

Imię i nazwisko

Numer indeksu Nazwisko prow. ćwiczenia

UWAGA! W każdym prostokącie należy wpisać odpowiedź na odpowiednie pytanie lub polecenie (np. właściwą liczbę lub słowo TAK/NIE). Za każdy poprawnie wypełniony prostokąt otrzymuje się 0,5 punktu (max. 20 punktów). Poza tym, za każde poprawne wypełnienie wszystkich czterech podpunktów zadania otrzymuje się 1 punkt dodatkowy (max. 10 dodatkowych punktów).

1. Rozważmy całkę niewłaściwą $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$.

Czy wartość tej całki jest liczbą rzeczywistą mniejszą od -1 ? (TAK/NIE)

Czy wartość tej całki jest liczbą rzeczywistą większą od 1 ? (TAK/NIE)

Czy wartość tej całki jest liczbą niewymierną? (TAK/NIE)

Czy wartość tej całki jest równa wartości całki niewłaściwej $\int_0^\infty e^{-x} dx$? (TAK/NIE)

2. Niech $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 < 1 + z^2\}$.

Czy zbiór H jest ograniczony? (TAK/NIE)

Czy zbiór H jest otwarty? (TAK/NIE)

Czy zbiór H jest zwarty? (TAK/NIE)

Czy dla każdego $r > 0$ zbiór H zawiera pewną kulę o promieniu r ? (TAK/NIE)

3. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leq 0 \\ a + x \ln x & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad \text{jest ciągła?}$$

Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leq \frac{\pi}{4}, \\ ax - 1 & \text{dla } x > \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{jest ciągła?}$$

Ile rozwiązań w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ma równanie $\operatorname{tg} x = x$?

Ile rozwiązań w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ma równanie $\operatorname{tg} x = 2x$?

4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

Ile wynosi $\operatorname{grad} f(0, 0)$?

Ile wynosi $\operatorname{grad} f(1, 1)$?

Czy $\operatorname{grad} f(x, y)$ istnieje dla wszystkich $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? (TAK/NIE)

Czy funkcja f jest klasy C^1 ? (TAK/NIE)

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

5. Czy funkcja rzeczywista ciągła f określona na domkniętym i ograniczonym zbiorze $A \subset \mathbb{R}^k$ przyjmuje zawsze minimum? (**TAK/NIE**)
- Czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 , taka że $\text{grad } f(x, y) = (0, 0)$ dokładnie w jednym punkcie (x, y) , ma zawsze ekstremum lokalne? (**TAK/NIE**)
- Ile minimów lokalnych ma funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^4 + 3y^6 + 1$?
- Ile maksimów lokalnych ma funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^4 + 3y^6 + 1$?
6. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.
- Ile wynosi minimum funkcji f ?
- Ile wynosi maksimum funkcji f ?
- Ile wynosi minimum funkcji f obciętej do brzegu zbioru A ?
- Ile wynosi maksimum funkcji f obciętej do brzegu zbioru A ?
7. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.
- Jaka jest liczba punktów zerowania się gradientu funkcji f ?
- Jaka jest liczba punktów, gdzie funkcja f przyjmuje minimum lokalne?
- Jaka jest liczba punktów, gdzie funkcja f przyjmuje maksimum lokalne?
- Jaka jest liczba punktów siodłowych funkcji f ?
8. Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.
- Wypisz punkty zerowania się gradientu funkcji f (lub stwierz, że ich nie ma).
- Wypisz punkty, w których f ma lokalne minimum (lub stwierz, że ich nie ma).
- Wypisz punkty, w których f ma lokalne maksimum (lub stwierz, że ich nie ma).
- Wypisz punkty siodłowe funkcji f (lub stwierz, że ich nie ma).
9. Czy istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ taki, że obrazem zbioru $\{(x, y) : x^2 - y^2 < 1\}$ jest zbiór $\{(x, y) : -1 < y < 1\}$? (**TAK/NIE**)
- Czy istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ taki, że obrazem zbioru $\{(x, y) : x^2 - y^2 > 1\}$ jest zbiór $\{(x, y) : y > 0\}$? (**TAK/NIE**)
- Czy istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ taki, że obrazem zbioru $\{(x, y) : x^2 - y^2 > 1\}$ jest zbiór $\{(x, y) : (x - y)(x + y) > 0\}$? (**TAK/NIE**)
- Czy istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ taki, że obrazem zbioru $\{(x, y) : y < x^2\}$ jest zbiór $\{(x, y) : y > 0\}$? (**TAK/NIE**)
10. Czy funkcja $y(x) = x + \cos \frac{x}{2}$ jest dyfeomorfizmem \mathbb{R} na \mathbb{R} ? (**TAK/NIE**)
- Czy funkcja $y(x) = 2x - \cos 2x$ jest dyfeomorfizmem \mathbb{R} na \mathbb{R} ? (**TAK/NIE**)
- Czy każde odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^1 i takie, że $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ jest lokalnie odwracalne? (**TAK/NIE**)
- Podaj równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ w punkcie $(2, -1, 5)$.