

Analiza matematyczna II, Wydział Nauk Ekonomicznych
rok akademicki 2012/13, semestr letni
I kolokwium, 12 kwietnia 2013 r.

Imię i nazwisko

Nr indeksu Nazwisko prowadzącego ćwiczenia

UWAGA! Test składa się z 15 równopunktowanych zadań, po 1 punkcie za każde zadanie. Prosimy wpisywać tylko wyniki (bez obliczeń), brudnopisów prosimy nie oddawać. Czas pracy – 90 minut. Nie wolno używać kalkulatorów!

1. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx$. **Odpowiedź:**

2. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - x^2} dx$. **Odpowiedź:**

3. Rozstrzygnąć, czy:

całka $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ jest dodatnia, ujemna czy zerowa **Odpowiedź:**

całka $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ jest mniejsza, większa czy równa całce $\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ **Odpowiedź:**

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ jest zbieżny na podstawie kryterium całkowego **Odpowiedź:**

4. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^4} dx$. **Odpowiedź:**

5. Niech $\Gamma(x)$ dla $x > 0$ oznacza funkcję gamma Eulera. Rozstrzygnąć, czy:

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-t} dt$ **TAK/NIE:** $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ **TAK/NIE:**

$\Gamma(n) = n!$ dla $n \in \mathbb{N}$ **TAK/NIE:** $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ **TAK/NIE:**

6. Definiujemy iloczyn skalarny w \mathbb{R}^2 przez $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\star} = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$, gdzie $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Niech $\|\vec{x}\|_{\star}$ oznacza normę wektora \vec{x} indukowaną przez ten iloczyn skalarny. Opisać równaniem zbiór $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1, x_2)\|_{\star} = 5\}$.

Odpowiedź:

7. Rozstrzygnąć, czy zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt[8]{x^8 + y^8 + z^8} < 5\}$ jest:

wypukły **TAK/NIE:**

spójny **TAK/NIE:**

zwarty **TAK/NIE:**

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

8. Rozstrzygnąć, czy zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 2, x < -2, z < -2\}$ jest:

otwarty TAK/NIE:

domknięty TAK/NIE:

ograniczony TAK/NIE:

9. Rozstrzygnąć, czy zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 > z\}$ jest:

ograniczony TAK/NIE:

wypukły TAK/NIE:

spójny TAK/NIE:

10. Znaleźć poniższą granicę lub stwierdzić, że nie istnieje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \arctg 2^n}{1 + n^2}, \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} \right)^{2n} \right)$$

Odpowiedź:

11. Znaleźć poniższą granicę lub stwierdzić, że nie istnieje:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 + y^2}$$

Odpowiedź:

12. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{xy^2} & \text{dla } x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \text{ lub } y = 0 \end{cases}$$

jest ciągła w punktach:

(0, 0) TAK/NIE:

(0, 1) TAK/NIE:

(1, 0) TAK/NIE:

(1, 1) TAK/NIE:

13. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy + 1 > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x^2-y^2} & \text{dla } x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{dla } x^2 = y^2 \end{cases}$$

jest ciągła w punktach:

(0, 0) TAK/NIE:

(0, 1) TAK/NIE:

(1, 1) TAK/NIE:

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ TAK/NIE:

14. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f określonej wzorem $f(x, y) = x^{\sqrt{y}}$ dla $x > 0, y > 0$.

Odpowiedź:

15. Obliczyć gradient funkcji f w punkcie $(1, 1, -1, -1)$ dla $f(x, y, z, t) = \sqrt{xyzt}$.

Odpowiedź: