

# Analiza Matematyczna I

## Wydział Nauk Ekonomicznych

### wykład IX

Uniwersytet Warszawski  
semestr zimowy

## Granica i ciągłość funkcji

### Granica funkcji

#### Własności arytmetyczne granicy funkcji

**Twierdzenie.** Niech  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  (lub  $a = \pm\infty$ ) punkt skupienia  $A$ . Jeśli istnieją skończone granice  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , to:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  o ile  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ .

**Uwaga.** Twierdzenie zachodzi również dla granic jednostronnych.

**Twierdzenie.** Poprzednie twierdzenie przenosi się na niektóre przypadki granic niewłaściwych, przy następujących konwencjach:

- $+\infty + y = y + (+\infty) = +\infty$  dla  $y \in \mathbb{R}$  lub  $y = +\infty$ ,
- $-\infty + y = y + (-\infty) = -\infty$  dla  $y \in \mathbb{R}$  lub  $y = -\infty$ ,
- $+\infty \cdot y = y \cdot (+\infty) = +\infty$  dla  $y > 0$  lub  $y = +\infty$ ,

- $-\infty \cdot y = y \cdot (-\infty) = -\infty$  dla  $y > 0$  lub  $y = +\infty$ ,
- $+\infty \cdot y = y \cdot (+\infty) = -\infty$  dla  $y < 0$  lub  $y = -\infty$ ,
- $-\infty \cdot y = y \cdot (-\infty) = +\infty$  dla  $y < 0$  lub  $y = -\infty$ ,
- $\frac{y}{\pm\infty} = 0$  dla  $y \in \mathbb{R}$ .

### Uwaga

Są to tylko konwencje dotyczące tego twierdzenia.

Nie przypisujemy żadnej wartości symbolom  $\pm\infty - (\pm\infty)$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ . Są to tzw. *symbole nieoznaczone* i w tych przypadkach granice mogą przyjmować różne wartości (lub nie istnieć) w zależności od konkretnych przykładów.

**Twierdzenie.** Niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  punkt skupienia  $A$ . Jeśli  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  oraz istnieje otoczenie  $U$  punktu  $a$ , takie że  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ) dla każdego  $x \in U \cap A$ ,  $x \neq a$ , to

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ } (-\infty).$$

**Uwaga.** To samo twierdzenie zachodzi dla granic jednostronnych, jeśli zamiast  $U$  weźmiemy odpowiednio  $U \cap (a, +\infty)$  lub  $U \cap (-\infty, a)$ .

**Przykład.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ .

**Twierdzenie.** Załóżmy, że  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  istnieją oraz  $f(x) \leq g(x)$  dla każdego  $x$  w pewnym otoczeniu  $a$ , takiego że  $x \neq a$ . Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

W szczególności, jeśli  $f(x) \leq c$  ( $f(x) \geq c$ ) dla pewnego  $c \in \mathbb{R}$ , to  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq c$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq c$ ).

### Twierdzenie o trzech funkcjach

Niech  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  (lub  $a = \pm\infty$ ) punkt skupienia  $A$ . Jeśli istnieją skończone granice  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  i są równe  $y$  oraz  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  dla każdego  $x$  w pewnym otoczeniu  $a$ , takiego że  $x \neq a$ , to  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$  istnieje i jest równa  $y$ .

### Granice jednostronne funkcji monotonicznych

**Twierdzenie.** Niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  prawostronny (lewostronny) punkt skupienia  $A$ . Jeśli istnieje otoczenie  $U$  punktu  $a$ , takie że funkcja  $f$  jest monotoniczna na zbiorze  $U \cap (a, +\infty)$  ( $U \cap (-\infty, a)$ ), to istnieje (skończona lub nieskończona) jednostronna granica  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ( $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ). Ta granica jest skończona, jeśli funkcja  $f$  jest ograniczona na zbiorze  $U \cap (a, +\infty)$  ( $U \cap (-\infty, a)$ ).

## Ważne przykłady granic

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$  dla  $a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$  dla  $\alpha, a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$  dla  $\alpha, a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $\alpha > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$  dla  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$  dla  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

## Funkcje ciągłe

### Ciągłość funkcji w punkcie

**Definicja.** Niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dla  $A \subset \mathbb{R}$  i niech  $a \in A$  punkt skupienia  $A$ . Mówimy, że  $f$  jest *ciągła w punkcie  $a$* , jeśli  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  istnieje i jest równa  $f(a)$ .

**Uwaga.** Jeśli  $a$  nie jest punktem skupienia  $A$  (czyli jest tzw. *punktem izolowanym* zbioru  $A$ ), to przyjmujemy, że  $f$  jest ciągła w  $a$ .

**Uwaga** (Definicja otoczeniowa ciągłości funkcji). Ciągłość  $f$  w punkcie  $a$  jest równoważna temu, że dla każdego otoczenia  $U$  punktu  $f(a)$  istnieje otoczenie  $V$  punktu  $a$ , takie że jeśli  $x \in A \cap V$ , to  $f(x) \in U$ .

**Uwaga** (Definicja Cauchy'ego ( $\varepsilon$ - $\delta$ ) ciągłości funkcji). Funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $a$ , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

**Uwaga** (Definicja Heinego (ciągowa) ciągłości funkcji). Funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $a$ , jeśli dla każdego ciągu punktów  $x_n \in A$ , takiego że  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ , zachodzi  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$ .

**Przykład** (Funkcja Dirichleta). Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Wtedy  $f$  nie jest ciągła w żadnym punkcie.

## Funkcje ciągłe

**Definicja.** Mówimy, że funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$  jest *ciągła*, jeśli jest ciągła w każdym punkcie  $a \in A$ .

**Przykład.** Funkcje elementarne (wielomiany, funkcje trygonometryczne, cyklometryczne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne) są ciągłe w swoich dziedzinach.

**Twierdzenie.** *Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji ciągłych są ciągłe.*

**Definicja.** Funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  osiąga w punkcie  $x_0 \in A$  *maksimum* (*minimum*), jeśli  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ) dla każdego  $x \in A$ . Maksimum (minimum) funkcji  $f$  (czyli liczbę  $f(x_0)$ ) oznaczamy  $\max f$  ( $\min f$ ).

**Uwaga.** Nie każda funkcja ograniczona (nawet ciągła) osiąga maksimum i minimum. Np. dla  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arctg x$  mamy  $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  oraz  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$ , skąd wynika, że  $f$  nie osiąga maksimum ani minimum.

## Twierdzenie Weierstrassa

*Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dla  $a, b \in \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą. Wtedy  $f$  osiąga maksimum i minimum.*

## Własność Darboux

**Definicja.** Mówimy, że funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dla  $a, b \in \mathbb{R}$  ma *własność Darboux*, jeśli przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy  $f(a)$  i  $f(b)$ , to znaczy dla każdego  $y$  z przedziału o końcach  $f(a)$  i  $f(b)$  istnieje  $x \in [a, b]$ , taki że  $f(x) = y$ .

**Twierdzenie.** *Niech  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą, gdzie  $P$  dowolny przedział w  $\mathbb{R}$ . Wtedy  $f$  ma własność Darboux na każdym przedziale  $[a, b] \subset P$ .*

**Wniosek.** *Jeśli  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  ciągła, gdzie  $P$  przedział w  $\mathbb{R}$ , to  $f(P)$  jest przedziałem.*

Stąd i z twierdzenia Weierstrassa otrzymujemy:

**Twierdzenie.** *Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to zbiór wartości funkcji  $f$  jest równy  $[\min f, \max f]$ .*

**Twierdzenie.** *Niech  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą, gdzie  $P$  przedział w  $\mathbb{R}$ . Wtedy  $f$  jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest ściśle monotoniczna.*

*Dowód.* Z własności Darboux. □

**Przykład.** Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

nie jest ciągła, ale ma własność Darboux na każdym przedziale.

### Przykład zastosowania własności Darboux

**Przykład.** W każdej chwili istnieją na powierzchni Ziemi dwa punkty antypodyczne (tzn. leżące na jednej prostej przechodzącej przez środek Ziemi), w których temperatura (albo ciśnienie, wilgotność etc.) są takie same.

*Dowód.* Zakładamy, że Ziemia jest kulą o środku w początku układu współrzędnych. Wtedy punkty antypodyczne są postaci  $x, -x$ . Ustalmy dowolne dwa punkty antypodyczne  $x_0, -x_0$  i załóżmy, że temperatury w tych punktach są różne, np.  $T(x_0) > T(-x_0)$ . Niech  $f(x) = T(x) - T(-x)$ . Wtedy  $f(x_0) > 0$ . Przechodząc w sposób ciągły po powierzchni Ziemi od punktu  $x$  do  $-x$ , uzyskujemy na końcu  $f(-x_0) = T(-x_0) - T(x_0) = -f(x_0) < 0$ . Z własności Darboux, po drodze musiał nastąpić moment, gdy  $f(x) = 0$ , czyli  $T(x) = T(-x)$  dla pewnej pary antypodycznych punktów  $x, -x$ .  $\square$

**Uwaga.** Z tzw. twierdzenia Borsuka–Ulama wynika, że każdej chwili istnieją na powierzchni Ziemi dwa punkty antypodyczne w których zarówno temperatura, jak i ciśnienie (albo inne dwie wielkości, które zmieniają się w sposób ciągły) są takie same.