

Egzamin z Analizy Matematycznej II

II termin

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2016/17, semestr letni

30 sierpnia 2017 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Niech

$$F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

Obliczyć $F'(0)$.

2. Niech

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = x^2 + y^2, 3x + 2y + z = 10\}.$$

- a) Uzasadnić, że M jest rozmaitością klasy C^1 .
- b) Wyznaczyć punkt $p \in M$ położony najbliżej początku układu współrzędnych, tzn. punktu $(0, 0, 0)$.
- c) Wyznaczyć (liniową) przestrzeń styczną do M w punkcie p .

3. Obliczyć całkę niewłaściwą

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\operatorname{tg} x} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 dx$$

lub uzasadnić, że powyższa całka niewłaściwa nie istnieje.

Informacje przydatne lub nie: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $(\operatorname{ctg} x)' = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$.

4. Znaleźć i sklasyfikować (lok. min/lok. maks./ punkt siodłowy) punkty krytyczne funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x, y, z) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 + 2y^2.$$

5. Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2017, z = 5\}$.

- a) Znaleźć należący do prostej M punkt P położony najbliżej początku układu współrzędnych, tzn. punktu $(0, 0, 0)$.
- b) Znaleźć należący do sfery $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ punkt P' położony najbliżej punktu P .