

Die grafic dundielich Eperwary<sup>31</sup> shovobitagrast  
Slojerenie o mohsymalnej vodre pry poroy  
matspuijcej troskan vlosji duelni.

### Toicdrenie Eperwaryego

Niech  $G = (V, E)$  b'flic grafem dundielnym  
oraz niech  $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  b'flic funkcijs vospo.  
Utedy vospo najcinego slojerenie jat vone  
vole ~~maksimalnego~~ polynia viendiatlarego.

Polynie viendiatlare to vektor  $y: V \rightarrow \mathbb{R}^+$   
takie ze  $y_u + y_v \geq w(uv)$  dla  
wslej krawosti  $uv \in E$ . Vospo polynia  
to same vospo vysklid overdiatlare  $y(V) = \sum_{v \in V} y_v$ .

### Dowod:

Die dowody slojerenie M orz dowody  
polynia y man:

$$w(M) = \sum_{uv \in M} w(uv) \leq \sum_{uv \in M} (y_u + y_v) \leq \sum_{v \in V} y_v. \quad (*)$$

Malego vospo maksi najcinego slojerenie  
jat nie vyslone mi vospo ~~maksimalnego~~  
polynia

Aby ten poliorz mieliśmy wybrany dla  
przez minimum poligrafie g. Niech  $F$  będzie  
zbiorem krawędzi dla którego zadowalni  
mieliśmy  $y_u + y_v = w(uv)$  oraz nich  
 $R$  będzie zbiorem wierzchołków dla których  
 $y_v > 0$ .

Jeżeli  $F$  robiące skojarzenie dla poligrafie  
 $R$ , to wtedy mamy

$$w(M) = \sum_{u \in M} w(uv) = \sum_{u \in M} y_u + y_v = \sum_{v \in R} y_v = \sum_{v \in V} y_v.$$

Makroż zauważ, iż skojarzenie poligrafie  
 $R$  nie istnieje. Wtedy z twierdzenia Halle  
istnieje zbiór  $S \subseteq R$  taki, iż

Ponadto, iż istnieje nie otwarte skojarzenie  
poligrafie  $R \setminus S$  i  $V$  bądź  $R \cap S$ , gdzie  
a i  $w$  to połowa  $V$  taki, iż  $E \subseteq U \times w$ .  
Zatem  $w(M)$  poligrafie  $R \setminus S$ , a  $N$  poligrafie  $R \cap S$   
nie jest ani  $M$  ani  $w$  dla nich istnieje zbiór

Demot:

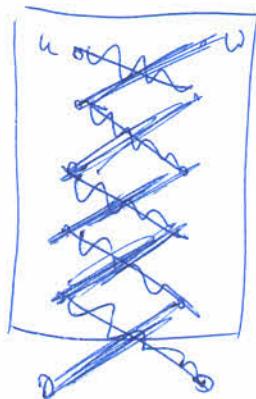
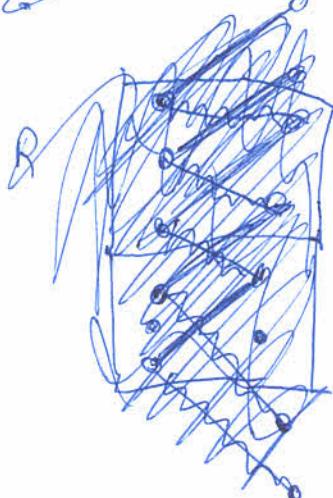
Intege slojvenie polynojece R  
utte gty  $|M(s)| \geq |S|$  alle hordego  
 $S \subseteq R \cap V$  over alle hordego  $S \subseteq R \cap W$ .

Ravol:

Vnukovne  $\Rightarrow$  jat orginte.

$\Leftarrow$   $\exists$   $\lambda$  2 troskene Helle mon sljone  
slojvene M polynojece  $R \cap V$  over N polynojece  
 $R \cap W$ . fiedi iode r tyh slojveni nje  
polynoje R, to intuje vgl tolje, ic  $M \cap N$   
over uch tolje, ic  $u \in N$ . ~~theck~~  
~~nu i dne si dne~~ ~~u p r e n e m e~~ ~~P r u b o~~

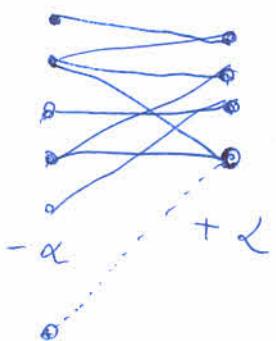
~~M & N~~ ~~u~~ ~~z~~



Udely intuge si dne mon premenne roknojece  
sje s u i hingue s učelju ~~u~~ ~~hingue~~  
m'e molodijm do R.

- 4 -

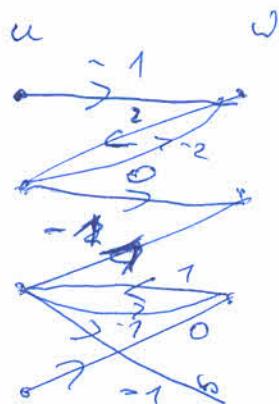
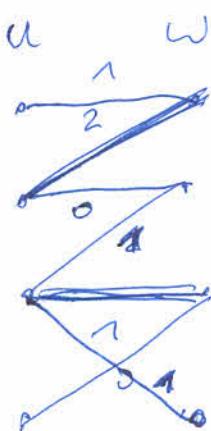
2. denua viana nie istnieje zbiór  $S \subseteq R$ , który nie reprezentuje żadnej krawędzi taki, że  
 $|N(S)| < |S|$ . Wtedy nasz graf jest nieskonczony i istnieje  
 $\lambda > 0$  taki, że jak obrzymy go dalej  
 $\alpha + \lambda$ , over podniesieniu  $S$ , dla  $v \in N(S)$  o  $\lambda$   
to otrzymujemy lepsze położenie wierzchołków:



3. Twierdzenie to Tato rozumieliśmy algorytmem,  
jednak nie będzie on działać w naszych warunkach.  
~~Metoda rekurencyjna~~ Niech  $G = (V, E)$  będzie  
specjalnym drzewem o przekroju  $U, W$   
over  $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  to funkcja wag krawędzi.

Załóżmy od  $M = \emptyset$ . Ma stąd ograniczenia  
przykładowe taki, że ~~do skończonego~~  
~~miejsca~~ ~~do~~ Pośrednie skończone słojenienie  
by mieć extremalne, tzn. będzie to  
najniższe skojarzenie o danym liczbie.

Demo Die situacijen  $M$  ovacim prez  
 $D_m$  shirovog prof otrgovnog prez  $\tau$   
 $\rightarrow$  poprej shirovore kritej kavagli e  
 $\omega_M$  od  $w$  do  $u$  ovor naderie  $\dot{c}^*$   
 dlagosi  $c = \omega_e$ , ovor prez shirovonic  
 kritej kavagli e ~~postupno~~ od  $u$  do  $w$  i  
 naderie  $\dot{c}^*$  dlagosi  $c = -\omega_e$ .



Nek  $U_m$  ovor  $W_m$  ovore zbir  
 vektorskih mnošnjakov prez  $M$  u  
 $U$  ovor  $W$ . Sejli istnije slike  
 $\tau U_m$  do  $W_m$  to možimo najvotno  
 tako slike  $P$  i nek  $M' := M \oplus P$ .  
 Povtorimo napole tolje slike  $\tau$   
 $U_m$  do  $U_m$  ne istnije.

Na koniec distonie tego oponytna  
M jest dla rozlicznych slajowien + 6.

~~Pozwony slajowatym~~  
- M jest rozlicznych slajowien

Podwojny, ie

Twierdzenie: Koide slajowenie M sluchowowe  
o konie distonie oponytna jest ekstremalne.

2 tego twierdzenie mamy wypnac dla nich:

+ ~~Na koniec distonie oponytna jest rozlicznych  
slajowien~~

- rozliczne slajowenice re. orgathich maledomach  
o trojnicie distonie oponytna jest rozlicznych  
slajowienem o profic
- jeli 6 mo dalszale slajowenie, to na  
koniec oponytna maledomach rozliczne dalszale  
slajowenie.

Dowód twierdzenia:

Tera twierdzenie jest prawidłowe dla  $M = \emptyset$ .

Złóżmy teraz, ie M jest ekstremalne, owsaz  
niech P będzie dalszona siecią, owsaz  $M = M \cup P$ .  
Prawoż dalszne ekstremalne slajowienie N  
wymie na  $|M| + 1$ .

Niech  $R_m$  oznacza zbiór wierzchołków w  $D_m$  o największej z  $V_m$ . Polinom, i.e. wzór z  $M$  monom utrymując potencjał p dla podgrupy  $D_m$  indukowanego przez  $R_m$ . Potencjał jest określony na funkcje l. Po powstaniu nowych monomów nie zredukowanych względem których są one ujemne. Później polinom ten jest złączony z tymi potencjałami z podgrupami wierzchołkowymi.

Als  $M = \emptyset$  ustalony  $p(v) := \max_{v \in V} \{u(vw) : w \in E\}$   
Als  $v \in V$  oraz  $p(v) := 0$  dla  $v \in V$ .

Zauważmy teraz, iż dla danych elementów grupowych  $M$  monom potencjału  $D_m[R_m]$ . Zdefiniujmy  $p'(v)$

$$p'(v) = \text{dist}_c(V_m, v) \quad \text{dla } v \in R_m.$$

$p'$  nazywamy potencjałem monomu  $(M + n \text{ kopii})$  połączonym z grafem  $D_m$  po wierzchołkach odległych o  $n$  wierzchołki potencjału p niewłaściwie ujemnych.

Poniewiem tavor (ie  $p'$ ) jat potencjalem s  $P_m \{ R_m \}$ . Niech  $P$  bude sielq  $\cup D_m$  over  $M' = M \oplus P$ .

Rozpiczne rowning, ie mor  $V_{m'} \subseteq V_m$ .  
Co wypoz  $R_{m'} \subseteq R_m$ . Zdobyte telo nie bylo to  
poniewierni  $D_{m'}$  oznaczonej by posz  $R_m$ .  
Poniewierni iedno kweqdi  $D_m$  nie oznaczone  $R_m$ ,  
to  $P$  weqdi  $\cup D_{m'}$  oznaczonej przez  $R_m$  muzi  
leci na siacie  $P$ . Z tego wyniknie, ie  $P$   
zerise sielq wkladajacy do  $R_m \cup D_m$ .  
Aby telo bylo  $P$  muzialoby najpierw oznacze  $R_m$ ,  
a to precy definiuj:  $R_m$ . Dlatego  $R_{m'} \subseteq R_m$ . i  
funkcja  $p'$  jat określona na oryginalny zbiordelny  
 $Q_m \{ R_m \}$ .

Rozwiaz rowning (er kweqdi  $(u,v)$ )  $\cup P_m \{ R_m \}$ .

Jeśli  $(u,v)$  jat leci kweqding  $D_m$ , to  
 $p'(v) \leq p(u) + l(u,v)$ . Jeśli natomiast  
 $(u,v)$  nie jat kweqding  $D_m$  to aleks  
 $(v,u)$  nalezy do  $P$ . Poniewierni  $P$  jat najwolna  
to  $p'(u) = p'(v) + l(v,u)$ , a wiec  
 $p'(v) - p'(u) = -l(v,u) = l(u,v)$ .

jeżeli mówiąc o skojarzeniu o największej wartości  
to mówiąc skojarzeniu albo tym utrudzającym go

$M'$  nie wąże się wypisać niż  $M$ . Gdyż  
utrudzającym go jest  $P_M$  mówiąc skojarzeniu  $2V_M$  do  
 $U_M$  o największej wartości.

Niech  $N$  będące skojarzeniem  $w(n) > w(m)$   
takim, że  $|n| > |m|$ . Wtedy  $N \oplus M$  powinno  
skojarzyć najszczersze względem  $M$ . Jednakże, ~~które~~  
utrudnia to skojarzenie i tym skojarzenie nie może  
leżeć mówiąc o największym wąźku. Skojarzenie ~~powinno być~~  
może być dodatnie bo  $M$  nie wąże  
wypisać niż poprzednie skojarzenie skojarzenia.

Skojarzenie powinno mówiąc o największym  
i najsłabszym. Przeciwnie:

Twierdzenie (Edwards-Karp) O pośredniczku skojarzeniu o największej wartości  
mówiąc o którym mówiąc o skojarzeniu  $D_{\max}(m+n)$ ,  
gdyż jest to skojarzenie o największej wartości skojarzeniu  
o największej wartości.

Zouwien, ic non algaylu nie vole vnuogel  
sky vepi bys doobtue, e vige vnuig  
vepi per -1 vniem telie molic  
slujovene dolonate o nijmicens' vede.

Poljocny teor vigele vigele <sup>polnjetan</sup> slujovene  
oor poljocien vick hothayni.

### Ticadrenic Egeraciego II:

Niech  $\omega = (V, \bar{v})$  budec dvudnickym  
profem periodojnym dolonate slujovene oor  
niech  $\omega: E \rightarrow R$  budec funkcie vogn. Stedy  
ooge nijmicens dolonate slujovene  
jet nöma minimalej vokri  $s(V)$  gliche  $s: V \rightarrow R$   
oor  $y_u + y_v \geq w_e$  dla kolido  $e = uv$ .

### Ticadrenic Egeraciego I

$$\max_{\text{Ticadrenic Egeraciego II}} \{ \omega^T x \mid x \geq 0, Ax \leq 1 \} = \min \{ s^T 1 \mid y \geq 0, s^T A \geq \omega^T \}$$

$$\max \{ \omega^T x \mid x \geq 0, Ax = 1 \} = \min \{ s^T 1 \mid s^T A \geq \omega^T y \}$$

Jak udovodni  $\mathbb{I}^{\text{-12-}} \supseteq \mathbb{I}$ ?

Dovol: Organise ale dovoleno  $M$  je mož

$$\omega(M) = \sum_{e \in M} \omega_e \not\geq \sum_{v \in V} g_v = g(V).$$

Nech  $M$  bude složenina dvojnatym o mohym vede. Rovnix prof  $D = (V, E)$ , v ktorom Poncar M je majetne to  
i  $D_M$  ne ma cisti o cijennej vede.  
O vtedu z tym cistnej funkcie potencielu  
 $p: V \rightarrow \mathbb{R}$  telor (ie  $p(u, v) \geq p(v) - p(u)$ ).

Definiujmy  $g_v := -p(v)$  ale  $v \in V$

$g_v := p(v)$  ale  $v \in \omega$

Ale Poncar ušli si posun od  $V$  do  $\omega$  nary

$$-\omega(u, v) = p(u, v) \geq p(v) - p(u) = -g_v - g_u$$

$$g_v + g_u \geq \omega(u, v)$$

Notoriot ale Poncar  $u, v \in M$  mož užel o stupni zero ale skôr ako z  $z$  krovodi  $uv$  i  $vu$ . Potago pre  $\omega(uv) = g_u + g_v$  ale ~~ale~~ a vtedy tie  $g(v) = \omega(v)$ .

Zauważmy, że do mówienia o tym sporób  
może przyjmuwać wartości ujemne. Co jasli dając  
mówiąc pozytywne przedstawienie?

Mówiąc mówiąc skojarzenia o rojachnej  
odbre M i wypatrując je dla konkretnego  
skojarzenia M' poprzez domowe katalogi o  
odbre O. Naleganie mówiąc daje nam  
nasze mówiąc mówiąc skojarzenia punktys  
a połączonych  $p(v) = \text{dist}(v_m, v)$ . Zauważmy, że  
 $p(v) = 0$  dla  $v_m \in \text{katalogi}$ , co wypływa  
że  $p(v) = 0$  dla  $v \in \omega_m$  bo dla każdego  
 $v \in \omega_m$  istnieje wiele o odbre O i  $v_m$   
oraz  $v \in D_m$  nie istnieje wiele o  
ujemnej odbre i  $v_m$  do  $\omega_m$ .

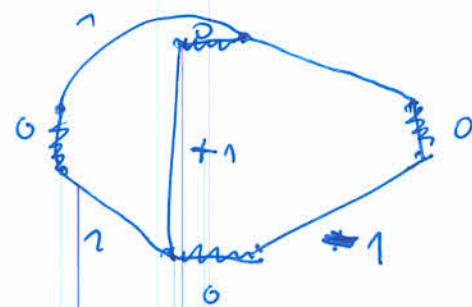
Funkcja  $s_v := -p(v)$  dla  $v \in V$

$s_v := p(v)$  dla  $v \in V$

jest pozytywnie przedstawieniem o odbre  
mówiąc odbre M.

Policzymy teraz jak wykonać algorytm dla skojarzeń do linii odległości i grafie skierowane. Algorytm ten nazywa się skierowanymi obliczaniem średniej  $s: V \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $y_u + s_v \geq w(uv)$ .

Niech  $D = (N, A)$  będzie grafem skierowanym o węzłach skierowanych (wierzchołki dorywczo) przedstawionym na rysunku. Wysokość  $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona wtedy, gdyż  $v_1$  jest wyższy od  $v_2$ , jeśli  $v_1$  jest skierowany do  $v_2$ . Dla krawędzi  $(u, v) \in A$  dodajemy do  $\ell$  kwotę  $w_{uv}$  o wadze  $\ell(u, v)$ . Dodajmy takie do  $\ell$  kwoty dla  $v_1, v_2$  o wadze 0 dla każdego  $u \in N$ .



Wykonajemy skojarzenie dla  $G$  modyfikując skojarzenie dorywcze  $M_0$  najniższą wadą. Jeżeli  $v(M) \geq 0$  to  $v(N)$  jest mniejsza niż w skojarzeniu dorywczym.

U przednim przykładu mówimy o polinomie  
potem o jego funkcji potęgowej  
grafie  $D_M$  dla  $M = \{v_1 v_2 : v \in N\}$ . Odejmując  
z grafie  $D_M$  są takie same zera i opis  $N$ .