

Analiza Matematyczna I

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład XI

Uniwersytet Warszawski
semestr zimowy

Rachunek różniczkowy

Pochodna funkcji

Pochodne funkcji elementarnych

$f(x) = c, c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = a^x, a > 0$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Twierdzenie. *Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x , to jest ciągła w tym punkcie.*

Twierdzenie (Własności arytmetyczne pochodnej). *Jeśli f, g różniczkowalne w punkcie x , to:*

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$
- $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x),$
- $(cf)'(x) = cf'(x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R},$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad (\text{reguła Leibniza})$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{jeśli } g(x) \neq 0.$

Twierdzenie (Reguła łańcuchowa). *Jeśli funkcja f jest określona w otoczeniu punktu x i różniczkowalna w punkcie x , a funkcja g określona w otoczeniu punktu $f(x)$ i różniczkowalna w punkcie $f(x)$, to*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Przykład. $(x^x)' = x^x(1 + \ln x) \quad \text{dla } x > 0.$

Dowód. $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + x \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1).$ □

Twierdzenie (Różniczkowalność funkcji odwrotnej). *Jeśli $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różnowartościowa oraz f różniczkowalna w punkcie $x \in (a, b)$, przy czym $f'(x) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $f(x)$ i*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Przykład. $(\arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$

Dowód.

$$\begin{aligned} (\arctg)'(x) &= \frac{1}{\operatorname{tg}'(\arctg x)} = \cos^2(\arctg x) \\ &= \frac{\cos^2(\arctg x)}{\sin^2(\arctg x) + \cos^2(\arctg x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\arctg x) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

□

Pochodne funkcji cyklometrycznych

$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctg x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ ma w punkcie $x \in [a, b]$ *pochodną prawostronną* (*lewostronną*), jeśli istnieje odpowiednia granica jednostronna

$$f'_{\pm}(x) = \lim_{h \rightarrow \pm 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Twierdzenie. Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x \in (a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją obie pochodne jednostronne $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ i są sobie równe (wtedy $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$).

Przykład. Funkcja $f(x) = |x|$ ma w $x = 0$ pochodne jednostronne, równe odpowiednio ± 1 , więc nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

Uwaga. Podobnie jak w przypadku granic, można zdefiniować pochodne i pochodne jednostronne niewłaściwe (równe $\pm\infty$), które istnieją, gdy iloraz różnicowy ma odpowiednią granicę lub granicę jednostronną równą $\pm\infty$.

Przykład. Funkcja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ma w punkcie $x = 0$ pochodną niewłaściwą równą $+\infty$.

Dowód. $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$ □

Uwaga. Jeżeli $f'(x_0) = \pm\infty$, to wykres funkcji f ma w punkcie $(x_0, f(x_0))$ styczną pionową (o równaniu $x = x_0$).

Ekstrema funkcji i twierdzenie o wartości średniej

Ekstrema lokalne

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ osiąga w punkcie $x_0 \in A$ *maksimum* (*minimum*) *lokalne*, jeśli istnieje $\delta > 0$, takie że dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $x \in A$ i $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Definicja. Mówimy, że ekstremum (tzn. maksimum lub minimum) jest *właściwe* (*silne*), jeśli odpowiednia nierówność pomiędzy wartościami funkcji jest ostra w przypadku $x \neq x_0$.

Twierdzenie. Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in (a, b)$. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód (przypadek maksimum). Dla pewnego $\delta > 0$ mamy $f(x) \leq f(x_0)$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Zatem $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$. Analogicznie, $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$.

W takim razie, musi zachodzić $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$. □

Uwaga. Nie jest prawdą, że jeśli $f'(x_0) = 0$, to f ma ekstremum lokalne w x_0 . Na przykład, dla $f(x) = x^3$ mamy $f'(0) = 0$, ale f jest ściśle rosnąca i nie ma żadnych ekstremów lokalnych.

Twierdzenie Rolle'a

Twierdzenie. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkowalną na (a, b) , taką że $f(a) = f(b)$. Wtedy istnieje takie $x_0 \in (a, b)$, że $f'(x_0) = 0$.

Dowód. Z twierdzenia Weierstrassa, f osiąga maksimum i minimum. Jeśli maksimum jest równe minimum, to znaczy, że f jest stała, więc $f'(x_0) = 0$ dla każdego $x_0 \in (a, b)$. Jeśli maksimum nie jest równe minimum, to przynajmniej jedno z nich jest przyjęte w pewnym punkcie $x_0 \in (a, b)$ (bo $f(a) = f(b)$). Z poprzedniego twierdzenia, $f'(x_0) = 0$. \square

Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej)

Twierdzenie. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkowalną na (a, b) . Wtedy istnieje takie $x_0 \in (a, b)$, że

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

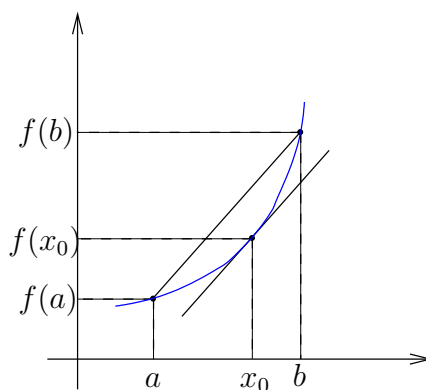
Dowód. Niech $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dla $x \in [a, b]$.

Wtedy $g(a) = g(b) = 0$, więc z twierdzenia Rolle'a, istnieje $x_0 \in (a, b)$, takie że $g'(x_0) = 0$.

Ale $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dla $x \in (a, b)$, co daje $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. \square

Geometryczna interpretacja twierdzenia Lagrange'a

Jeśli wykres funkcji różniczkowalnej na przedziale przecina pewną prostą L w dwóch różnych punktach, to w pewnym punkcie pośrednim styczna do wykresu jest równoległa do prostej L .



Twierdzenie. Niech $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, gdzie P dowolny przedział otwarty w \mathbb{R} . Wtedy, jeśli istnieje $L > 0$, takie że $|f'(x)| \leq L$ dla każdego $x \in P$, to f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L . Odwrotnie, jeśli f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L , to $|f'(x)| \leq L$ dla każdego $x \in P$.

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

Dowód. $|f'(x)| = \left| \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \right| = \frac{|1-x^2|}{(1+x^2)^2} \underset{\text{nier. trójkąta}}{\leq} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$

□

Pochodne a monotoniczność funkcji

Wniosek. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) . Wtedy:

- f jest rosnąca wtedy i tylko wtedy gdy $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$.
- f jest malejąca wtedy i tylko wtedy gdy $f'(x) \leq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$.
- f jest stała wtedy i tylko wtedy gdy $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Dowód. “ \Leftarrow ” Z twierdzenia Lagrange’a, dla każdego $x_1, x_2 \in [a, b]$ mamy $f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)(x_1 - x_2)$ dla pewnego x_0 .

“ \Rightarrow ” Z definicji pochodnej.

□

Uwagi

- Jeśli $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca).
- Nie jest prawdą, że jeśli f jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca), to $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) dla każdego $x \in (a, b)$. Na przykład, funkcja $f(x) = x^3$ jest ściśle rosnąca, ale $f'(0) = 0$.
- Jeśli f' jest funkcją ciągłą oraz dla pewnego x_0 mamy $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) to f jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca) w pewnym otoczeniu x_0 .

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ jest różniczkowalna oraz $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ dla każdego x z dziedziny funkcji, ale f nie jest malejąca (np. $-1 = f(-1) < f(1) = 1$). Przyczyną tego jest fakt, że dziedzina f nie jest przedziałem.