Czy elementarna teoria kolejek jest rozstrzygalna?

Andrzej Salwicki
Instytut Informatyki UW
salwicki@mimuw.edu.pl

5 marca 2004

Jeżeli tak jest, to posiada ona model programowalny i nieosiągalny. W takim modelu z pewnych kolejek można wyjmować elementy bez końca. Przypomnijmy, że elementarna teoria stosów jest rozstrzygalna. zob.[G. Mirkowska, A. Salwicki, M. Srebrny, A. Tarlecki *Programmable data types*, SIAM Journal on Computing, 2001 pp.]

W teorii kolejek uniwersum jest unią dwu rozłącznych zbiorów E (elementów) i Q (kolejek).

Sygnatura:
operacje
$insert : E \times Q \longrightarrow Q$
$first : Q \longrightarrow E$
$delete : Q \longrightarrow Q$
relacje
równosci =
dokładniej, dwie funkcje charakterystyczne relacji
$\stackrel{E}{=}: E \times E \longrightarrow \{true, false\}$
$\stackrel{Q}{=}: Q \times Q \longrightarrow \{true, false\}$
$empty : Q \longrightarrow \{true, false\}$

Aksjomaty

$$(\forall q \in Q)(\forall e \in E)\ \neg empty(insert(e, q))$$

Nie jest pusta kolejka do której wstawiono jakis element

$$(\forall q \in Q)(\forall e \in E)\neg empty(q) \Longrightarrow first(insert(e, q)) \stackrel{E}{=} first(q)$$

Dla kolejki niepustej, wstawiany element trafia na koniec

$$(\forall q \in Q)(\forall e \in E)\ empty(q) \Longrightarrow first(insert(e,q)) \stackrel{E}{=} e$$

Po wstawieniu elementu e do pustej kolejki, e jest pierwszym elementem nowoutworzonej kolejki

$$(\forall q \in Q)(\forall e \in E)\ \neg empty(q) \Longrightarrow delete(insert(e,q)) \stackrel{Q}{=} insert(e, delete(q))$$

Dla kolejki niepustej operacje insert i delete są przemienne

$$(\forall q \in Q)(\forall e \in E) empty(q) \Longrightarrow delete(insert(e,q)) \stackrel{Q}{=} q$$

Jeżeli kolejka jest pusta, to wstawienie dowolnego elementu, a potem usunięcie z kolejki elementu daje w wyniku kolejkę pustą

Oprócz tych aksjomatów przyjmujemy jeszcze aksjomaty identyczności.
Czy sytuacja zmieni się gdy dodamy schemat indukcji strukturalnej?

$$\{(empty(q) \Longrightarrow \alpha(q)) \wedge (\forall q \in Q)(\forall e \in E)[\alpha(q) \Longrightarrow \alpha(q/insert(e,q)]\} \Longrightarrow (\forall q \in Q)\alpha(q)$$

W powyższym schemacie α jest dowolną formułą pierwszego rzędu zapisaną w sygnaturze elementarnej teorii kolejek, q jest zmienną wolną w tej formule.