

# Analiza Matematyczna I

## Wydział Nauk Ekonomicznych

### wykład III

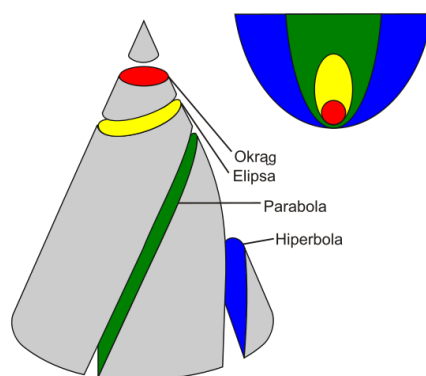
Uniwersytet Warszawski  
semestr zimowy

## Wstęp do Analizy

### Krzywe i powierzchnie stopnia drugiego

#### Krzywe stożkowe

**Definicja.** *Krzywe stożkowe (krzywe stopnia drugiego) na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  to krzywe powstałe przez przecięcie powierzchni stożkowej w  $\mathbb{R}^3$  płaszczyzną. Krzywymi stożkowymi są elipsy, parabole i hiperbole.*



#### Elipsa

**Definicja.** *Elipsa to zbiór punktów na płaszczyźnie, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (zwanymi ogniskami elipsy) jest stała.*

### Uwaga

Jeśli ogniska elipsy się pokrywają, to elipsa ta jest okręgiem.

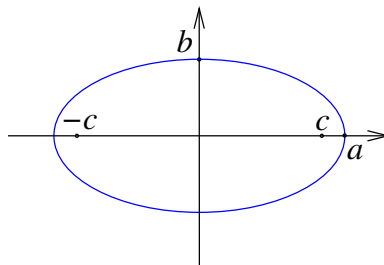
**Stwierdzenie.** Równanie elipsy w  $\mathbb{R}^2$  o ogniskach  $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$  dla  $c \geq 0$  ma postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

gdzie  $a^2 - b^2 = c^2$  oraz  $a, b$  to długości półosi elipsy.

**Definicja.** Mimośród elipsy to liczba

$$e = \frac{c}{a} < 1.$$



Rysunek 1: Elipsa.

**Uwaga.** Jeśli wiązka promieni świetlnych wychodzi z jednego ogniska elipsy, to po odbiciu się od tej elipsy skupia się w drugim ognisku.

### Parabola

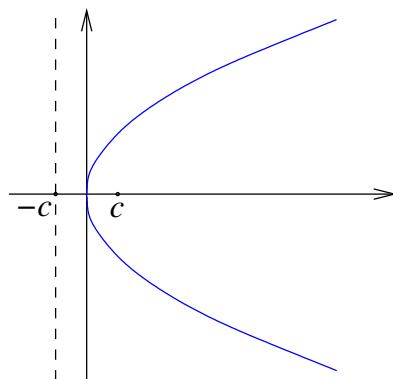
**Definicja.** Parabola to zbiór punktów na płaszczyźnie, których odległości od ustalonego punktu (zwanego *ogniskiem* paraboli) i ustalonej prostej (zwanej *kierownicą* paraboli) są równe.

**Stwierdzenie.** Równanie paraboli w  $\mathbb{R}^2$  o ognisku  $(c, 0)$  i kierownicy  $x = -c$  dla  $c \geq 0$  ma postać

$$y^2 = 4cx,$$

gdzie  $(0, 0)$  to wierzchołek paraboli.

**Uwaga.** Jeśli wiązka promieni świetlnych wychodzi z ogniska paraboli, to po odbiciu się od tej paraboli daje wiązkę promieni równoległych.



Rysunek 2: Parabola.

## Hiperbola

**Definicja.** *Hiperbola* to zbiór punktów na płaszczyźnie, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch ustalonych punktów zwanych *ogniskami* hiperboli) jest stała.

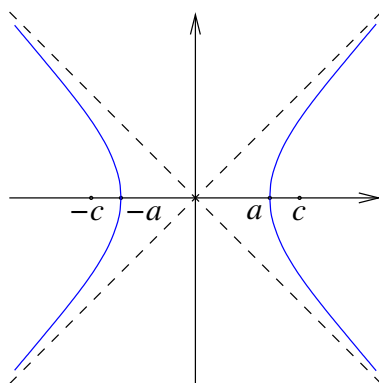
**Stwierdzenie.** *Równanie hiperboli w  $\mathbb{R}^2$  o ogniskach  $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$  dla  $c \geq 0$  ma postać*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

gdzie  $a^2 + b^2 = c^2$  oraz  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  to wierzchołki hiperboli.

**Definicja.** *Mimośród* hiperboli to liczba

$$e = \frac{c}{a} > 1.$$



Rysunek 3: Hiperbola.

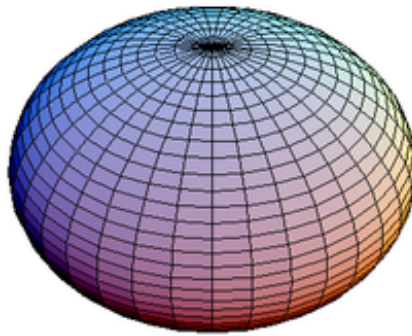
**Przykłady powierzchni stopnia drugiego (kwadryk) w  $\mathbb{R}^3$**

**Definicja.** *Elipsoida* ma równanie postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$

**Uwaga**

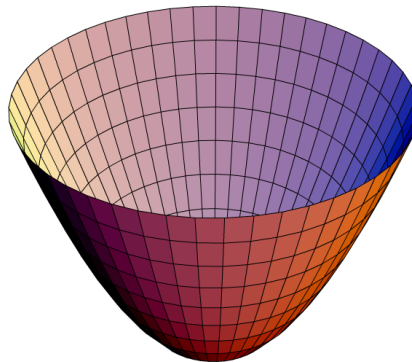
Jeśli  $a = b = c$ , to elipsoida ta jest sferą.



Rysunek 4: Elipsoida.

**Definicja.** *Paraboloida eliptyczna* ma równanie postaci

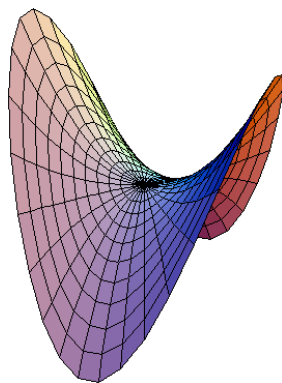
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b > 0.$$



Rysunek 5: Paraboloida eliptyczna.

**Definicja.** *Paraboloida hiperboliczna (powierzchnia siodłowa)* ma równanie postaci

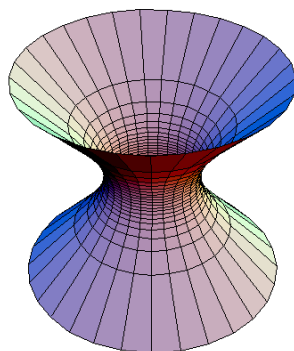
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b > 0.$$



Rysunek 6: Paraboloida hiperboliczna.

**Definicja.** *Hiperboloida jednopowłokowa* ma równanie postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$



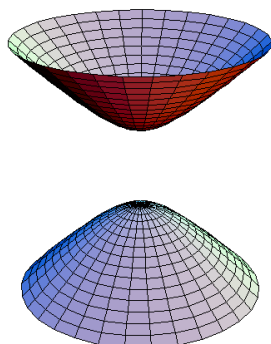
Rysunek 7: Hiperboloida jednopowłokowa.

**Definicja.** *Hiperboloida dwupowłokowa* ma równanie postaci

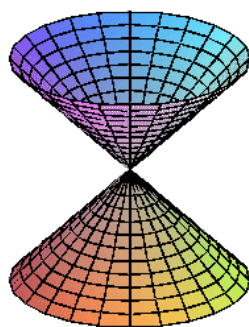
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a, b, c > 0.$$

**Definicja.** *Eliptyczna powierzchnia stożkowa* ma równanie postaci

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b > 0.$$



Rysunek 8: Hiperboloida dwupowłokowa.



Rysunek 9: Powierzchnia stożkowa.

**Definicja.** *Eliptyczna powierzchnia walcowa* ma równanie postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

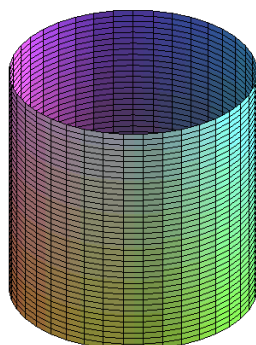
## Średnie

### Średnia potęgowa

**Definicja.** Średnią potęgową rzędu  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  liczb  $a_1, \dots, a_n$  nazywamy liczbę

$$\mu_p = \left( \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Uwaga.** Zakładamy, że wszystkie potęgi są dobrze zdefiniowane (tak jest np. dla  $p \in \{1, 2\}$  i  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  lub  $p = -1$  i  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  lub  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $a_1, \dots, a_n > 0$  etc.).



Rysunek 10: Powierzchnia walcowa.

### Szczególne przypadki

**Definicja** ( $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ).

- Średnia arytmetyczna  $A = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$  ( $p = 1$ )
- Średnia harmoniczna  $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$  ( $p = -1$ )
- Średnia kwadratowa  $K = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$  ( $p = 2$ )

Określamy dodatkowo  $\mu_p$  dla  $p = 0$  jako

**Definicja** ( $a_1, \dots, a_n \geq 0$ ).

- Średnia geometryczna  $G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$

### Nierówność o średnich

**Twierdzenie.** Niech  $a_1, \dots, a_n > 0$ . Wtedy dla każdego  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{jeśli } p_1 \leq p_2, \quad \text{to } \mu_{p_1} \leq \mu_{p_2}.$$

W szczególności,  $H \leq G \leq A \leq K$ , czyli

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

**Uwaga.** Równość zachodzi tylko gdy  $a_1 = \dots = a_n$ .

## Średnia ważona

**Definicja.** (Arytmetyczną) *średnią ważoną* liczb  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  z wagami  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ , gdzie  $t_1 + \dots + t_n = 1$ , nazywamy liczbę

$$t_1 a_1 + \dots + t_n a_n.$$

**Uwaga.** Jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona jest zwykłą średnią arytmetyczną.

**Uwaga.** Można też zdefiniować inne średnie ważne (geometryczną, harmoniczną etc.)

**Przykład.** Ocena na koniec roku z pewnego przedmiotu jest wyliczana według wzoru

$$\text{ocena} = 20\% \text{ oceny z ćwiczeń} + 80\% \text{ oceny z egzaminu}.$$

**Przykład.** Średni ważony koszt kapitału *WACC* (*Weighted Average Cost of Capital*) w finansowaniu inwestycji definiuje się jako

$$t_1 K_1 + \dots + t_n K_n,$$

gdzie  $K_j$  jest kosztem  $j$ -tego składnika kapitału, a waga  $t_j$  określa wielkość udziału tego składnika w źródłach finansowania tej inwestycji.

## Paradoks Simpsona

Ocena poszczególnych grup przy pomocy średniej ważonej zmienia się, gdy grupy oceniamy wspólnie.

**Przykład.** W czasie badań statystycznych testowano skuteczność dwóch leków (A i B) u kobiet i mężczyzn. W pierwszym badaniu lek A podziałał u 60 kobiet na 100 (skuteczność 60%), a lek B u 7 kobiet na 10 (skuteczność 70%). W drugim badaniu lek A podziałał u 4 mężczyzn na 10 (skuteczność 40%), a lek B u 50 mężczyzn na 100 (skuteczność 50%). W obu badaniach lek B wykazał zatem większą skuteczność, niż lek A. Jednak biorąc pod uwagę łącznie oba badania, lek A podziałał u 64 osób na 110 (skuteczność ok. 58%), a lek B podziałał u 57 osób na 110 (skuteczność ok. 52%). Większą skuteczność wykazał zatem lek A.

## Oprocentowanie lokat i kredytów — procent składany

### Procent składany

#### Pytanie

Jak zmienia się wartość wkładu na lokacie bankowej, gdy odsetki są do niego wielokrotnie doliczane (kapitalizowane)?



### Wzór na procent składany

Założmy, że oprocentowanie (nominalne) lokaty wynosi  $p\%$  w skali rocznej, a odsetki naliczane są  $n$  razy w roku. Wtedy wartość wkładu na lokacie po  $k$  latach wynosi

$$w_k = w_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nk},$$

gdzie  $w_0$  jest wkładem początkowym. Wartość  $w_1$  to efektywny zysk po 1 roku. Efektywne oprocentowanie lokaty wynosi  $100 \frac{w_1 - w_0}{w_0} \% = 100 \left( \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n - 1 \right) \%$  w skali roku.

**Stwierdzenie.** Dla każdego  $x > 0$ , ciąg  $b_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  jest ściśle rosnący (tzn.  $b_{n+1} > b_n$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ ).

Dowód.

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \left(\frac{(n+1+x)n}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \frac{n+x}{n} = \left(\frac{n^2 + n + xn}{n^2 + n + xn + x}\right)^{n+1} \frac{n+x}{n} \\ &= \left(1 - \frac{x}{n^2 + n + xn + x}\right)^{n+1} \frac{n+x}{n} \\ &\stackrel{\text{nier. Bern.}}{>} \left(1 - \frac{(n+1)x}{n^2 + n + xn + x}\right) \frac{n+x}{n} = \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) \frac{n+x}{n} \\ &= \frac{n}{n+x} \frac{n+x}{n} = 1. \end{aligned}$$

□

**Uwaga.** To stwierdzenie wynika również z nierówności o średnich.

### Inny dowód stwierdzenia

Niech  $a_1 = \dots = a_n = 1 + \frac{x}{n}$ ,  $a_{n+1} = 1$ .

Wtedy z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną mamy

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} < \frac{n \left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1}{n+1},$$

co daje

$$b_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = b_{n+1}.$$

□

**Wniosek.** Przy stałym nominalnym oprocentowaniu rocznym lokaty, im częściej są naliczane odsetki, tym większe jest oprocentowanie efektywne.

**Uwaga.** Lokata o niższym oprocentowaniu nominalnym, ale częstszej kapitalizacji odsetek może być korzystniejsza od lokaty o wyższym oprocentowaniu nominalnym, ale rzadszej kapitalizacji.

**Przykład.** Załóżmy, że oprocentowanie lokaty  $A$  wynosi 20% w skali roku, przy miesięcznej kapitalizacji odsetek, a oprocentowanie lokaty  $B$  wynosi 21% w skali roku, przy rocznej kapitalizacji odsetek.

Wtedy przy wkładzie początkowym  $w_0$ , wysokość wkładu po 1 roku na lokacie  $A$  wynosi  $w_0 \left(1 + \frac{0.2}{12}\right)^{12} \approx 1,2194w_0$ , a na lokacie  $B$  wynosi  $1,21w_0$ .