

Egzamin z Analizy Matematycznej II

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2018/19, semestr letni

12 czerwca 2019 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. (10 pkt.) Wskazać funkcję $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 taką, że

$$f(1, 1) = \frac{\pi}{4} \text{ i } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y + \frac{x^2}{y}} \text{ oraz } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

2. Niech $f : (1, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie funkcją daną wzorem $f(x, y) = (x^y, 2^{xy})$.

- a) (2 pkt.) Wskazać punkt (x_0, y_0) taki, że $f(x_0, y_0) = (4, 16)$.
b) (2 pkt.) Wykazać, że istnieje otoczenie U punktu (x_0, y_0) takie, że f jest dyfeomorfizmem klasy C^1 na U .
c) (6 pkt.) Wyznaczyć $MJf^{-1}(4, 16)$ (macierz Jacobiego funkcji odwrotnej do f obliczoną w punkcie $(4, 16)$).

3. Obliczyć:

- a) (5 pkt.) całkę oznaczoną

$$\int_0^{\pi} x \sin x \cos x dx,$$

- b) (5 pkt.) całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + x - 1}{x^3 + x^2} dx.$$

4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem:

$$f(x, y) = (x + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}.$$

- a) (3 pkt.) Uzasadnić, że funkcja f osiąga wartość największą oraz najmniejszą.
b) (7 pkt.) Wyznaczyć wartość największą oraz najmniejszą funkcji f .

5. Zbiór $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ przecięto płaszczyzną o równaniu $x + 2y + 3z = 0$ i otrzymano przekrój P

- a) (6 pkt.) Wyznaczyć punkty przekroju P o największej oraz o najmniejszej wartości współrzędnej z .
b) (4 pkt.) Dla każdego z punktów wyznaczonych w a) wskazać afiniczną przestrzeń styczną do P w tym punkcie.