

Egzamin z Analizy Matematycznej II

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2016/17, semestr letni

22 czerwca 2017 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Niech $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Znaleźć całkę podwójną

$$\iint_D x \cdot \max(x, y) \, dx dy.$$

2.

a) Wykazać, że istnieje otoczenie U punktu $x_0 = 4$ oraz otoczenie V punktu $y_0 = 3$ i funkcja $y : U \rightarrow V$ klasy C^1 taka, że $y(4) = 3$ i $x^2 - 3xy(x) + (y(x))^3 - 7 = 0$ dla każdego $x \in U$.

b) Obliczyć $y'(4)$.

c) Przybliżyć wartość $y(4 + \frac{1}{10})$, stosując pierwszy wielomian Taylora funkcji y .

3. Obliczyć całkę niewłaściwą

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

lub uzasadnić, że powyższa całka niewłaściwa nie istnieje.

4. Znaleźć i sklasyfikować (lokalne minimum/ lokalne maksimum/ punkt siodłowy) punkty krytyczne funkcji $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}.$$

5. Niech M będzie częścią wspólną stożka opisanego równaniem $x^2 + y^2 = z^2$ dla $z \geq 0$ oraz płaszczyzny opisanej równaniem $z = 1 + x$. Wyznaczyć punkt (x_0, y_0, z_0) zbioru M położony najbliżej początku układu współrzędnych, tzn. punktu $(0, 0, 0)$.