

Analiza matematyczna II, Wydział Nauk Ekonomicznych
rok akademicki 2021/22, semestr letni
I kolokwium, 22 kwietnia 2022 r.

Imię i nazwisko

Nr indeksu

Nazwisko prowadzącego ćwiczenia

UWAGA! Test składa się z 10 zadań (przy każdym zadaniu podana jest liczba punktów, którą można otrzymać za w pełni poprawną odpowiedź do tego zadania). Prosimy wpisywać tylko wyniki (bez obliczeń), brudnopisów prosimy nie oddawać. Czas pracy – 90 minut. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących!

1. (2 pkt.) Znaleźć granicę ciągu $\left(\ln\left(\frac{n+2}{1+4n}\right), \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}, \sqrt[n]{n!}, \frac{\sin n}{n}\right)$ w \mathbb{R}^4 lub wpisać NIE ISTNIEJE, jeżeli granica nie istnieje.

Odpowiedź:

2. (1,5 pkt.) Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^\infty \frac{x}{x^4 + 4x^2 + 8} dx$ lub wpisać NIE ISTNIEJE, jeżeli podana całka nie istnieje.

Odpowiedź:

3. (1,5 pkt.) Niech $f : (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x, y, z) = \exp(x^2 \cdot \frac{y}{z}) + \sin(\pi z^2)$. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(1, 1, 1)$.

Odpowiedź:

4. (1,5 pkt.) Podać dowolne wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$, dla których funkcja f jest ciągła

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{a - a \cos(\sqrt{|xy|})}{|xy|} & \text{dla } x \neq 0, y \neq 0 \\ b & \text{dla } x = 0, \\ c & \text{dla } y = 0 \end{cases}$$

oraz $f(0, 0) > 0$.

Odpowiedź:

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

5. (1,5 pkt.) Obliczyć całkę oznaczoną $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$.

Odpowiedź:

6. (1,5 pkt.) Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^1 x^5 \sqrt{2 - x^3} dx$.

Odpowiedź:

7. (1 pkt.) Obliczyć całkę nieoznaczoną. $\int \frac{x - 1}{x^2 + 2x} dx$.

Odpowiedź:

8. (1,5 pkt.) Niech $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ oraz $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będą zadane wzorami:

$$f(x, y) = \left(xy, \arctan(x + y), \frac{x}{y} \right)$$

$$g(u, v, w) = (u + v + w, uvw).$$

Obliczyć $\langle \vec{u}, D(g \circ f)(2, 1) \vec{v} \rangle$, gdzie $\vec{u} = [1, 0]^T$ oraz $\vec{v} = [1, 1]^T$.

Odpowiedź:

9. (2 pkt.) Dla każdej z poniższych funkcji f określonych na parach wektorów $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$ odpowiedzieć TAK (odp. NIE) jeżeli dana funkcja jest (odp. nie jest) iloczynem skalarnym:

$f(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ TAK/NIE:

$f(x, y) = 3x_1 y_1 + x_2 + y_2$ TAK/NIE:

$f(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ TAK/NIE:

$f(x, y) = x_1 + 3x_2 + 4y_1 + 4y_2$ TAK/NIE:

10. (1 pkt.) Obliczyć cosinus kąta pomiędzy wektorami $\vec{u} = [3, 4, 0]$, $\vec{v} = [1, 1, \sqrt{2}]$.

Odpowiedź: