

Analiza matematyczna na Wydziale Nauk Ekonomicznych
rok akademicki 2010/11, semestr letni
I kolokwium, 15 kwietnia 2011 r.

Imię i nazwisko

Numer indeksu

Nazwisko prowadzącego ćwiczenia

UWAGA! W każdym kwadracie należy wpisać **T** (tak) lub **N** (nie), w zależności od tego, które stwierdzenie jest prawdziwe lub fałszywe. Każdy z czterech podpunktów zadania może być prawdziwy lub fałszywy niezależnie od pozostałych. Za każdy poprawnie wypełniony kwadrat otrzymuje się 0,25 punktu (max. 10 punktów). Poza tym, za każde poprawne wypełnienie wszystkich czterech podpunktów zadania otrzymuje się 1 punkt dodatkowy (max. 10 dodatkowych punktów). Całkowita suma punktów jest zaokrąglana w górę do pełnych połówek punktów.

1. Całka $\int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx$

- ☐ jest liczbą wymierną,
- ☐ jest większa od $\frac{1}{3}(\sqrt{6}-1)$,
- ☐ jest większa od $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$,
- ☐ jest równa $+\infty$ jako całka niewłaściwa.

2. Dla całek niewłaściwych

- ☐ zachodzi równość $\int_{-\infty}^0 e^x dx = -\int_0^1 \ln x dx$,
- ☐ dla każdego $p < 0$, $\int_0^1 x^p dx$ istnieje $\iff \int_1^{+\infty} x^p dx$ istnieje,
- ☐ prawdą jest, że $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ istnieje,
- ☐ zachodzi równość: $2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

3. Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, którego suma jest równa $\frac{1}{3+x^2}$ w otoczeniu $x_0 = 0$

- ☐ jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- ☐ jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ spełniających warunek $|x| < \sqrt{3}$,
- ☐ spełnia warunek $a_1 = 0$,
- ☐ spełnia warunek $a_{2011} > 0$.

4. Zbiór $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, xy = z, x^2 + y^2 \leq 1\}$ jest:

- ☐ otwarty,
- ☐ domknięty,
- ☐ ograniczony,
- ☐ zwarty.

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

5. Granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

- ☐ jest dodatnia,
- ☐ jest równa $+\infty$,
- ☐ nie istnieje,
- ☐ jest taka sama jak $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$.

6. Prawdą jest, że:

- ☐ każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ posiada funkcję odwrotną,
- ☐ jeśli $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest ciągła, to $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \|f(x,y)\| = +\infty$,
- ☐ funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{jeśli } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{jeśli } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

- ☐ jest ciągła w punkcie $(0,0)$,
- ☐ jeśli $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest ciągła, to istnieją obie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

7. Gradient funkcji $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_k) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$ w punkcie $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

- ☐ istnieje dla każdego \mathbf{x} ,
- ☐ nie istnieje dla $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- ☐ jest równy $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- ☐ ma normę 1 dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

8. Niech $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ dla $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Wtedy:

- ☐ dla każdych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$,
- ☐ dla każdych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$,
- ☐ istnieją $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ takie, że $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|$,
- ☐ istnieją $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ takie, że $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|$.

9. Funkcja $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y$ określona na kwadracie $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$

- ☐ przyjmuje minimum we wnętrzu Q ,
- ☐ przyjmuje maksimum we wnętrzu Q ,
- ☐ przyjmuje minimum w wierzchołkach kwadratu Q ,
- ☐ przyjmuje minimum równe -4 .

10. Niech $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Wtedy:

- ☐ f osiąga minimum w pewnym punkcie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
- ☐ f osiąga maksimum w pewnym punkcie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, przy czym $f(x_0, y_0) < 1$,
- ☐ f nie osiąga ekstremum właściwego (silnego) w żadnym punkcie swojej dziedziny,
- ☐ istnieje punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ taki, że f osiąga w (x_0, y_0) maksimum lokalne, ale f nie osiąga w punkcie (x_0, y_0) maksimum.