

### Zadania z rachunku prawdopodobieństwa I\* - 1

1. Grupę  $n$  dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
  - a) Jacek i Agatka stoją koło siebie,
  - b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.
2. Ze zbioru  $n$  elementowego losujemy ze zwracaniem  $r$  elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?
3. Z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek wylosowano czteroosobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wchodzi więcej chłopców niż dziewczynek.
4. Siedmiu pasażerów przydzielono losowo do trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
  - i) wszyscy trafili do jednego wagonu,
  - ii) w każdym wagonie znalazło się przynajmniej dwóch z tych pasażerów?
5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz  $N$  otrzymał
  - a) wszystkie karty różnej wartości;
  - b) dokładnie dwa piki;
  - c) co najmniej dwa piki;
  - d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
  - e) układ 4432;
  - f) układ 4441.
6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w pokera talią 52 kartową gracz otrzyma z ręki
  - a) parę
  - b) dwie pary
  - c) straighta
  - d) trójkę
  - e) fulla
  - f) karete
  - g) kolor
  - h) pokera.
7. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
  - a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
  - b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
  - c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

8. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w lotto spośród 49 liczb wylosowana będzie szóstka nie zawierająca dwu kolejnych liczb.
9. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?  
b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?
10. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.
11. W szafie znajduje się  $n$  par butów, na chybił trafił wybieramy z nich  $k$  butów przy czym  $k \leq n$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
  - a) wśród wylosowanych butów jest co najmniej jedna para,
  - b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.
12. a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy losowym umieszczeniu  $N$  listów w  $N$  zaadresowanych kopertach żaden list nie trafi do właściwego adresata?  
b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie  $k$  listów trafi do właściwych adresatów?

## Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa \* - 2

(zadania gwiazdkowe do oddania 11 marca)

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem przeliczalnym i  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Udowodnij, że istnieją liczby  $p_\omega \geq 0$ ,  $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$  takie, że  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$  dla wszystkich  $A \in \mathcal{F}$ .
2. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną dwa orły pod rząd. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie  $k$  razy.
3. (Igła Buffona) Igłę o długości  $l$  rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi  $d > l$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.
- 4\* Wielokąt wypukły o średnicy mniejszej niż  $d$  rzucono na płaszczyznę poliniowaną jak w poprzednim zadaniu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wielokąt przetnie którąś z linii. Co się dzieje, gdy wielokąt nie jest wypukły?
5. Na kiju długości  $l$  wybrano na chybił trafił 2 punkty i w tych punktach przełamano kij. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że z otrzymanych 3 kawałków można zbudować trójkąt.
- 6\* Udowodnij, że każde  $\sigma$ -ciało albo ma  $2^k$  elementów dla pewnego  $k$  naturalnego albo ma moc przynajmniej continuum.
7. Udowodnij następujące tożsamości

$$(\limsup A_n)' = \liminf(A_n'), \quad (\liminf A_n)' = \limsup(A_n'),$$

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n, \quad \limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n,$$

$$\limsup A_n \cap \liminf B_n \subset \limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n,$$

$$\text{jeśli } A_n \nearrow A \text{ lub } A_n \searrow A, \text{ to } A = \limsup A_n = \liminf A_n.$$

8. Wykaż, że jeśli  $A_n = (-\infty, x_n)$  oraz  $x = \limsup x_n$  to  $\limsup A_n = (-\infty, x)$  lub  $(-\infty, x]$  oraz oba te przypadki mogą zajść.
9. Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń probabilistycznych
  - i)  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$
  - ii)  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$  dla  $m$  nieparzystych
  - iii)  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$  dla  $m$  parzystych.

### Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa \* - 3

(zadania gwiazdkowe do oddania 18 marca)

1. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że
  - i) mamy co najmniej jednego asa,
  - ii) mamy asa czarnego koloru,
  - iii) mamy asa pik,
  - iv) pierwszą wylosowaną kartą jest as,
  - v) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as,
  - vi) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.
2. Z odcinka  $[0, 1]$  wylosowano na chybił trafił dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
  - i) większa z liczb jest mniejsza niż  $1/2$ ;
  - ii) większa z liczb jest mniejsza niż  $1/2$ , jeśli wiadomo, że mniejsza z liczb jest większa niż  $1/4$ ;
  - iii) większa z liczb jest mniejsza niż  $1/2$ , jeśli wiadomo, że któraś z liczb jest większa niż  $1/4$ .
3. (schemat urnowy Polya) Urna zawiera  $b$  kul białych i  $c$  kul czarnych. Wykonujemy kolejno następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, a następnie wkładamy ją z powrotem do urny, a wraz z nią dokładamy do urny  $a$  kul tego samego koloru. Udowodnij, że prawdopodobieństwo wylosowania w  $n$ -tym losowaniu kuli białej jest równe  $\frac{b}{b+c}$ .
4. Test na rzadką chorobę, którą dotkniętą jest jedna osoba na 5 tysięcy, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 2% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że osoba u której test przyniósł wynik pozytywny jest faktycznie chora?
5. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma  $n$  dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & n = 1, 2, \dots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & n = 0 \end{cases}$$

Zakładając, że wszystkie  $2^n$  rozkładów płci dzieci w rodzinie o  $n$  dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma

- a) co najmniej jedną córkę
- b) dokładnie jedną córkę?
- c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona jedynaczką?

6. Dwaj gracze grają w orla i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł gracz A płaci B 1 zł., jeśli reszka to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma  $a$  zł., a B  $b$  zł.
- Oblicz prawdopodobieństwo tego, że grę wygra gracz A.
  - Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli moneta jest sfalszowana tzn. orzeł wypada z prawdopodobieństwem  $p \neq 1/2$ ?
7. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dylektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów z prawdopodobieństwem  $1/10$ . Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?
8. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w szkole nr 1 potrafi rozłożyć liczbę 2012 na czynniki pierwsze niż w szkole nr 2, podobnie większy procent chłopców z jedynki potrafi to zrobić niż w dwójce. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozkładaniu 2012 od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?
- 9\* Załóżmy, że koła rozłączne  $B(x_i, r_i)$  są zawarte w pewnym prostokącie oraz pokrywają ten prostokąt z dokładnością do zbioru miary 0. Wykaż, że  $\sum_i r_i = \infty$ .
- 10\* Udowodnij, że nie istnieje prawdopodobieństwo określone na wszystkich podzbiorach  $\mathbb{Z}_+$  takie, że dla wszystkich  $k$ ,  $P(A_k) = 1/k$ , gdzie  $A_k$  jest zbiorem liczb podzielnych przez  $k$ .

### Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa \* - 4

(zadania gwiazdkowe do oddania 25 marca)

1. Załóżmy, że  $\mu_1$  i  $\mu_2$  są miarami probabilistycznymi oraz  $\mu_1(A) = \mu_2(A)$  dla  $A \in \mathcal{A}$ .
  - i) Wykaż, że jeśli  $\mathcal{A}$  jest  $\pi$ -układem, to  $\mu_1(A) = \mu_2(A)$  dla  $A \in \sigma(\mathcal{A})$ .
  - ii) Podaj przykład pokazujący, że teza i) nie musi być prawdziwa, gdy usuniemy założenie o tym, że  $\mathcal{A}$  jest  $\pi$ -układem.
2. Dla  $A \in \mathcal{F}$  zdefiniujmy  $A^1 = A$  i  $A^{-1} = A'$ . Wykaż, że
  - i) dla dowolnego ciągu znaków  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$  zdarzenia  $A_1, \dots, A_n$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy zdarzenia  $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$  są niezależne,
  - ii) zdarzenia  $A_1, \dots, A_n$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu znaków  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$  zachodzi

$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap A_n^{\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1}) \cdots \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}).$$

3. Na  $n$  kartkach zapisano  $n$  różnych liczb rzeczywistych, następnie kartki włożono do pudełka, wymieszano i losowano kolejno bez zwracania. Niech  $A_k$  oznacza zdarzenie, że  $k$ -ta z wylosowanych liczb jest większa od wszystkich poprzednich. Wykaż, że  $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$  oraz zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_n$  są niezależne.
4. Rzucono  $n$  kostkami do gry. Określmy zdarzenia  $A_k$  – na  $k$ -tej kostce wypadła szóstka,  $1 \leq k \leq n$  oraz  $A_{n+1}$  – suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykaż, że dowolne  $n$  spośród zdarzeń  $A_1, \dots, A_{n+1}$  jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia  $A_1, \dots, A_{n+1}$  nie są niezależne.
5. Udowodnij, że w definicji niezależności  $n$  zdarzeń każde z  $2^n - n - 1$  równań jest niezbędne (tzn. jeśli odrzucimy jedno z równań to istnieją zdarzenia zależne spełniające wszystkie pozostałe równania).
6. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.
7. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w schemacie Bernoulliego w  $n$  próbach i prawdopodobieństwu sukcesu w pojedynczej próbie równym  $p$  będzie parzysta liczba sukcesów.
8. Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą  $n$  razy, jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymają tę samą liczbę orłów?
9. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
  - a) w 10 rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek
  - b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.

10. Rzucamy kostką do momentu aż wypadnie piątka lub po raz trzeci szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie  $n$  razy.
- 11\* Niech  $X_n$  oznacza najdłuższą serię orłów w  $n$  rzutach monetą symetryczną. Wykaż, że
- a)  $\mathbb{P}(X_n \leq a \log_2 n) \rightarrow 0$  przy  $n \rightarrow \infty$  dla  $a < 1$ ,
  - b)  $\mathbb{P}(X_n \leq a \log_2 n) \rightarrow 1$  przy  $n \rightarrow \infty$  dla  $a > 1$ .
12. Wykaż (używając metod probabilistycznych), że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich  $n, m$  oraz  $p, q \in [0, 1]$  takich, że  $p + q = 1$  zachodzi nierówność  $(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1$ .
- 13\* Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą symetryczną. Przez  $A_n$  oznaczmy zdarzenie, że w pierwszych  $n$  rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$ . Ile wynosi to prawdopodobieństwo, jeśli moneta nie jest symetryczna?