

Egzamin z Analizy Matematycznej II

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2017/18, semestr letni

14 czerwca 2018 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Niech $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem $f(x, y) = (\log_3 \frac{x}{y}, \arctg(xy))$.

a) (2 pkt.) Wskazać należący do dziedziny funkcji f punkt (x_0, y_0) taki, że $f(x_0, y_0) = (2, \frac{\pi}{4})$.

b) (2 pkt.) Uzasadnić, że istnieje otoczenie U punktu (x_0, y_0) oraz otoczenie V punktu $(2, \frac{\pi}{4})$ takie, że funkcja $f|_U : U \rightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1 .

c) (6 pkt.) Wyznaczyć $(MJf^{-1})(2, \frac{\pi}{4})$.

2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem $f(x, y) = x^2y^3 - 6x^3y^2 + 2xy - 1$.

a) (2 pkt.) Wskazać $y_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $f(\frac{1}{2}, y_0) = 0$.

b) (2 pkt.) Wykazać, że istnieje otoczenie U punktu $x_0 = \frac{1}{2}$ oraz otoczenie V punktu y_0 i funkcja $y : U \rightarrow V$ klasy C^1 taka, że $y(\frac{1}{2}) = y_0$ i $f(x, y(x)) = 0$ dla każdego $x \in U$.

c) (6 pkt.) Obliczyć $y'(\frac{1}{2})$.

3. Obliczyć:

a) (5 pkt.) całkę niewłaściwą

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

lub uzasadnić, że powyższa całka niewłaściwa nie istnieje,

b) (5 pkt.) całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{5x^3 + x^2 - 2x + 2}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2} dx.$$

4. (10 pkt.) Znaleźć i sklasyfikować (lokalne minimum/ lokalne maksimum/ punkt siodłowy) punkty krytyczne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = 2x^2 + y^3 - x^2y - 3y.$$

5. (10 pkt.) Niech P będzie płaszczyzną opisaną równaniem $5x + 7y - 3z + 10 = 0$ oraz niech E będzie elipsoidą opisaną równaniem $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$. Wyznaczyć punkt $A \in P$ oraz punkt $B \in E$ takie, że

$$\|A - B\| = \min_{(x_1, y_1) \in P, (x_2, y_2) \in E} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|.$$