

Analiza matematyczna II, Wydział Nauk Ekonomicznych  
rok akademicki 2011/12, semestr letni  
II kolokwium, 1 czerwca 2012 r.

Imię i nazwisko .....

Numer indeksu ..... Nazwisko prowadzącego ćwiczenia .....

**UWAGA!** Test składa się z 15 równopunktowanych zadań, po 1 punkcie za każde zadanie. Prosimy wpisywać tylko wyniki (bez obliczeń), brudnopisów prosimy nie oddawać. Czas pracy – 90 minut. Nie wolno używać kalkulatorów!

1. Obliczyć grad  $f(0, 0)$  dla  $f(x, y) = \sin \sqrt[4]{x^2 y^2}$ .

Odpowiedź: .....

2. Niech  $f(x, y, z) = \sqrt[4]{x^4 + y^4 + z^4}$ . Rozstrzygnąć, czy:

grad  $f(x, y, z)$  istnieje dla wszystkich  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  TAK/NIE: .....

funkcja  $f$  jest różniczkowalna dla wszystkich  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  TAK/NIE: .....

3. Wyznaczyć macierz Jacobiego odwzorowania  $f = h \circ g$  w punkcie  $(0, 1)$ , jeśli  $g(x, y) = (xy, x + y)$ ,  $h(u, v) = (e^{u+v}, e^{u-v})$ .

Odpowiedź: .....

4. Czy istnieje dyfeomorfizm klasy  $C^1$  zbioru  $A$  na zbiór  $B$ , jeśli:

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ,  $B = \mathbb{R}^2$  TAK/NIE: .....

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ,  $B = \mathbb{R}^2$  TAK/NIE: .....

5. Znaleźć maksimum funkcji  $f(x, y) = 2x^2 - y^2$  na domkniętym trójkącie o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

Odpowiedź: .....

6. Rozstrzygnąć, czy forma kwadratowa o macierzy  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  jest: dodatnio określona, dodatnio półokreślona, ujemnie określona, ujemnie półokreślona czy nieokreślona.

Odpowiedź: .....

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

7. Niech  $f(x, y) = (\cos x)^2(y + 1)$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ . Znaleźć maksimum  $f$  (lub stwierdzić, że nie jest przyjmowane):

na zbiorze  $A$

Odpowiedź: .....

na brzegu zbioru  $A$

Odpowiedź: .....

8. Wyznaczyć wszystkie punkty siodłowe funkcji  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^4 + 2y^4 - 2x^2 - y^2$ .

Odpowiedź: .....

9. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^4 + 2y^4 - 2x^2 - y^2$  ma lokalne maksima.

Odpowiedź: .....

10. Niech  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$ . Podać równanie płaszczyzny normalnej (prostopadłej) do  $M$  w punkcie  $(0, 0, 1)$ .

Odpowiedź: .....

11. Niech  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$ . Podać przykład niezerowego wektora należącego do przestrzeni stycznej do  $M$  w punkcie  $(0, 0, 1)$ .

Odpowiedź: .....

12. Wyznaczyć minimum odległości punktów elipsy o równaniu  $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$  od punktu  $(1, 2)$ .

Odpowiedź: .....

13. Wyznaczyć minimum odległości punktów elipsy o równaniu  $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$  od prostej o równaniu  $x = 2$ .

Odpowiedź: .....

14. Dyfeomorfizm  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ , gdzie  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ , jest zadany wzorem  $f(x, y) = \left(x, \frac{x^2 y}{1-x}\right)$ . Znaleźć jacobian odwzorowania  $f^{-1}$  w punkcie  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ .

Odpowiedź: .....

15. Niech będzie dane równanie  $x^2 + x + y + 2 \sin y = 2$ . Znaleźć pochodną funkcji uwikłanej  $y(x)$  w punkcie  $x = 1$ , jeśli wiadomo, że  $y(1) = 0$ .

Odpowiedź: .....