

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 1

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) Jacek i Agatka stoją koło siebie,
 - b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.
2. Ze zbioru n elementowego losujemy ze zwracaniem r elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?
3. Z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek wylosowano czteroosobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wchodzi
 - i) przynajmniej jeden chłopiec,
 - ii) więcej chłopców niż dziewczynek.
4. Siedmiu pasażerów przydzielono losowo do trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
 - i) wszyscy trafili do jednego wagonu,
 - ii) w każdym wagonie znalazło się przynajmniej dwóch z tych pasażerów?
5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz N otrzymał
 - a) wszystkie karty różnej wartości;
 - b) dokładnie dwa piki;
 - c) co najmniej dwa piki;
 - d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
 - e) układ 4432;
 - f) układ 4441.
6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w pokera talią 24 kartową gracz otrzyma z ręki
 - a) parę
 - b) dwie pary
 - c) straighta
 - d) trójkę
 - e) fulla
 - f) karete
 - g) kolor
 - h) pokera.
7. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
 - a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
 - b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
 - c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

8. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w lotto spośród 49 liczb wylosowana będzie szóstka nie zawierająca dwu kolejnych liczb.
9. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?
b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?
10. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.
11. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów przy czym $k \leq n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) wśród wylosowanych butów jest co najmniej jedna para,
 - b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.
12. a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy losowym umieszczeniu N listów w N zaadresowanych kopertach żaden list nie trafi do właściwego adresata?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafi do właściwych adresatów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 2

1. Z przedziału $[2, 7]$ wybrano na chybił trafił dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - i) obie wybrane liczby są większe niż 5,
 - ii) przynajmniej jedna z wybranych liczb jest większa niż 5,
 - iii) suma wybranych liczb jest większa niż 5.
2. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano w sposób losowy dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jaka jest szansa, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?
3. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.
4. (Paradoks Bertranda) Z okręgu wybrano w sposób losowy cięciwę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ma ona długość większą od długości boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg.
5. Odcinek PQ jest średnicą okręgu. Na okręgu wybieramy na chybił trafił dwa punkty A i B . Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jeden z łuków AB zawiera oba punkty P i Q ?
6. Na nieskończoną szachownicę o boku 1 rzucono monetę o średnicy $\frac{2}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta
 - a) znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól,
 - b) przetnie się z dwoma bokami szachownicy?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 3

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ takie, że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.
2. Rzucamy kostką do wypadnięcia pierwszej szóstki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - i) Rzucimy dokładnie n razy, $n = 1, 2, \dots$
 - ii) Wyrzucimy dokładnie n jedynek, $n = 0, 1, 2, \dots$
3. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A)$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$ i $\mathbb{P}(B \setminus A)$.
4. Załóżmy, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C) = 3\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C)$. Wykaż, że $1/6 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1/4$.
5. Załóżmy, że $\mathbb{P}(A) \geq 2/3$, $\mathbb{P}(B) \geq 2/3$, $\mathbb{P}(C) \geq 2/3$ i $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$.
6. Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, \dots, A_n$ zachodzą nierówności

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

7. Wyznacz σ ciało generowane przez
 - a) dwa zbiory A i B ;
 - b) trzy zbiory A , B i C .
8. Czy istnieje σ -ciało złożone z 7-elementów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 4

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) Jacek stoi bezpośrednio przed Agatką, jeśli Agatka stoi bezpośrednio przed Dorotką;
 - b) Jacek stoi przed Agatką, jeśli Agatka stoi przed Dorotką;
 - c) Jacek stoi przed Agatką, jeśli wiemy, że Agatka nie stoi ostatnia.
2. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że
 - a) mamy co najmniej jednego asa;
 - b) mamy co najmniej jednego asa czarnego koloru;
 - c) mamy asa pik;
 - d) pierwszą wylosowaną kartą jest as;
 - e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as;
 - f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.
3. Z odcinka $[0, 1]$ wylosowano na chybił trafił dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
 - a) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$;
 - b) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że mniejsza z liczb jest większa niż $1/4$;
 - c) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że któraś z liczb jest większa niż $1/4$.
4. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny po jednej kuli a następnie zwracamy ją do urny dokładając a kul tego samego koloru. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) pierwsza i druga wylosowana kula będzie biała;
 - b) druga wylosowana kula będzie biała;
 - c) za pierwszym razem wylosowano kulę białą, jeśli wiemy, że za drugim razem wylosowano kulę białą;
 - d) w pierwszych trzech losowaniach wylosujemy kule tego samego koloru
 - e) n -ta wylosowana kula będzie biała.
5. Test na rzadką chorobę, którą dotkniętą jest jedna osoba na 5 tysięcy, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 2% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której test przyniósł wynik pozytywny jest faktycznie chora?
6. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni

co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów z prawdopodobieństwem $1/10$. Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakiek jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?

7. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & \text{dla } n = 1, 2, \dots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & \text{dla } n = 0. \end{cases}$$

Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma

- a) co najmniej jedną córkę;
 - b) dokładnie jedną córkę?
 - c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakiek jest prawdopodobieństwo tego, że jest ona jedynaczką?
8. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe - SP1 i SP2. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w SP1 potrafi rozwiązać układ równań niż w SP2 podobnie większy procent chłopców z SP1 potrafi to zrobić niż w SP2. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozwiązywaniu układu równań od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?
9. W urnie znajduje się 5 kostek – 4 prawidłowe i 1 fałszywa z dwoma szóstkami, czwórkami i dwójkami. Wyciągamy z urny kostkę i nią rzucamy. Jeśli wypadła szóstka, to rzucamy kostką drugi raz.
- i) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że ani razu nie wyrzuciliśmy dwójki.
 - ii) W dwóch rzutach wypadła szóstka. Jakiek jest prawdopodobieństwo tego, że rzucaliśmy kostką sfalszowaną?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - 5

1. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadła liczba oczek podzielna przez trzy, B – za drugim razem wylosowano liczbę oczek podzielną przez trzy, C – suma wyrzuconych oczek jest parzysta. Czy zdarzenia A, B, C są parami niezależne? Czy są niezależne?
2. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k – na k -tej kostce wypadła szóstka, $1 \leq k \leq n$ oraz A_{n+1} – suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykaż, że dowolne n spośród zdarzeń $A_1, \dots, A_{n+1}$ jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia $A_1, \dots, A_{n+1}$ nie są niezależne.
3. Na n kartkach zapisano n różnych liczb rzeczywistych, następnie kartki włożono do pudełka, wymieszano i losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza zdarzenie, że k -ta z wylosowanych liczb jest większa od wszystkich poprzednich. Wykaż, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$ oraz zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ są niezależne.
4. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.
5. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
 - a) w 10 rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek
 - b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.
6. Rzucamy kostką do momentu aż wypadnie piątka lub po raz trzeci szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie n razy.
7. Rzucono n symetrycznymi monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba orłów jest podzielna przez k dla $k = 2, 4$.
8. Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków jest równe $5^k e^{-5} / k!$, $k = 1, 2, \dots$. Prawdopodobieństwo tego, że w danym wypadku będzie uczestniczył samochód czerwony jest $1/3$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków z udziałem samochodów czerwonych.