

Egzamin z Analizy Matematycznej II

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2021/22, semestr letni

22 czerwca 2022 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Portfelem inwestycyjnym nazywamy dowolny wektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ taki, że

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Oczekiwaną stopę zwrotu z portfela x wyznacza się za pomocą funkcji $g(x) = \langle \mu, x \rangle$, zaś ryzyko portfela x wyznacza się za pomocą funkcji $f(x) = \langle x, \Sigma x \rangle$, gdzie

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wśród portfeli o oczekiwanej stopie zwrotu równej 2, wyznaczyć portfel o minimalnym ryzyku.

2. (10 pkt.) Rozważmy równanie $(x^2 + y^2 + 2z^2)^{\frac{1}{2}} = \cos z$.

a) Uzasadnić, że istnieje otoczenie U punktu $(0, 0)$ i funkcja $y : U \rightarrow \mathbb{R}$ kl. C^1 t. że $y(0, 0) = 1$ oraz dla każdego punktu $(x, z) \in U$ spełnione jest równanie $(x^2 + (y(x, z))^2 + 2z^2)^{\frac{1}{2}} = \cos z$.

b) Obliczyć $\nabla y(0, 0)$.

3. Obliczyć:

a) (5 pkt.) całkę niewłaściwą $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

lub uzasadnić, że powyższa całka niewłaściwa nie istnieje,

b) (5 pkt.) całkę podwójną

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} x \cdot \max(x, y) dx dy.$$

4. (10 pkt.) Prognozowany miesięczny zysk producenta piłek golfowych wyraża się wzorem $f(x, y) = 48x + 96y - x^2 - 2xy - 9y^2$, gdzie x oznacza liczbę piłek sprzedanych w danym miesiącu, zaś y oznacza liczbę godzin reklamy wykupionych na dany miesiąc.

Wyznaczyć maksymalny prognozowany zysk możliwy do osiągnięcia w danym miesiącu, jeżeli wiadomo, że sprzedaż piłek nie może przekroczyć 50000 sztuk, zaś maksymalna liczba godzin reklam, które producent może wykupić nie może przekroczyć 25.

5. (10 pkt.) Do afinicznej płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ w punkcie $(1, 1, 2)$ należą trzy punkty niewspółliniowe zadane przez $(1, 0, z_1)$, $(0, 1, z_2)$, $(1, 2, z_3)$. Obliczyć promień oraz wyznaczyć środek okręgu zawierające te punkty.