

Analiza Matematyczna I

Wydział Nauk Ekonomicznych

wykład VIII

Uniwersytet Warszawski
semestr zimowy

Granica i ciągłość funkcji

Pojęcia wstępne

Pojęcie funkcji

Definicja. *Funkcja* f określona na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y to przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ (dokładnie jednego) elementu $y \in Y$ (oznaczanego $f(x)$). Piszemy wtedy $f : X \rightarrow Y$. Zbiór X nazywamy *dziędziną* funkcji f , a zbiór $\{f(x) : x \in X\}$ (oznaczany $f(X)$) *zbiorem wartości* (*przeciwdziędziną*) funkcji.

Definicja. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest:

- *różnowartościowa*, jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in X$, takich że $x_1 \neq x_2$ zachodzi $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *na* Y , jeśli dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$, taki że $f(x) = y$;
- *wzajemnie jednoznaczna*, jeśli jest różnowartościowa i „na”.

Obcięcie i złożenie funkcji

Definicja. *Obcięciem* funkcji $f : X \rightarrow Y$ do zbioru $A \subset X$ nazywamy funkcję

$$f|_A : A \rightarrow Y, \quad f|_A(x) = f(x).$$

Definicja. *Złożeniem* funkcji $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ nazywamy funkcję

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Definicja. Jeśli $f : X \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, to funkcję

$$f^n : X \rightarrow X, \quad f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ razy}}(x)$$

nazywamy n -tą *iteracją* funkcji f .

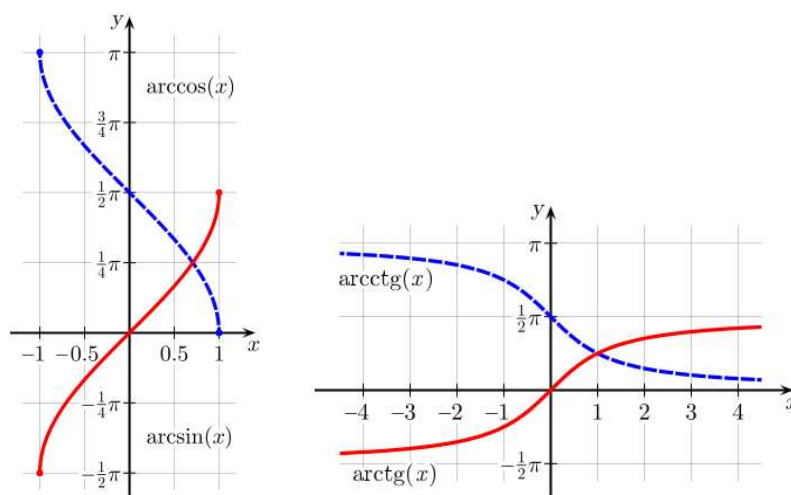
Funkcja odwrotna

Definicja. Jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest wzajemnie jednoznaczna, to *funkcją odwrotną* do f (oznaczaną f^{-1}), nazywamy funkcję z Y na X , taką że $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.

Uwaga. Funkcja odwrotna do danej funkcji f jest zawsze różnowartościowa.

Przykłady

Funkcje logarytmiczne (odwrotności funkcji wykładniczych), funkcje cyklometryczne \arcsin , \arccos , \arctg , $\operatorname{arccotg}$ (odwrotne do funkcji trygonometrycznych na odpowiednich przedziałach), ...



Rysunek 1: Wykresy funkcji cyklometrycznych.

Funkcje rzeczywiste

Definicja. *Funkcje rzeczywiste* to funkcje $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Przykłady (funkcje elementarne)

- wielomiany $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
- funkcje wymierne $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P, Q wielomiany
- funkcje potęgowe $f(x) = x^\alpha$
- funkcje trygonometryczne $f(x) = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$
- funkcje wykładnicze $f(x) = a^x$

Definicja. Funkcja rzeczywista $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest:

- *ograniczona z góry (z dołu)*, jeśli istnieje $M \in \mathbb{R}$, takie że $f(x) < M$ ($f(x) > M$) dla każdego $x \in X$;
- *ograniczona*, jeśli jest ograniczona z góry i z dołu, czyli istnieje $M > 0$, takie że $|f(x)| < M$ dla każdego $x \in X$.

Definicja. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest *okresowa* z okresem $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jeśli $f(x+T) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Przykład. Funkcja $f(x) = \sin x$ jest okresowa z okresem 2π .

Funkcje monotoniczne

Definicja. Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dla $X \subset \mathbb{R}$. Funkcja f jest:

- *rosnąca* (ściśle rosnąca), jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in X$, takich że $x_1 < x_2$ zachodzi $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$);
- *malejąca* (ściśle malejąca), jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in X$, takich że $x_1 < x_2$ zachodzi $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$);
- *monotoniczna* (ściśle monotoniczna), jeśli jest rosnąca lub malejąca (ściśle rosnąca lub ściśle malejąca).

Uwaga. Jeśli f jest ściśle monotoniczna, to jest różnowartościowa.

Granica funkcji

Definicja. Punkt $a \in \mathbb{R}$ (lub $a = \pm\infty$) jest *punktem skupienia* zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeśli istnieje ciąg punktów $x_n \in A$ różnych od a , taki że $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Uwagi

- Punkt skupienia $a \in \mathbb{R}$ nie musi należeć do zbioru A , np. 0 jest punktem skupienia zbioru $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, ale $0 \notin A$.
- Nie każdy punkt zbioru A musi być punktem skupienia A , np. w poprzednim przykładzie żaden punkt zbioru A nie jest jego punktem skupienia.

Przykład. Zbiór punktów skupienia zbioru $(0, 1)$ to $[0, 1]$, zbioru $[0, 1]$ to $[0, 1]$, a zbioru \mathbb{Q} to \mathbb{R} (oraz $\pm\infty$).

Granica funkcji w punkcie

Definicja Heinego (ciągowa) granicy funkcji

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $A \subset \mathbb{R}$ i niech $a \in \mathbb{R}$ (lub $a = \pm\infty$) będzie punktem skupienia zbioru A . Mówimy, że f ma *granice* $g \in \mathbb{R}$ (lub $g = \pm\infty$) w punkcie a , jeśli dla każdego ciągu punktów $x_n \in A$ zbieżnego do a i takiego że $x_n \neq a$, ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do g . Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g$.

Uwaga. Granica funkcji jest określona jednoznacznie. Wynika to z jednoznaczności granicy ciągu.

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$.

Dowód. Niech $x_n \neq 2$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$. Wtedy $x_n^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2^3 = 8$, więc z definicji Heinego granicy funkcji, $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$. \square

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nie istnieje.

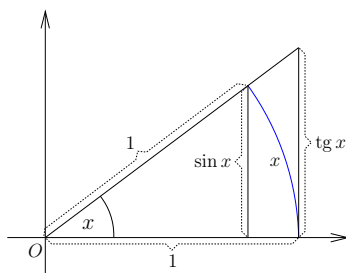
Dowód. Niech $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $\tilde{x}_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. Wtedy $x_n, \tilde{x}_n \neq 0$ i $x_n, \tilde{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Poza tym, $\sin \frac{1}{x_n} = \sin(2\pi n) = 0$ oraz $\sin \frac{1}{\tilde{x}_n} = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$. Zatem, definicja Heinego granicy funkcji nie może być spełniona dla żadnego g . \square

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dowód.

Mamy

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{dla } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$



(patrz rysunek).

Zatem, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Niech $x_n \neq 0$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Wtedy dla dostatecznie dużych n

$$0 < 1 - \frac{\sin x_n}{x_n} < 1 - \cos x_n = 2 \sin^2 \frac{x_n}{2} < \frac{x_n^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach, $\frac{\sin x_n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Z definicji Heinego granicy funkcji, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

□

Definicja. *Otoczeniem punktu $a \in \mathbb{R}$ nazywamy dowolną sumę przedziałów otwartych zawierającą a .*

Definicja Cauchy'ego (otoczeniowa) granicy funkcji

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $A \subset \mathbb{R}$ i niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru A . Mówimy, że f ma granicę $g \in \mathbb{R}$ w punkcie a , jeśli dla każdego otoczenia U punktu g istnieje otoczenie V punktu a , takie że jeśli $x \in A \cap V$ i $x \neq a$, to $f(x) \in U$.

Uwaga (Definicja ε - δ granicy funkcji). Definicja Cauchy'ego jest równoważna temu, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Uwaga. Analogiczne definicje można napisać dla $a, g = \pm\infty$, jeśli umówimy się, że otoczeniami $+\infty$ ($-\infty$) są dowolne sumy przedziałów otwartych zawierające przedział postaci $(M, +\infty)$ ($(-\infty, -M)$) dla $M > 0$.

Na przykład, dla $a = +\infty$, $g \in \mathbb{R}$ mamy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$ gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x \in A \ x > M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon,$$

dla $a \in \mathbb{R}$, $g = -\infty$ mamy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ gdy

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

etc.

Twierdzenie. *Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji są równoważne.*

Granice jednostronne

Definicja. Punkt $a \in \mathbb{R}$ jest *prawostronnym (lewostronnym) punktem skupienia* zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeśli istnieje ciąg punktów $x_n \in A$, taki że $x_n > a$ ($x_n < a$) i $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Definicja Heinego granicy jednostronnej

Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $A \subset \mathbb{R}$ i niech $a \in \mathbb{R}$ prawostronny (lewostronny) punkt skupienia A . Mówimy, że f ma *granice prawostronną (lewostronną)* $g \in \mathbb{R}$ (lub $g = \pm\infty$) w punkcie a , jeśli dla każdego ciągu punktów $x_n \in A$ zbieżnego do a i takiego że $x_n > a$ ($x_n < a$), ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do g . Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$ ($\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g$) lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} g$ ($f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} g$).

Uwaga. Można również podać definicję Cauchy'ego granicy jednostronnej.

Przykład. Niech $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

Wtedy $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

Dowód. Mamy $f(x) = 1$ dla $x > 0$ i $f(x) = -1$ dla $x < 0$. □

Twierdzenie. Granica $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje i jest równa g wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją obie granice jednostronne f w punkcie a i są równe g .