

Analiza matematyczna II, Wydział Nauk Ekonomicznych  
rok akademicki 2021/22, semestr letni  
II kolokwium, 27 maja 2022 r.

Imię i nazwisko .....

Nr indeksu .....

Nazwisko prowadzącego ćwiczenia .....

**UWAGA!** Test składa się z 10 zadań (przy każdym zadaniu podana jest liczba punktów, którą można otrzymać za w pełni poprawną odpowiedź do tego zadania). Prosimy wpisywać tylko wyniki (bez obliczeń), brudnopisów prosimy nie oddawać. Czas pracy – 90 minut. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących!

1. (1,5 pkt.) Niech  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie funkcją określoną wzorem  $f(x, y, z) = (x, xy, x + y^2 + z^3)$ . Proszę obliczyć wyznacznik macierzy Jakobiego  $f^{-1}$  w punkcie  $(1, 2, 6)$ .

Odpowiedź: .....

2. (1,5 pkt.) Znaleźć wszystkie punkty na powierzchni o równaniu  $z = -x^2 - y^2 + 8x - 6y + 10$ , w których płaszczyzna styczna jest pozioma.

Odpowiedź: .....

3. (1,5 pkt.) Wyznaczyć macierz Hessego funkcji  $f(x, y) = \cos(x^2y)$  w punkcie  $(1, \frac{\pi}{2})$ .

Odpowiedź: .....

4. (1,5 pkt.) Czy istnieje dyfeomorfizm klasy  $C^1$  zbioru  $A$  na zbiór  $B$ , jeśli:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \quad \text{TAK/NIE: } .....$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y < 0\}$$

TAK/NIE: .....

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}, \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

TAK/NIE: .....

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

5. (1 pkt.) Znaleźć i sklasyfikować (lok. min/lok. maks./ punkt siodłowy) punkty krytyczne funkcji  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy - 6x - 3y + 4$ .

lokalne minima: .....

lokalne maksima: .....

punkty siodłowe: .....

6. (2 pkt.) Znaleźć i sklasyfikować (lok. min/lok. maks./ punkt siodłowy) punkty krytyczne funkcji  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$ .

lokalne minima: .....

lokalne maksima: .....

punkty siodłowe: .....

7. (1 pkt.) Niech  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ . Znaleźć maksimum (max) oraz minimum (min) funkcji  $f$  na kole domkniętym o promieniu 2 i środku w punkcie  $(0, 0)$ .

**Odpowiedź:** max  $f$  =....., min  $f$  =.....

8. (2 pkt.) Istnieje liczba  $a \in \mathbb{R}$  taka, że forma kwadratowa o macierzy  $\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

jest dodatnio określona. **TAK/NIE:** .....

jest ujemnie określona. **TAK/NIE:** .....

jest dodatnio półokreślona. **TAK/NIE:** .....

jest ujemnie półokreślona. **TAK/NIE:** .....

9. (1 pkt.) Wskazać funkcję klasy  $C^1$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $f(0, 0) = 1$  oraz dla wszystkich  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + e^x \cos y + 1.$$

**Odpowiedź:** .....

10. (2 pkt.) Niech  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ . Znaleźć maksimum (max) oraz minimum (min) funkcji  $f$  na kwadracie  $[0, 2] \times [0, 2]$ .

**Odpowiedź:** max  $f$  =....., min  $f$  =.....