

# Egzamin z Analizy Matematycznej II

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2015/16, semestr letni

22 czerwca 2016 r.

**UWAGA:** Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Znaleźć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^5 + x^3 + 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx.$$

2. Obliczyć objętość zwartego podzbioru przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  ograniczonego płaszczyzną  $z = 0$  oraz wykresem paraboloidy  $z = 4 - x^2 - y^2$ .

3. Wyznaczyć należący do elipsoidy opisanej równaniem

$$x^2 + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{16} = 1$$

punkt  $(x_0, y_0, z_0)$ , który leży najbliżej płaszczyzny opisanej równaniem

$$x + y + z = 10.$$

4. Znaleźć i sklasyfikować (lok. min/lok. maks./ punkt siodłowy) punkty krytyczne funkcji  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

$$f(x, y, z) = x^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz + 3z.$$

5. Niech

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x > 0, y > 0, x^2 + y^2 - z^2 = t, z = \ln(2x + y)\}.$$

a) Sprawdzić, czy  $M$  jest rozmaitością klasy  $C^1$ .

b) Wyznaczyć afiniczną przestrzeń styczną do  $M$  w punkcie  $a = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{16})$  w postaci

$$\{(x, y, z, t) = \varphi(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

dla pewnej funkcji afinicznej  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ .