ i niech $x \in (a, b)$. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna* w punkcie x , jeśli istnieje (skończona) granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Granice tę nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x i oznaczamy $f'(x)$ lub $\frac{df}{dx}(x)$. Iloraz $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nazywamy *ilorazem różnicowym*.

Uwaga. Dwa powyższe oznaczenia pochodzą, odpowiednio, od Izaaka Newtona i Gotfryda Leibniza, którzy stworzyli podstawy rachunku różniczkowego i całkowego w II poł. XVII w.

Interpretacja geometryczna pochodnej

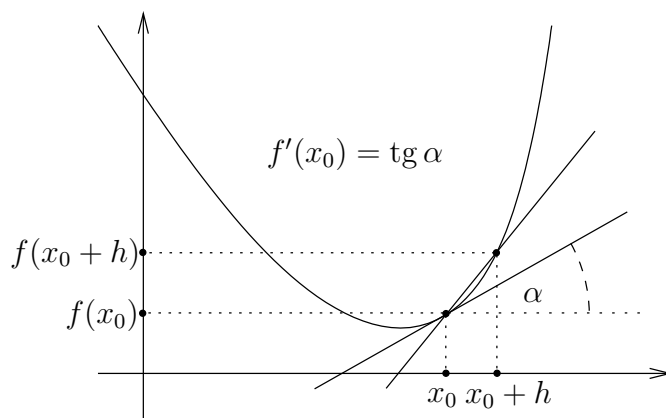
Styczna do wykresu funkcji

Pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest granicznym współczynnikiem nachylenia siecznej wykresu $y = f(x)$, która przecina wykres w punkcie $(x_0, f(x_0))$, gdy drugi punkt przecięcia dąży do $(x_0, f(x_0))$.

Innymi słowy, $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Zatem równanie tej stycznej ma postać

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



Definicja. Mówimy, że funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in (a, b)$.

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ jest różniczkowalna i $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dowód.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n}h^{n-1} \right) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Przykład. $\sin' x = \cos x$.

Dowód.

$$\begin{aligned} \sin' x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) = \cos x. \end{aligned}$$

□

Przykład. W ekonomii *koszt krańcowy (marginalny)* to pochodna całkowitego kosztu ponoszonego przez producenta jako funkcji wielkości produkcji.