

Analiza matematyczna II, Wydział Nauk Ekonomicznych
rok akademicki 2012/13, semestr letni
II kolokwium, 24 maja 2013 r.

Imię i nazwisko

Numer indeksu Nazwisko prowadzącego ćwiczenia

UWAGA! Test składa się z 15 równopunktowanych zadań, po 1 punkcie za każde zadanie. Prosimy wpisywać tylko wyniki (bez obliczeń), brudnopisów prosimy nie oddawać. Czas pracy – 90 minut. Nie wolno używać kalkulatorów!

1. Obliczyć grad $f(\pi, 1)$, lub stwierdzić że nie istnieje, dla $f(x, y) = |\sin xy|$.

Odpowiedź:

2. Znaleźć normę gradientu funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{xy}$ w punkcie $(2, 2)$.

Odpowiedź:

3. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ dla funkcji $f(x, y) = e^{x+y} \sin(x^2 + y^2) + xy$.

Odpowiedź:

4. Wyznaczyć jacobian odwzorowania $f = h \circ g$, jeśli $g(x, y) = (2x + y, x + y)$, $h(u, v) = (u^2, v^2)$.

Odpowiedź:

5. Czy istnieje dyfeomorfizm klasy C^1 zbioru A na zbiór B , jeśli:

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 1\}$ **TAK/NIE:**

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ **TAK/NIE:**

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\}$ **TAK/NIE:**

6. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = -4x^2 + 32x^4 - 2y^2 + y^4$ ma lokalne maksima.

Odpowiedź:

7. Wyznaczyć wszystkie punkty siodłowe funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = -4x^2 + 32x^4 - 2y^2 + y^4$.

Odpowiedź:

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

8. Rozstrzygnąć, czy forma kwadratowa o macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ jest: dodatnio określona, dodatnio półokreślona, ujemnie określona, ujemnie półokreślona czy nieokreślona.

Odpowiedź:

9. Rozstrzygnąć, czy forma kwadratowa o macierzy $\begin{bmatrix} -9 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ jest: dodatnio określona, dodatnio półokreślona, ujemnie określona, ujemnie półokreślona czy nieokreślona.

Odpowiedź:

10. Znaleźć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = 1 + x + 2xy + y^2$ w punkcie $(1, -1)$, w kierunku wektora $(\sqrt{3}, \pi)$.

Odpowiedź:

11. Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z = 0, z = 3\}$. Podać równanie płaszczyzny normalnej (prostopadłej) do M w punkcie $(2, 1, 3)$.

Odpowiedź:

12. Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z = 0, z = 3\}$. Podać przykład niezerowego wektora należącego do przestrzeni stycznej do M w punkcie $(2, 1, 3)$.

Odpowiedź:

13. Dyfeomorfizm $f : A \rightarrow B$, gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < x^2\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ jest zadany wzorem $f(x, y) = \left(x, \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2x^2}\right)$. Znaleźć jacobian odwzorowania f^{-1} w punkcie $(1, 1)$.

Odpowiedź:

14. Czy w pewnym otoczeniu punktu $y_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ istnieje funkcja rzeczywista $x = x(y)$ klasy C^1 , taka że $x(y_0) = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1$ oraz $f(x(y), y) = 3$, gdzie $f(x, y) = (x + y + 1)^2 + 2y^2$? Jeśli tak, obliczyć $x'(y_0)$.

Odpowiedź:

15. Niech będzie dane równanie $2x + \ln x = y + y^3$. Znaleźć pochodną funkcji uwikłanej $y(x)$ w punkcie $x = 1$.

Odpowiedź: