

Analiza Matematyczna I

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład V

Uniwersytet Warszawski
semestr zimowy

Ciągi

Granica ciągu

Ciągi liczb rzeczywistych

Definicja. Ciąg o wartościach w zbiorze X to funkcja $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ (każdej liczbie naturalnej n przypisujemy pewien element zbioru X). Zamiast $a(n)$ piszemy a_n . Element a_n nazywamy n -tym wyrazem ciągu.

Uwaga. Będziemy rozpatrywać ciągi o wartościach rzeczywistych, np. $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = n$, $a_n = 0$.

Definicja. Mówimy, że pewna własność \mathcal{W} zachodzi dla *dostatecznie dużych* liczb naturalnych n , jeśli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że \mathcal{W} zachodzi dla każdego naturalnego $n > n_0$. W odniesieniu do ciągu a_n mówimy w tym przypadku, że \mathcal{W} zachodzi dla *prawie wszystkich* wyrazów ciągu a_n .

Definicja. • Ciąg a_n jest *ograniczony z góry (z dołu)*, jeśli istnieje $M \in \mathbb{R}$, takie że $a_n < M$ ($a_n > M$) dla każdego n .

- Ciąg a_n jest *ograniczony*, jeśli jest ograniczony z góry i z dołu, czyli istnieje $M > 0$, takie że $|a_n| < M$ dla każdego n .
- Ciąg a_n jest *rosnący (ściśle rosnący)*, jeśli $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} > a_n$) dla każdego n .
- Ciąg a_n jest *malejący (ściśle malejący)*, jeśli $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} < a_n$) dla każdego n .
- Ciągi rosnące lub malejące nazywamy *monotonicznymi*.

Granica ciągu

Definicja. Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granica ciągu* a_n , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ zachodzi dla dostatecznie dużych n .

Mówimy wtedy, że ciąg zbiega (jest zbieżny) do g i piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad \text{lub} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g.$$

Innymi słowy,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_0} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Uwagi

- Granica ciągu (jeśli istnieje) jest wyznaczona jednoznacznie.
- Zmiana skończonej liczby wyrazów ciągu nie ma wpływu na istnienie i wartość granicy.

Przykład. Pokażemy, że granicą ciągu $a_n = \frac{n+1}{n}$ jest 1.

Ustalamy dowolne $\varepsilon > 0$ i sprawdzamy, dla jakich n zachodzi nierówność $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Nierówność ta ma postać $|\frac{n+1}{n} - 1| < \varepsilon$, co jest równoważne $\frac{1}{n} < \varepsilon$,

a to zachodzi dla każdego $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (czyli dla dostatecznie dużych n).

Zatem, granicą ciągu $a_n = \frac{n+1}{n}$ jest 1.

W ten sam sposób pokazujemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Arytmetyczne własności granicy ciągu

Twierdzenie. Załóżmy, że ciągi a_n i b_n są zbieżne. Wtedy

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ (o ile $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$).

Przykład. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{7n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}}{7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{7}.$

Stwierdzenie. Jeśli ciągi a_n i b_n są zbieżne i $a_n \leq b_n$ dla dostatecznie dużych n , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

W szczególności, jeśli a_n jest zbieżny i $a_n \leq a$ ($a_n \geq a$) dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a$).

Uwaga. Z tego, że $a_n < b_n$ nie wynika $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Np. $\frac{1}{n} > 0$, ale $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie. *Jeśli ciągi a_n i b_n są zbieżne, $a_n \leq c_n \leq b_n$ dla dostatecznie dużych n oraz*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

to ciąg c_n też jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Przykłady pewnych granic

- $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, gdzie $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + aq + aq^2 + \dots + aq^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$, gdzie $a, q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$, $a, q \in \mathbb{R}$, $|q| > 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_q n}{n^a} = 0$, $a, q \in \mathbb{R}$, $q > 0$, $q \neq 1$, $a > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ciągi ograniczone i monotoniczne

Stwierdzenie. *Jeśli ciąg a_n zbiega do 0, a ciąg b_n jest ograniczony, to ciąg $a_n b_n$ zbiega do 0.*

Dowód. Z założenia, $|b_n| < M$ dla pewnego $M > 0$, więc

$$0 \leq |a_n b_n| \leq M |a_n|.$$

Ponieważ ciąg $M|a_n|$ dąży do 0, to (z twierdzenia o trzech ciągach) ciąg $|a_n b_n|$ również dąży do 0, co jest równoważne temu, że ciąg $a_n b_n$ dąży do 0. \square

Przykład. Ciąg $\frac{1}{n}$ zbiega do 0, a ciąg $\sin n$ jest ograniczony ($|\sin n| \leq 1$), więc ciąg $\frac{\sin n}{n}$ dąży do 0.

Stwierdzenie. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Uwaga. Nie każdy ciąg ograniczony jest zbieżny.

Np. $a_n = (-1)^n$ jest ograniczony, ale nie ma granicy.

Twierdzenie. *Każdy ciąg monotoniczny (dla dostatecznie dużych n) i ograniczony jest zbieżny.*

Przykład (przypomnienie). Ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ściśle rosnący i ograniczony, więc jest zbieżny (do liczby Eulera $e \approx 2,7$).

Ogólniej, ciąg $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ dla ustalonego $x \in \mathbb{R}$ jest ściśle rosnący dla dostatecznie dużych n i ograniczony, więc jest zbieżny (do e^x).

Podciągi

Definicja. *Podciągiem ciągu a_n nazywamy ciąg a_{k_n} dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie k_1, k_2, \dots jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych.*

Przykład. Dla ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ czyli $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ podciągami są np.:

ciąg a_{2n} , czyli $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$, ciąg a_{2n+1} , czyli $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$,

ciąg a_{10n} , czyli $\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots$ etc.

Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa

Każdy ciąg ograniczony (niekoniecznie monotoniczny) zawiera podciąg zbieżny.

Przykład. Dla ciągu $a_n = (-1)^n$ podciągami zbieżnymi są np. a_{2n} (ciąg stały równy 1) i a_{2n+1} (ciąg stały równy -1).

Granice niewłaściwe

Definicja. Mówimy, że ciąg a_n ma granicę (niewłaściwą) równą $+\infty$, jeśli dla każdego $M \in \mathbb{R}$, nierówność $a_n > M$ zachodzi dla dostatecznie dużych n .

Analogicznie, ciąg a_n ma granicę niewłaściwą równą $-\infty$, jeśli dla każdego $M \in \mathbb{R}$, nierówność $a_n < M$ zachodzi dla dostatecznie dużych n .

Piszemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ lub $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ etc. Mówi się też, że ciąg a_n jest zbieżny do $+\infty$, lub że jest rozbieżny do $+\infty$ etc.

Uwaga ($\pm\infty$ oznacza „ $+\infty$ lub $-\infty$ ”). Nie jest prawdą, że każdy ciąg, który nie ma skończonej granicy dąży do $\pm\infty$, np. ciąg $a_n = (-1)^n n$ nie ma granicy właściwej ani niewłaściwej.

Stwierdzenie. *Każdy ciąg rosnący (malejący) i nieograniczony ma granicę $+\infty$ ($-\infty$).*

Stwierdzenie. *Jeśli ciąg a_n ma granicę $\pm\infty$, to ciąg $\frac{1}{a_n}$ ma granicę 0.*

Uwaga. Odwrotne stwierdzenie nie jest prawdziwe, np. ciąg $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ zbiega do 0, ale ciąg $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ nie ma granicy właściwej ani niewłaściwej.

Twierdzenie. *Jeśli ciąg a_n ma granicę g (właściwą lub niewłaściwą), to ciąg średnich arytmetycznych tego ciągu, tzn. ciąg $A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ też ma granicę g .*

Jeśli dodatkowo założymy $a_n > 0$, to również ciągi średnich geometrycznych i harmonicznym ciągu a_n , tzn. ciągi $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ i $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ mają granicę g .