

Wstęp do Procesów Stochastycznych

Rafał Latała

14 czerwca 2024

Poniższe notatki powstają na podstawie wykładów ze Wstępu do Procesów Stochastycznych, prowadzonego w semestrze wiosennym 2023/24. Gwiazdkami oznaczono treści, pobieżnie omówione w czasie wykładu, które nie będą wymagane na egzaminie.

U Czytelnika zakłada się znajomość podstawowych faktów z zakresu kursowego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa. Wszystkie potrzebne wiadomości można znaleźć w podręcznikach [1] i [2].

Większość materiału wykładu można znaleźć w książkach [3] i [7]. Obszerne notatki do wykładu były też przygotowane przez prof. Talarczyk-Noble [6]. Ambitniejszemu Czytelnikowi polecamy monografię [5].

Autor z góry przeprosza za wszystkie nieścisłości i omyłki mogące się pojawić w tekście i jednocześnie zwraca się z prośbą do Czytelników, którzy zauważyli błędy lub mają jakieś inne uwagi na temat notatek o ich zakomunikowanie osobiste lub wysłanie na adres emailowy rlatala@mimuw.edu.pl z podaniem wersji notatek (daty), której dotyczą.

Spis treści

1	Podstawowe Przykłady Procesów Stochastycznych	4
1.1	Proces Poissona	4
1.1.1	Konstrukcja procesu Poissona	5
1.1.2	Złożony Proces Poissona	8
1.1.3	*Charakteryzacje Procesu Poissona*	8
1.2	Proces Wienera (Ruch Browna)	9
1.2.1	Charakteryzacje procesu Wienera	9
1.2.2	*Proces Wienera jako granica błędzeń losowych*	12
1.2.3	Konstrukcja procesu Wienera przy pomocy układu Haara	12
1.2.4	Nieróżniczkowalność trajektorii	15
2	Rozkłady Procesów Stochastycznych	17
2.1	σ -ciało zbiorów cylindrycznych	17
2.2	Warunki zgodności. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu	18
2.3	*Dowód twierdzenia o istnieniu procesu*	20
3	Ciągłość trajektorii	22
3.1	Procesy stochastycznie równoważne i nierozróżnialne	22
3.2	Twierdzenie o ciągłej modyfikacji	23
3.3	Inne rodzaje ciągłości procesów	26
4	Procesy gaussowskie	27
4.1	Przypomnienie podstawowych faktów o wektorach gaussowskich	27
4.2	Procesy gaussowskie – definicja i podstawowe własności	28
4.3	Proces Ornsteina-Uhlebecka	29
4.4	Ułamkowy Ruch Browna	29
5	Filtracje z czasem ciągłym, Momenty Zatrzymania	31
5.1	Filtracje	31
5.2	Momenty Zatrzymania	32
6	Martyngały z czasem ciągłym	35
6.1	Definicje i przykłady	35
6.2	Jednostajna całkowalność	36
6.3	Twierdzenia Dooba o stopowaniu	38
6.4	Nierówności maksymalne	39

7	Twierdzenia o zbieżności martyngałów	42
7.1	Przejścia w dół przez przedział	42
7.2	Zbieżność prawie na pewno	43
7.3	Zbieżność martyngałów w L_p	44
7.4	*Regularność trajektorii	45
8	Procesy Markowa	48
8.1	Definicja i przykłady	48
8.2	Funkcje przejścia. Równanie Chapmana-Kołmogorowa	51
8.3	Rozkłady skończenie wymiarowe procesów Markowa	53
8.4	Jednorodne Procesy i Rodziny Markowa	57
9	Mocna własność Markowa i jej zastosowania	59
10	Półgrupy operatorów związane z jednorodnymi rodzinami Markowa	63
10.1	Definicja i Przykłady	63
10.2	Operatory infinitezymalne	65

1 Podstawowe Przykłady Procesów Stochastycznych

Zacniemy od podania podstawowych definicji używanych podczas całego wykładu. Podamy też dwa podstawowe przykłady procesów stochastycznych - proces Poissona i proces Wienera.

Definicja 1.1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $(E, \mathcal{E})$ przestrzenią mierzalną, zaś T dowolnym zbiorem. *Procesem stochastycznym* o wartościach w E , określonym na zbiorze T nazywamy rodzinę zmiennych losowych $X = (X_t)_{t \in T}$.

Uwaga 1.2. W zasadzie w czasie całego wykładu T będzie podzbiorem $\mathbb{R}$ (najczęściej przedziałem, niekoniecznie ograniczonym), zaś $E = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^d$. Parametr t można wówczas interpretować jako czas.

Definicja 1.3. *Trajektorią procesu X nazywamy funkcję (losową!) $t \rightarrow X_t(\omega)$, określoną na zbiorze T o wartościach w E .*

Definicja 1.4. Powiemy, że proces $X = (X_t)_{t \in T}$, $T \subset \mathbb{R}$ *ma przyrosty niezależne* jeśli dla dowolnych indeksów $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ze zbioru T , zmienne losowe $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne.

Definicja 1.5. Mówimy, że proces stochastyczny $(X_t)_{t \geq 0}$ *ma przyrosty stacjonarne*, jeśli rozkład $X_t - X_s$ zależy tylko od $t - s$ czyli

$$\forall t > s \geq 0 \quad X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0.$$

1.1 Proces Poissona

Definicja 1.6. *Procesem Poissona z parametrem (intensywnością) $\lambda > 0$ nazywamy proces stochastyczny $N = (N_t)_{t \geq 0}$ taki, że*

$$N_0 = 0; \tag{P0}$$

$$N \text{ ma przyrosty niezależne}; \tag{P1}$$

$$\text{Dla } 0 \leq s \leq t \text{ zmienna } N_t - N_s \text{ ma rozkład } \text{Poiss}(\lambda(t-s)); \tag{P2}$$

$$\text{Trajektorie } N \text{ są prawostronnie ciągłe.} \tag{P3}$$

Przypomnijmy, że zmienna X ma rozkład $\text{Poiss}(\lambda)$, jeśli X przyjmuje wartości naturalne oraz $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ dla $k = 0, 1, \dots$

Uwaga 1.7. i) Warunek (P3) oznacza, że dla wszystkich $\omega \in \Omega$, $t \rightarrow N_t(\omega)$ jest funkcją prawostronnie ciągłą na $[0, \infty)$.

ii) Czasami wygodniej jest w definicji procesu Poissona zakładać, że $N_0 = 0$ p.n. oraz, że prawie wszystkie trajektorie N są prawostronnie ciągłe. Tak zmodyfikowana definicja jest niezmiennicza z uwagi na zaburzenia procesu na zbiorze miary zero.

Uwaga 1.8. Proces Poissona (oraz zdefiniowany dalej proces Wienera) stanowią dwa podstawowe przykłady tak zwanych *procesów Levy’ego*. Procesy te mają przyrosty niezależne i stacjonarne oraz prawostronnie ciągłe trajektorie z lewostronnymi granicami.

Uwaga 1.9. Warunki (P0)–(P3) implikują, że prawie wszystkie trajektorie N są niemalejącymi, prawostronnie ciągłymi funkcjami o wartościach naturalnych, z nieskończoną liczbą skoków o wartości 1.

1.1.1 Konstrukcja procesu Poissona

Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ (czyli mają gęstość $\lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t)$). Określmy

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

oraz

$$N_t = \sup\{n : S_n \leq t\}. \quad (1)$$

Twierdzenie 1.10. *Proces stochastyczny $(N_t)_{t \geq 0}$ zdefiniowany wzorem (1) jest procesem Poissona z intensywnością λ .*

Warunki (P0) i (P3) są spełnione w oczywisty sposób, wystarczy więc sprawdzić (P1) i (P2). Najpierw udowodnimy pewien techniczny lemat.

Lemat 1.11. *Załóżmy, że $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją taką, że $|h| \leq 1$ oraz $h(u) = 1$ dla $u \geq u_0$. Wówczas zmienna losowa $Y = \prod_{k=1}^{\infty} h(S_k)$ jest dobrze określona, całkowalna oraz*

$$\mathbb{E}Y = \exp\left(\lambda \int_0^{\infty} (h(u) - 1) du\right).$$

Dowód. Na mocy mocnego prawa wielkich liczb, zmienne S_k zbiegają do nieskończoności prawie na pewno, zatem $h(S_k) = 1$ dla dużych k , czyli zmienna Y jest dobrze określona. Ponadto $|Y| \leq 1$, więc Y jest również całkowalna. Stosując twierdzenie Lebesgue’a o zbieżności zmajoryzowanej dostajemy

$$\mathbb{E}Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \prod_{k=1}^n h(S_k).$$

Liczmy, stosując zamianę zmiennych

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \prod_{k=1}^n h(S_k) \\
&= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h(x_1) \dots h(x_1 + \dots + x_n) \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} dx_1 \dots dx_n \\
&= \lambda^n \int_0^\infty h(u_n) e^{-\lambda u_n} \left(\int_{0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n} h(u_1) \dots h(u_{n-1}) du_1 \dots du_{n-1} \right) du_n \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty h(u_n) e^{-\lambda u_n} \left(\int_0^{u_n} \dots \int_0^{u_n} h(u_1) \dots h(u_{n-1}) du_1 \dots du_{n-1} \right) du_n \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty h(u) e^{-\lambda u} \left(\int_0^u h(s) ds \right)^{n-1} du,
\end{aligned}$$

gdzie w przedostatniej linijce skorzystaliśmy z tego, że funkcja $h(u_1) \dots h(u_{n-1})$ jest symetryczna względem permutacji zmiennych $u_1, \dots, u_{n-1}$. Połóżmy $A := \int_0^\infty (h(u) - 1) du$, wtedy wobec założenia iż $h(u) = 1$ dla $u \geq u_0$ dostajemy

$$\int_0^u h(s) ds = u + \int_0^u (h(s) - 1) ds = u + A \text{ dla } u \geq u_0.$$

Stąd $\mathbb{E} \prod_{k=1}^n h(S_k) = \alpha_n + \beta_n$, gdzie

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{u_0} h(u) e^{-\lambda u} \left[\left(\int_0^u h(s) ds \right)^{n-1} - (u + A)^{n-1} \right] du, \\
\beta_n &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda u} (u + A)^{n-1} du.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $|h(u)| \leq 1$ oraz $|\int_0^u h(s) ds| \leq u$, a zatem

$$\begin{aligned}
|\alpha_n| &\leq \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{u_0} (u + |A|)^{n-1} e^{-\lambda u} du \leq \frac{\lambda^n (u_0 + |A|)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda u} du \\
&= \frac{(\lambda(u_0 + |A|))^{n-1}}{(n-1)!},
\end{aligned}$$

czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. By policzyć granicę β_n zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k \int_0^\infty u^{n-1-k} e^{-\lambda u} du \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} A^k \lambda^{-n+k} (n-k-1)! = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k A^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbb{E}Y = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = e^{\lambda A}.$$

□

Wniosek 1.12. Załóżmy, że $B_1, B_2, \dots, B_n$ są rozłącznymi, ograniczonymi podzbiorami $\mathbb{R}_+$ oraz określmy

$$N(B_i) = \#\{k : S_k \in B_i\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_i}(S_k).$$

Wówczas $N(B_1), \dots, N(B_n)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\text{Pois}(\lambda m(B_k))$, gdzie m oznacza miarę Lebesgue'a.

Dowód. Policzmy wielowymiarową funkcję charakterystyczną

$$\mathbb{E} \exp \left(i \sum_{k=1}^n t_k N(B_k) \right) = \mathbb{E} \prod_{k=1}^{\infty} h(S_k),$$

gdzie

$$h(x) = \begin{cases} e^{it_k} & x \in B_k \\ 1 & x \notin B_1 \cup \dots \cup B_n. \end{cases}$$

Mamy

$$\int_0^{\infty} (h(u) - 1) du = \sum_{k=1}^n \int_{B_k} (e^{it_k} - 1) du = \sum_{k=1}^n m(B_k)(e^{it_k} - 1),$$

czyli na mocy Lematu 1.11,

$$\mathbb{E} \exp \left(i \sum_{k=1}^n t_k N(B_k) \right) = \exp \left(\lambda \sum_{k=1}^n m(B_k)(e^{it_k} - 1) \right).$$

W szczególności

$$\mathbb{E} \exp(itN(B_k)) = \exp(\lambda m(B_k)(e^{it} - 1)) = \mathbb{E} \exp(it \text{Pois}(\lambda m(B_k))),$$

więc $N(B_k)$ ma rozkład $\text{Pois}(\lambda m(B_k))$, ponadto

$$\mathbb{E} \exp \left(i \sum_{k=1}^n t_k N(B_k) \right) = \prod_{k=1}^n \exp(it_k N(B_k)),$$

a zatem $N(B_1), \dots, N(B_n)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. □

Dowód Twierdzenia 1.10. Zauważmy, że przy oznaczeniach z Wniosku mamy $N_t = N([0, t])$ oraz $N_t - N_s = N((s, t])$ dla $s < t$. Stąd warunki (P1) i (P2) w oczywisty sposób wynikają z Wniosku 1.12. □

1.1.2 Złożony Proces Poissona

Trajektorie procesu Poissona są prawostronnie ciągłe, kawałkami stałe, odległości między skokami są zmiennymi niezależnymi o rozkładzie wykładniczym oraz wszystkie skoki są równe 1. Jeśli odrzucimy ten ostatni warunek, a założymy, iż kolejne skoki są zmiennymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie to otrzymamy tzw. *złożony proces Poissona*.

Definicja 1.13. Załóżmy, że $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, a $(N_t)_{t \geq 0}$ procesem Poissona z intensywnością λ , niezależnym od zmiennych Δ_i . Wówczas proces $N^\Delta = (N_t^\Delta)_{t \geq 0}$ dany wzorem

$$N_t^\Delta = \begin{cases} 0 & N_t = 0 \\ \sum_{n=1}^{N_t} \Delta_n & N_t > 0 \end{cases}$$

nazywamy *złożonym procesem Poissona*.

Zauważmy, że rozkład złożonego procesu Poissona jest wyznaczony przez dwa parametry – intensywność skoków λ i rozkład pojedynczego skoku Δ_1 . Wygodnie jest zakładać, że $\mathbb{P}(\Delta_1 = 0) = 0$, by uniknąć sytuacji „pozornego skoku”. Zwykły proces Poissona odpowiada sytuacji, gdy $\mathbb{P}(\Delta_1 = 1) = 1$.

Używając Lematu 1.11 można bez trudu wykazać, że

Fakt 1.14. Niech N^Δ będzie złożonym procesem Poissona. Wówczas $N_0^\Delta = 0$, N^Δ ma przyrosty niezależne i stacjonarne oraz trajektorie prawostronnie ciągłe, kawałkami stałe. Odległości między poszczególnymi skokami są zmiennymi niezależnymi, o jednakowym rozkładzie wykładniczym.

1.1.3 *Charakteryzacje Procesu Poissona*

Fakt 1.15. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem stochastycznym takim, że $X_0 = 0$, X ma przyrosty niezależne i stacjonarne oraz trajektorie niemalejące, prawostronnie ciągłe, o wartościach całkowitych, skokach równych 1 oraz zbiegające do ∞ w ∞ . Wówczas X jest procesem Poissona.

Idea dowodu polega na tym, że X_t jest sumą przyrostów $X_{kt/n} - X_{(k+1)t/n}$. Przyrosty te mają jednakowe rozkłady, są niezależne i mają wartości całkowite nieujemne. Pokazuje się, że jak n jest duże to z prawdopodobieństwem bliskim 1 wszystkie przyrosty przyjmują tylko wartości 0 lub 1. Zatem X_t aproksymuje się przez rozkład Bernoulliego $\text{Bin}(n, p_n)$. Pokazujemy dalej, że np_n jest ograniczone czyli przechodząc do podciągu $n_k p_{n_k} \rightarrow \lambda(t)$, a stąd X_t ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t)$. Dalej już łatwo dowodzimy, że $\lambda(t)$ jest funkcją liniową, niemalejącą, czyli jest postaci λt .

Prawdziwe jest znacznie ogólniejsze twierdzenie charakteryzujące złożone procesy Poissona.

Twierdzenie 1.16. Załóżmy, że dany jest proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \geq 0}$ taki, że $X_0 = 0$, X ma przyrosty niezależne i stacjonarne oraz trajektorie prawostronnie ciągle, kawałkami stałe, ze skończoną liczbą skoków w każdym przedziale skończonym. Wówczas X jest złożonym procesem Poissona.

1.2 Proces Wienera (Ruch Browna)

Definicja 1.17. Procesem Wienera (Ruchem Browna) nazywamy proces stochastyczny $W = (W_t)_{t \geq 0}$ taki, że

$$W_0 = 0; \tag{W0}$$

$$W \text{ ma przyrosty niezależne}; \tag{W1}$$

$$\text{Dla } 0 \leq s < t \text{ zmienna } W_t - W_s \text{ ma rozkład normalny } \mathcal{N}(0, t - s); \tag{W2}$$

$$\text{Trajektorie } W \text{ są ciągle} \tag{W3}$$

Uwaga 1.18. i) Warunek (W3) oznacza, że dla wszystkich $\omega \in \Omega$, $t \rightarrow W_t(\omega)$ jest funkcją ciągłą na $[0, \infty)$.

ii) Czasami wygodniej jest zakładać w definicji procesu Wienera, że $W_0 = 0$ p.n. oraz, że trajektorie W są ciągle z prawdopodobieństwem 1.

iii) Proces Wienera na skończonym przedziale $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ definiujemy w podobny sposób – jedyna różnica to, że w warunku (W2) zakładamy, że $0 \leq s < t \leq T$.

1.2.1 Charakteryzacje procesu Wienera

Najpierw podamy twierdzenie, które znacznie ułatwia sprawdzanie, że dany proces jest procesem Wienera. Musimy wprawdzie podać ważną definicję.

Definicja 1.19. Proces $X = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy *gaussowskim*, jeśli wszystkie skończone wymiarowe rozkłady X są gaussowskie, tzn. wektor $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ma rozkład gaussowski dla dowolnych $t_1, \dots, t_n \in T$.

Przykłady

1. $X_t = f(t)g$, gdzie $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ dowolne oraz $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. Proces Wienera $(W_t)_{t \geq 0}$.
3. Most Browna $X_t = W_t - tW_1$, $0 \leq t \leq 1$.
4. Procesy W_t^2 , $\sin(W_t)$, e^{W_t} nie są gaussowskie.

Twierdzenie 1.20. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy jest procesem gaussowskim, o ciągłych trajektoriach, startującym z zera, takim, że $\mathbb{E}X_t = 0$ oraz $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min\{t, s\}$.

Dowód. $\Rightarrow$: Mamy $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}(X_t - X_0) = 0$ oraz $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_t - X_0) = t$ na mocy (W0) i (W2). Ponadto, z niezależności przyrostów, otrzymujemy dla $t > s$, $\text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Cov}(X_t - X_s, X_s) + \text{Var}(X_s) = 0 + s = \min\{t, s\}$.

$\Leftarrow$: Dla $t > s$, zmienna losowa $W_t - W_s$ ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją $\text{Var}(X_t - X_s) = \text{Var}(X_t) + \text{Var}(X_s) - 2\text{Cov}(X_t, X_s) = t - s$, więc zachodzi (W2). By sprawdzić niezależność przyrostów ustalmy $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$. Zauważmy, że wektor $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ ma rozkład gaussowski, więc jego współrzędne są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są nieskorelowane. Mamy jednak dla $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4$,

$$\text{Cov}(X_{s_1}, X_{s_3} - X_{s_2}) = \text{Cov}(X_{s_1}, X_{s_3}) - \text{Cov}(X_{s_1}, X_{s_2}) = s_1 - s_1 = 0$$

oraz

$$\text{Cov}(X_{s_2} - X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = \text{Cov}(X_{s_2}, X_{s_4} - X_{s_3}) - \text{Cov}(X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = 0.$$

□

Uwaga 1.21. Zauważmy, że jeśli $\mathbb{E}X_0 = 0$ oraz $\text{Var}(X_0) = 0$, to $X_0 = 0$ p.n.

Kolejne twierdzenie pokazuje, że (z dokładnością do drobnych technicznych założeń oraz normalizacji) proces Wienera jest jedynym procesem o ciągłych trajektoriach oraz niezależnych i stacjonarnych przyrostach.

Twierdzenie 1.22. *Załóżmy, że proces $(X_t)_{t \geq 0}$ spełnia warunki (W0), (W1), (W3) (z W zastąpionym przez X) oraz*

$$X \text{ ma przyrosty stacjonarne;} \tag{W2a}$$

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \text{ Var}(X_1) = 1; \tag{W2b}$$

$$\mathbb{E}X_t^4 < \infty \text{ dla wszystkich } t > 0. \tag{W2c}$$

Wówczas X_t jest procesem Wienera.

Dowód. Określmy dla $t \geq 0$, $a(t) = \mathbb{E}X_t$ oraz $b(t) = \text{Var}(X_t)$. Zauważmy, że na mocy niezależności i stacjonarności przyrostów,

$$\begin{aligned} b(t+s) &= \text{Var}(X_{t+s} - X_t + X_t) = \text{Var}(X_{t+s} - X_t) + \text{Var}(X_t) \\ &= \text{Var}(X_s) + \text{Var}(X_t) = b(t) + b(s). \end{aligned}$$

Ponadto oczywiście $b(t) \geq 0$, zatem funkcja $b(t)$ jest addytywna i niemalejąca na $[0, \infty)$, więc $b(t) = ct$ dla pewnego $c \geq 0$, co wobec (W2b) daje $\text{Var}(X_t) = b(t) = t$. Analogicznie sprawdzamy, że $a(t+s) = a(t) + a(s)$, wiemy też, że $a(0) = 0$, stąd dowodzimy, że $\mathbb{E}X_t = a(t) = 0$ dla t wymiernych. Weźmy $t > 0$ i wybierzmy dążący do t ciąg liczb wymiernych (t_n) . Warunek (W2c) implikuje $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$, wiemy też, że $\mathbb{E}X_{t_n}^2 = \text{Var}(X_{t_n}) = t_n$, zatem

$(\mathbb{E}|X_{t_n} - X_t|^2)^{1/2} \leq M$ dla pewnej stałej M . Z ciągłości trajektorii $X_{t_n} \rightarrow X_t$ prawie na pewno, czyli również według prawdopodobieństwa. Zatem dla $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}X_t| &= |\mathbb{E}X_t - \mathbb{E}X_{t_n}| \leq \mathbb{E}|X_t - X_{t_n}| \leq \varepsilon + \mathbb{E}|X_t - X_{t_n}| \mathbb{1}_{\{|X_t - X_{t_n}| \geq \varepsilon\}} \\ &\leq \varepsilon + (\mathbb{E}|X_t - X_{t_n}|^2)^{1/2} \mathbb{P}(|X_t - X_{t_n}| \geq \varepsilon)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon + M \mathbb{P}(|X_t - X_{t_n}| \geq \varepsilon)^{1/2} \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n . Stąd, wobec dowolności $\varepsilon > 0$, $\mathbb{E}X_t = 0$. Wykazaliśmy zatem, że X_t ma średnią zero i wariancję t .

Ustalmy $t > s \geq 0$, chcemy pokazać, że $X_t - X_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t - s)$. Zauważmy, że

$$X_t - X_s = \sum_{k=1}^n Y_{n,k}, \text{ gdzie } Y_{n,k} = X_{s+k(t-s)/n} - X_{s+(k-1)(t-s)/n}.$$

Zmienne $(Y_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ tworzą układ trójkątny, możemy więc skorzystać z Centralnego Twierdzenia Granicznego i wykazać, że $\sum_{k=1}^n Y_{n,k}$ zbiega do $\mathcal{N}(0, t - s)$ według rozkładu. Mamy

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_{n,k} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \text{Var}(Y_{n,k}) = t - s,$$

wystarczy więc sprawdzić warunek Lindeberga. Dla $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|Y_{n,k}|^2 \mathbb{1}_{\{|Y_{n,k}| \geq \varepsilon\}} \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n |Y_{n,k}|^2\right) \mathbb{1}_{\{\max_{k \leq n} |Y_{n,k}| \geq \varepsilon\}}\right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n |Y_{n,k}|^2\right)^2\right)^{1/2} \mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} |Y_{n,k}| \geq \varepsilon\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zmienne $(Y_{n,k})$ dla ustalonego n są niezależne i mają średnią zero, zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t - X_s)^4 &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n Y_{n,k}\right)^4 = \sum_{1 \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq n} \mathbb{E}Y_{n,k_1}Y_{n,k_2}Y_{n,k_3}Y_{n,k_4} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_{n,k}^4 + 6 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \mathbb{E}Y_{n,k}^2 \mathbb{E}Y_{n,l}^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_{n,k}^4 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \mathbb{E}Y_{n,k}^2 \mathbb{E}Y_{n,l}^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n |Y_{n,k}|^2\right)^2. \end{aligned}$$

Z ciągłości trajektorii X wynika, że $\mathbb{P}(\max_{k \leq n} |Y_{n,k}| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon) = 0$. $\square$

Uwaga 1.23. Warunek (W2c) nie jest konieczny - zob. Twierdzenie 5 z paragrafu 13.1 podręcznika [2].

Okazuje się, że również nie trzeba zakładać skończoności wariancji ani nawet istnienia wartości średniej W_1 – warunek (W2b) ma charakter czysto normalizacyjny. Dokładniej zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.24. *Załóżmy, że proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \geq 0}$ spełnia warunki (W0), (W1), (W2a) i (W3). Wówczas istnieją stałe $a, b \in \mathbb{R}$ i proces Wienera W takie, że $X_t = aW_t + bt$ dla wszystkich $t \geq 0$.*

1.2.2 *Proces Wienera jako granica błędzeń losowych*

Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Zdefiniujemy błędzenie losowe $(S_n)_{n \geq 0}$ wzorami

$$S_0 = 0. \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Centralne twierdzenie graniczne łatwo implikuje, że dla $s < t$, zmienne $\frac{S_{[nt]} - S_{[ns]}}{\sigma\sqrt{n}}$ zbiegają według rozkładu do $\mathcal{N}(0, t - s)$. Zasada niezmienniczości Donskera mówi, że ciąg procesów $(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]})_{t \geq 0}$ zbiega według rozkładu do procesu Wienera. Sformułowanie tego wyniku w pełnej ogólności jest nieco skomplikowane, gdyż trajektorie $t \rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}$ nie są ciągłe. By ominąć trudności techniczne przedłużmy liniowo ciąg $(S_n)_{n \geq 0}$ do procesu $(S_t)_{t \geq 0}$ kładąc

$$S_t := \theta S_n + (1 - \theta)S_{n+1} = X_1 + \dots + X_n + (1 - \theta)X_{n+1} \quad \text{dla } t = \theta n + (1 - \theta)(n + 1) \in [n, n + 1].$$

Twierdzenie 1.25. *Dla każdego $T < \infty$ ciąg procesów $(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]})_{t \in [0, T]}$ (traktowany jako wektor losowy o wartościach w przestrzeni $C[0, T]$) zbiega według rozkładu do procesu Wienera $(W_t)_{t \in T}$.*

1.2.3 Konstrukcja procesu Wienera przy pomocy układu Haara

Podczas następnych wykładów podamy dość abstrakcyjną konstrukcję procesu Wienera opartą o ogólniejsze twierdzenia dotyczące istnienia i ciągłości trajektorii procesów stochastycznych. W tym paragrafie omówimy konstrukcję Levy’ego-Ciesielskiego procesu Wienera na $[0, 1]$.

Definicja 1.26. Niech $I(0) = \{1\}, I(n) = \{1, \dots, 2^{n-1}\}, n = 1, 2, \dots$. Układem Haara nazywamy rodzinę funkcji $(h_{n,k})_{k \in I(n), n=0,1,\dots}$ określonych na $[0, 1]$ wzorami $h_{0,1}(t) \equiv 1$ oraz dla $k \in I(n), n \geq 1$,

$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{dla } (2k-2)2^{-n} \leq t < (2k-1)2^{-n} \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{dla } (2k-1)2^{-n} \leq t < 2k \cdot 2^{-n} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Definicja 1.27. Przy oznaczeniach poprzedniej definicji układem Schaudera nazywamy rodzinę funkcji $(S_{n,k})_{n=0,1,\dots,k \in I(n)}$ określonych na $[0, 1]$ wzorem $S_{n,k}(t) = \int_0^t h_{n,k}(s) ds$.

Fakt 1.28. a) Układ Haara jest bazą ortonormalną przestrzeni $L_2[0, 1]$.

b) Dla ustalonego $n \geq 1$, funkcje $(S_{n,k})_{k \in I(n)}$ mają nośniki o rozłącznych wnętrzach oraz $\|S_{n,k}\|_\infty = 2^{-(n+1)/2}$.

Część a) powyższego dowodu jest standardowym faktem z analizy funkcjonalnej, a część b) jest bardzo łatwa do sprawdzenia.

Uwaga 1.29. Układ Haara jest bazą Schaudera w przestrzeniach $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$. Po dodaniu funkcji stałe równej 1, układ Schaudera staje się bazą Schaudera przestrzeni $C[0, 1]$.

Fakt 1.30. Dla dowolnych $t, s \in [0, 1]$ mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_{n,k}(t) S_{n,k}(s) = \min\{t, s\}.$$

Dowód. Najprościej skorzystać z tożsamości Parsewala mówiącej, że dla dowolnej bazy ortonormalnej $(u_i)_{i \in I}$ przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz dowolnych $f, g \in \mathcal{H}$ zachodzi

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i \in I} \langle f, u_i \rangle \langle g, u_i \rangle.$$

Teza faktu wynika z powyższej tożsamości zastosowanej do $\mathcal{H} = L_2[0, 1]$, $f = \mathbb{1}_{[0,s]}$, $g = \mathbb{1}_{[0,t]}$ oraz układu Haara.

Alternatywnie można tezę faktu wykazać za pomocą nieco żmudnych, ale elementarnych rachunków. $\square$

Lemat 1.31. Niech g będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Wówczas

$$\mathbb{P}(|g| \geq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2/2} dx \leq e^{-t^2/2}, \quad \text{dla } t \geq 0.$$

Dowód. Niech $f(t) = e^{-t^2/2} - \mathbb{P}(|g| \geq t)$. Wówczas $f'(t) = e^{-t^2/2}(\sqrt{2/\pi} - t)$, czyli f jest rosnąca na $[0, \sqrt{2/\pi}]$ i malejąca na $[\sqrt{2/\pi}, \infty)$. Ponieważ $f(0) = f(\infty) = 0$, więc f jest nieujemna na $[0, \infty)$. $\square$

Niech $(g_{n,k})_{k \in I(n), n=0,1,\dots}$ będzie rodziną niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$ i

$$W_t^{(m)}(\omega) = \sum_{n=0}^m \sum_{k \in I(n)} g_{n,k}(\omega) S_{n,k}(t).$$

Twierdzenie 1.32. *Dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ ciąg funkcji $(W_t^{(m)}(\omega))$ zbiega jednostajnie na $[0, 1]$ do pewnej funkcji ciągłej $W_t(\omega)$. Jeśli określimy np. $W_t(\omega) = 0$ dla pozostałych ω , to tak zdefiniowany proces stochastyczny jest procesem Wienera na $[0, 1]$.*

Dowód. Określimy

$$A_n := \left\{ \max_{k \in I(n)} |g_{n,k}| \geq n \right\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Wówczas $\mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{k \in I(n)} \mathbb{P}(|g_{n,k}| \geq n) \leq |I(n)|e^{-n^2/2}$. Zatem $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, czyli na mocy lematu Borella-Cantelliego $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Weźmy $\omega \notin \limsup A_n$, wówczas istnieje n_0 takie, że $\omega \notin A_n$ dla $n \geq n_0$, czyli $|g_{n,k}(\omega)| \leq n$ dla $n \geq n_0$ i $k \in I(n)$. Z uwagi na rozłączność nośników $S_{n,k}$ i oszacowanie $\|S_{n,k}\|_\infty = 2^{-(n+1)/2}$ implikuje to, że $\|\sum_{k \in I(n)} g_{n,k}(\omega) S_{n,k}(t)\|_\infty \leq n2^{-(n+1)/2}$ dla $n \geq n_0$. Ponieważ $\sum_n n2^{-(n+1)/2} < \infty$, więc $W_t^{(m)}(\omega)$ zbiega jednostajnie dla $\omega \notin \limsup A_n$ do pewnego $W_t(\omega)$. Określimy $W_t(\omega) = 0$ dla $\omega \in \limsup A_n$.

Proces $W_t^{(m)}$ ma ciągle trajektorie, jako skończona kombinacja liniowa funkcji ciągłych, zatem proces W_t ma ciągle trajektorie. Oczywiście $W_0^{(m)} = 0$, więc $W_0 = 0$.

Zauważmy, że dla ustalonych $t_1, \dots, t_k$, $(W_{t_1}^{(m)}, \dots, W_{t_k}^{(m)}) \rightarrow (W_{t_1}, \dots, W_{t_k})$ p.n., zatem również według rozkładu. Granica rozkładów gaussowskich ma rozkład gaussowski (wystarczy spojrzeć na funkcję charakterystyczną), więc proces W_t jest gaussowski.

Ustalmy $t \in [0, 1]$, zmienne $g_{n,k} S_{n,k}(t)$ są niezależne i mają średnią 0, zatem są ortogonalne w $L_2(\Omega)$. Ponadto, na mocy Faktu 1.30,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} \mathbb{E}|g_{n,k} S_{n,k}(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_{n,k}(t)^2 = t < \infty,$$

stąd ciąg $W_t^{(m)}$ jest zbieżny w $L_2(\Omega)$. Ponieważ $W_t^{(m)}$ zbiega do W_t p.n., to $W_t^{(m)}$ zbiega do W_t w $L_2(\Omega)$, a zatem i w $L_1(\Omega)$ W szczególności

$$\mathbb{E}W_t = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}W_t^{(m)} = 0$$

oraz dla $s \leq t$

$$\text{Cov}(W_t, W_s) = \mathbb{E}W_t W_s = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}W_t^{(m)} W_s^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_{n,k}(t) S_{n,k}(s) = \min\{t, s\}.$$

□

Uwaga 1.33. Mając dany proces Wienera $(W_t)_{t \in [0,1]}$ nietrudno skonstruować proces Wienera na całej prostej. Można np. sprawdzić, że $((1+t)W_{\frac{1}{1+t}} - W_1)_{t \geq 0}$ jest takim procesem.

1.2.4 Nieróżniczkowalność trajektorii

Trajektorie procesu Wienera mają wiele ciekawych własności, część z nich poznamy później. W tym paragrafie pokażemy, że mimo iż są ciągłe, to z prawdopodobieństwem 1 nie są różniczkowalne w żadnym punkcie.

Twierdzenie 1.34. *Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera $(W_t)_{t \geq 0}$ są funkcjami nieróżniczkowalnymi w żadnym punkcie, tzn.*

$$\mathbb{P}\left(\exists_{t_0 \geq 0} t \rightarrow W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\right) = 0.$$

Dowód. Najpierw pokażemy nieróżniczkowalność trajektorii na $[0, 1)$, tzn.

$$\mathbb{P}\left(\exists_{t_0 \in [0, 1)} t \rightarrow W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\right) = 0.$$

Zauważmy, że jeśli funkcja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $t_0 \in [0, 1)$ oraz $|f'(t_0)| < M$, to $|f(t) - f(t_0)| \leq M|t - t_0|$ dla t dostatecznie bliskich t_0 . Zatem, jeśli $j/n \leq t_0 < (j+1)/n$, to dla dostatecznie dużych n ,

$$\left|f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right| \leq \left|f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f(t_0)\right| + \left|f(t_0) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right| \leq M\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right),$$

$$\left|f\left(\frac{j+2}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right)\right| \leq \left|f\left(\frac{j+2}{n}\right) - f(t_0)\right| + \left|f(t_0) - f\left(\frac{j+1}{n}\right)\right| \leq M\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

oraz

$$\left|f\left(\frac{j+3}{n}\right) - f\left(\frac{j+2}{n}\right)\right| \leq \left|f\left(\frac{j+3}{n}\right) - f(t_0)\right| + \left|f(t_0) - f\left(\frac{j+2}{n}\right)\right| \leq M\left(\frac{3}{n} + \frac{2}{n}\right).$$

Stąd, jeśli funkcja f jest różniczkowalna w jakimś punkcie przedziału $[0, 1)$, to

$$\exists_{M < \infty} \exists_{m < \infty} \forall_{n \geq m} \exists_{0 \leq j \leq n-3} \forall_{k=0,1,2} \left|f\left(\frac{j+k+1}{n}\right) - f\left(\frac{j+k}{n}\right)\right| \leq \frac{5M}{n}.$$

Czyli

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\exists_{t_0 \in [0, 1)} t \rightarrow W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{n-3} \bigcap_{k=0}^2 \left\{|W_{\frac{j+k+1}{n}} - W_{\frac{j+k}{n}}| \leq \frac{5M}{n}\right\}\right) \\ & \leq \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{n-3} \bigcap_{k=0}^2 \left\{|W_{\frac{j+k+1}{n}} - W_{\frac{j+k}{n}}| \leq \frac{5M}{n}\right\}\right). \end{aligned}$$

Z niezależności przyrostów dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^2 \left\{|W_{\frac{j+k+1}{n}} - W_{\frac{j+k}{n}}| \leq \frac{5M}{n}\right\}\right) &= \prod_{k=0}^2 \mathbb{P}\left(|W_{\frac{j+k+1}{n}} - W_{\frac{j+k}{n}}| \leq \frac{5M}{n}\right) \\
&= \left(\mathbb{P}\left(|W_{\frac{1}{n}}| \leq \frac{5M}{n}\right)\right)^3 = \left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|W_1| \leq \frac{5M}{n}\right)\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-5M/\sqrt{n}}^{5M/\sqrt{n}} e^{-x^2/2} dx\right)^3 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{10M}{\sqrt{n}}\right)^3.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{n-3} \bigcap_{k=0}^2 \left\{|W_{\frac{j+k+1}{n}} - W_{\frac{j+k}{n}}| \leq \frac{5M}{n}\right\}\right) \leq \sum_{j=0}^{n-3} \frac{1000M^3}{n^{3/2}} \leq \frac{1000M^3}{\sqrt{n}},$$

czyli

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{n-3} \bigcap_{k=0}^2 \left\{|W_{\frac{j+k+1}{n}} - W_{\frac{j+k}{n}}| \leq \frac{5M}{n}\right\}\right) = 0$$

i

$$\mathbb{P}\left(\exists_{t_0 \in [0,1)} t \rightarrow W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\right) = 0.$$

Nieznacznie modyfikując poprzedni dowód (albo używając faktu, że $\widetilde{W}_t = T^{-1/2}W_{tT}$ też jest procesem Wienera oraz w oczywisty sposób nieróżniczkowalność W na $[0,1)$ jest równoważna nieróżniczkowalności $\widetilde{W}$ na $[0,T)$) dostajemy, że dla $T < \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\exists_{t_0 \in [0,T)} t \rightarrow W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\right) = 0.$$

By zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\exists_{t_0 > 0} t \rightarrow W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\exists_{t_0 \in [0,N)} t \rightarrow W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\right) = 0.
\end{aligned}$$

□

Uwaga 1.35. Dokładna analiza przedstawionego dowodu pokazuje, że nie wykazaliśmy mierzalności zdarzenia $\{\exists_{t_0} t \rightarrow W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\}$, a jedynie to, że jest ono podzbiorem pewnego zdarzenia miary zero. By uniknąć kłopotów technicznych podobnego rodzaju, wygodnie jest przyjąć, że przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest zupełna, tzn. dowolny podzbiór zbioru miary zero jest mierzalny (każdą przestrzeń probabilistyczną można rozszerzyć do przestrzeni zupełnej).

2 Rozkłady Procesów Stochastycznych

W tej części zdefiniujemy rozkład procesu stochastycznego, w szczególności powiemy jakie zdarzenia określone przez proces są mierzalne. Udowodnimy, że rozkład procesu jest wyznaczony przez rozkłady skończenie wymiarowe. Sformułujemy też warunki, które muszą być spełnione, by istniał proces stochastyczny o zadanych rozkładach skończenie wymiarowych.

Przypomnijmy, że jeśli X jest zmienną losową o wartościach w przestrzeni $(E, \mathcal{E})$, to *rozkładem* X jest miara probabilistyczna na $(E, \mathcal{E})$ zadana wzorem

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

2.1 σ -ciało zbiorów cylindrycznych

Proces $X = (X_t)_{t \in T}$ możemy traktować jako zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^T$. Jakie podzbiory $\mathbb{R}^T$ są wówczas na pewno mierzalne?

Definicja 2.1. Zbiory postaci

$$\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}, \quad t_1, \dots, t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

nazywamy *zbiorami cylindrycznymi*. Przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ będziemy oznaczać najmniejsze σ -ciało zawierające zbiory cylindryczne i będziemy je nazywać *σ -ciałem zbiorów cylindrycznych*.

Uwaga 2.2. Zauważmy, że

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \sigma(\{x \in \mathbb{R}^T : x_t \in A\}, \quad t \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Uwaga 2.3. Nietrudno wykazać, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$ to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

Przykłady

1. Następujące zbiory należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)})$:

- $\{x : x_s > x_t\}, \quad s > t \geq 0,$
- $\{x : x_{t_1} > 0, x_{t_2} - x_{t_1} > 0, \dots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}} > 0\}, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n,$
- $\{x : \forall t < s, t, s \in \mathbb{Q}_+ \quad x_t > x_s\}.$

2. Zbiory

- $\{x : \sup_{t \in T} |x_t| \leq 1\},$
- $\{x : t \rightarrow x_t \text{ ciągłe}\}$

nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, gdy T jest niezdegenerowanym przedziałem.

Definicja 2.4. Rozkładem procesu $X = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy miarę probabilistyczną μ_X na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ daną wzorem

$$\mu_X(C) = \mathbb{P}((X_t)_{t \in T} \in C), \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

Uwaga 2.5. Załóżmy, że T jest przedziałem (skończonym lub nie). Na przestrzeni funkcji ciągłych $C(T)$ rozważmy topologię zbieżności niemal jednostajnej. Wówczas $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T) = \mathcal{B}(C(T))$, co oznacza, że jeśli proces $X = (X_t)_{t \in T}$ ma ciągłe trajektorie, to X wyznacza rozkład probabilistyczny na przestrzeni funkcji ciągłych $(C(T), \mathcal{B}(C(T)))$. W szczególności proces Wienera wyznacza pewien rozkład probabilistyczny na $C[0, \infty)$.

2.2 Warunki zgodności. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu

Najprostsze zbiory z $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to zbiory cylindryczne. Miary takich zbiorów to rozkłady skończenie wymiarowe procesu.

Definicja 2.6. Dla procesu $(X_t)_{t \in T}$ o wartościach w $\mathbb{R}$ i $t_1, \dots, t_n \in T$ określamy miarę $\mu_{t_1, \dots, t_n}$ na $\mathbb{R}^n$ wzorem

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(A) = \mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Rodzinę miar $\{\mu_{t_1, \dots, t_n} : t_1, \dots, t_n \in T \text{ parami różne}\}$ nazywamy rodziną *skończenie wymiarowych rozkładów* procesu X .

Fakt 2.7. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in T}$ i $Y = (Y_t)_{t \in T}$ są procesami o tych samych skończenie wymiarowych rozkładach, czyli

$$\mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A) = \mathbb{P}((Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in A)$$

dla wszystkich $t_1, \dots, t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Wówczas X i Y mają ten sam rozkład, tzn.

$$\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(Y \in C) \text{ dla wszystkich } C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

Dowód. Rodzina zbiorów cylindrycznych $\mathcal{A}$ tworzy π -układ, a rodzina $\mathcal{C}$ zbiorów C takich, że $\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(Y \in C)$, jest λ -układem zawierającym $\mathcal{A}$. Zatem z twierdzenia o π - i λ -układach, $\mathcal{C}$ zawiera również σ -ciało generowane przez $\mathcal{A}$, czyli $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. $\square$

Definicja 2.8. Powiemy, że rodzina skończenie wymiarowych rozkładów

$$\{\mu_{t_1, \dots, t_n} : t_1, \dots, t_n \in T \text{ parami różne}\}$$

spełnia warunki zgodności, jeśli zachodzą następujące warunki:

- i) Dla dowolnych $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, dowolnej permutacji $(i_1, \dots, i_n)$ liczb $(1, \dots, n)$ oraz zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n}) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n).$$

ii) Dla dowolnych $t_1, t_2, \dots, t_{n+1} \in T$ oraz $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n).$$

Oczywiście rodzina rozkładów skończenie wymiarowych dowolnego procesu stochastycznego spełnia warunki zgodności. Okazuje się, że są to jedyne warunki jakie należy nałożyć na taką rodzinę.

Twierdzenie 2.9. *Załóżmy, że rodzina skończenie wymiarowych rozkładów $(\mu_{t_1, \dots, t_n})$ spełniająca warunki zgodności. Wówczas istnieje proces $(X_t)_{t \in T}$ mający skończenie wymiarowe rozkłady równe $(\mu_{t_1, \dots, t_n})$.*

Dość techniczny dowód powyższego twierdzenia przedstawimy w osobnej sekcji. Teraz omówimy wnioski i przykłady.

Wniosek 2.10. *Załóżmy, że $T \subset \mathbb{R}$ oraz dana jest rodzina rozkładów skończenie wymiarowych $\{\mu_{t_1, \dots, t_n} : t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_1, \dots, t_n \in T\}$ spełniająca warunek*

$$\begin{aligned} \mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_{k-1} \times \mathbb{R} \times A_{k+1} \times \dots \times A_n) \\ = \mu_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_{k-1} \times A_{k+1} \times \dots \times A_n). \end{aligned}$$

dla wszystkich $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$ oraz zbiorów borelowskich $A_1, \dots, A_n$. Wówczas istnieje proces $(X_t)_{t \in T}$ taki, że $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ma rozkład $\mu_{t_1, \dots, t_n}$ dla $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Dowód. Dla $t_1, \dots, t_n \in T$ parami różnych istnieje permutacja $(i_1, \dots, i_n)$ liczb $(1, \dots, n)$ taka, że $t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_n}$. Możemy więc określić $\mu_{t_1, \dots, t_n}$ jako rozkład wektora $(Y_1, \dots, Y_n)$ takiego, że $(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_n})$ ma rozkład $\mu_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}$. Można sprawdzić, że tak określona rodzina miar $(\mu_{t_1, \dots, t_n})$ spełnia warunki zgodności. $\square$

Przykłady

1. Jeśli $(\mu_t)_{t \in T}$ jest dowolną rodziną rozkładów na $\mathbb{R}$, to istnieje rodzina niezależnych zmiennych losowych $(X_t)_{t \in T}$ taka, że X_t ma rozkład μ_t . Używamy tu twierdzenia o istnieniu dla $\mu_{t_1, \dots, t_n} = \mu_{t_1} \otimes \dots \otimes \mu_{t_n}$.
2. Istnieje proces spełniający warunki (W0)-(W2) definicji procesu Wienera. Istotnie dla $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ kładziemy

$$\mu_{t_1, \dots, t_n} \sim (X_1, X_1 + X_2, \dots, X_1 + X_2 + \dots + X_n),$$

gdzie $X_1, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$. Warunki zgodności wynikają wówczas stąd, iż jeśli Y_1, Y_2 są niezależne i $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ dla $i = 1, 2$, to $Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Uwaga 2.11. Dla uproszczenia zakładaliśmy podczas tego wykładu, że proces X_t ma wartości rzeczywiste. Nic się zmieni (poza oczywistymi drobnymi zmianami definicji) dla procesów o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Czasem jednak zachodzi potrzeba rozpatrywania procesów o wartościach w ogólniejszej przestrzeni E . warto więc zauważyć, że

- w Fakcie 2.7 nie wykorzystywaliśmy żadnych własności przestrzeni $\mathbb{R}$,
- w dowodzie Twierdzenia 2.9 wykorzystuje się regularność miar na $\mathbb{R}^n$ – by zachodził dla procesów o wartościach w E , wystarczy założyć, że E jest przestrzenią polską (tzn. ośrodkową, zupełną przestrzenią metryczną) z sigma-ciałem zbiorów borelowskich lub dodać warunek regularności rozpatrywanych miar.

2.3 *Dowód twierdzenia o istnieniu procesu*

Dowód Twierdzenia 2.9 opiera się na dwóch ważnych faktach z teorii miary, które przytoczymy bez dowodu. Pierwszy z nich podaje warunek kiedy funkcję skończenie addytywną na ciele zbiorów można przedłużyć do miary.

Twierdzenie 2.12 (Caratheodory’ego o przedłużaniu miary). *Założmy, że $\mathcal{A}$ jest ciałem podzbiorów X , a μ_0 skończenie addytywną funkcję z $\mathcal{A}$ w $\mathbb{R}_+$. Wówczas μ_0 przedłuża się do miary μ na σ -ciele $\sigma(\mathcal{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy μ_0 jest ciągła w $\emptyset$, tzn*

$$\text{jeśli } (A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}, A_1 \supset A_2 \supset \dots \text{ oraz } \bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0(A_n) = 0. \quad (\text{C})$$

Potrzebny nam też będzie fakt o regularności miar borelowskich na $\mathbb{R}^n$.

Fakt 2.13. *Każda miara skończona na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ jest regularna, tzn. dla dowolnego zbioru borelowskiego A ,*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ jest zwartym podzbiorem } A\}.$$

Dowód Twierdzenia 2.9. Niech $\mathcal{A}$ oznacza algebrę zbiorów cylindrycznych. Dla $C = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ połóżmy $\mu_0(C) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(A)$. Zauważmy, że

- z warunków zgodności wynika, że μ_0 jest dobrze zdefiniowane, tzn. $\mu_0(C)$ nie zależy od wyboru $t_1, \dots, t_n$ i A reprezentujących C .
- μ_0 jest skończenie addytywna. Istotnie jeśli $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{A}$, to można dobrać odpowiednio duży zbiór indeksów $t_1, \dots, t_n \in T$ taki, że zbiory $C_1, \dots, C_k$ zależą tylko od $t_1, \dots, t_n$, tzn.

$$C_i = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A_i\}, \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Założmy, że zbiory $C_1, \dots, C_k$ są rozłączne. Wówczas zbiory $A_1, \dots, A_k$ są również rozłączne, a zatem

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=0}^k C_i\right) = \mu_{t_1, \dots, t_n}\left(\bigcup_{i=0}^k A_i\right) = \sum_{i=0}^k \mu_{t_1, \dots, t_n}(A_i) = \sum_{i=0}^k \mu_0(C_i).$$

By zakończyć dowód musimy wykazać warunek (C) z twierdzenia Caratheodory'ego, czyli

$$\text{jeśli } C_n \in \mathcal{A}, C_1 \supset C_2 \supset \dots, \mu_0(C_n) \geq \varepsilon > 0, \text{ to } \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset.$$

Każda miara μ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ jest regularna (zob. Twierdzenie A.?), tzn. dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ zwarte}\}.$$

Zbiory C_n są cylindryczne, czyli zależą tylko od skończonego zbioru indeksów. Możemy założyć, że te zbiory indeksów rosną, co więcej (ewentualnie powtarzając zbiory C_i lub dodając indeksy) możemy zakładać, że istnieje ciąg $t_1, t_2, \dots$ taki, że

$$C_n = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A_n\} \text{ dla pewnego } A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Na mocy regularności miary $\mu_{t_1, \dots, t_n}$, istnieją zbiory zwarte $K_n \subset A_n$ takie, że

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(A_n \setminus K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Oznaczając $D_n = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in K_n\}$, mamy $\mu_0(C_n \setminus D_n) \leq 2^{-n-1}\varepsilon$. Niech

$$\tilde{D}_n = D_1 \cap \dots \cap D_n = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in \tilde{K}_n\}, \text{ gdzie}$$

$$\tilde{K}_n = (K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap (K_2 \times \mathbb{R}^{n-2}) \cap \dots \cap (K_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap K_n.$$

Ponieważ $C_n \setminus \tilde{D}_n = \bigcup_{k=1}^n (C_n \setminus D_k) \subset \bigcup_{k=1}^n (C_k \setminus D_k)$, więc

$$\mu_0(C_n \setminus \tilde{D}_n) \leq \sum_{k=0}^n \mu_0(C_k \setminus D_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1}\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem $\mu_0(\tilde{D}_n) \geq \mu_0(C_n) - \mu_0(C_n \setminus \tilde{D}_n) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} > 0$ i w szczególności $\tilde{D}_n \neq \emptyset$. Niech $x^{(n)} \in \tilde{D}_n$, wówczas

$$(x_{t_1}^{(n)}, \dots, x_{t_k}^{(n)}) \in K_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Zbiory K_k są zwarte, co implikuje, że dla dowolnego k , ciąg $(x_{t_k}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony. Za pomocą metody przekątniowej możemy wybrać podciąg (n_i) taki, że $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{t_k}^{(n_i)} = x_{t_k}^{\infty}$ dla $k = 1, 2, \dots$. Ale wówczas, z domkniętości K_k ,

$$(x_{t_1}^{\infty}, \dots, x_{t_k}^{\infty}) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} (x_{t_1}^{(n_i)}, \dots, x_{t_k}^{(n_i)}) \in K_k.$$

Określmy $y \in \mathbb{R}^T$ wzorem

$$y_t = \begin{cases} x_t^{\infty} & \text{dla } t \in \{t_1, t_2, \dots\}, \\ 0 & \text{dla } t \notin \{t_1, t_2, \dots\}. \end{cases}$$

Wówczas $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, czyli $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$, co chcieliśmy dowieść.

Wiemy zatem, że na $\Omega = \mathbb{R}^T$ istnieje miara probabilistyczna μ rozszerzająca μ_0 . Wtedy dla $t_1, \dots, t_n \in T$ oraz $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\mu(\{x: (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(A).$$

Zatem na przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T), \mu)$ wystarczy zdefiniować proces X wzorem $X_t(x) = x_t$. $\square$

3 Ciągłość trajektorii

Wiemy już kiedy istnieje proces o zadanych skończone wymiarowych rozkładach. Nasuwa się pytanie – kiedy taki proces ma ciągłe trajektorie? Zanim jednak zastanowimy się nad odpowiedzią wprowadzimy dwa ważne sposoby porównywania procesów.

3.1 Procesy stochastycznie równoważne i nierozróżnialne

Definicja 3.1. Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ oraz $Y = (Y_t)_{t \in T}$ będą dwoma procesami stochastycznymi, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Powiemy, że:

a) X jest *modyfikacją* Y (lub X jest *stochastycznie równoważny* Y), jeśli

$$\forall_{t \in T} \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

b) X i Y są nierozróżnialne, jeśli

$$\mathbb{P}(\forall_{t \in T} X_t = Y_t) = 1.$$

Zauważmy, że procesy nierozróżnialne są oczywiście stochastycznie równoważne. Ponadto dwa procesy stochastycznie równoważne mają ten sam rozkład. Poniższy przykład pokazuje, że z rozkładu procesu nie można wnioskować o własnościach trajektorii.

Przykład

Niech $Z \geq 0$ będzie dowolną zmienną losową o rozkładzie bezatomowym tzn. $\mathbb{P}(Z = z) = 0$ dla wszystkich $z \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy dwa procesy na $T = [0, \infty)$:

$$X_t \equiv 0 \quad \text{oraz} \quad Y_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq Z(\omega), \\ 1 & \text{dla } t = Z(\omega). \end{cases}$$

Wówczas Y jest modyfikacją X , bo $\mathbb{P}(X_t \neq Y_t) = \mathbb{P}(Z = t) = 0$. Zauważmy jednak, że wszystkie trajektorie Y są nieciągłe, czyli w szczególności $\mathbb{P}(\forall_{t \neq 0} X_t = Y_t) = 0$, a zatem procesy X i Y nie są nierozróżnialne.

Fakt 3.2. Załóżmy, że T jest przedziałem oraz procesy $X = (X_t)_{t \in T}$ i $Y = (Y_t)_{t \in T}$ mają prawostronnie ciągłe trajektorie. Wówczas, jeśli X jest modyfikacją Y , to X i Y są nierozróżnialne.

Dowód. Wybierzmy przeliczalny podzbiór $T_0 \subset T$, gęsty w T , zawierający dodatkowo $\sup T$, jeśli T jest przedziałem prawostronnie domkniętym. Niech

$$A = \{\forall_{t \in T_0} X_t = Y_t\},$$

wówczas $\mathbb{P}(A) = 1$, jako przeliczalne przecięcie zbiorów pełnej miary. Ponadto, jeśli $\omega \in A$, to dla dowolnego $t \in T \setminus \{\sup T\}$,

$$X_t(\omega) = \lim_{s \rightarrow t+, s \in T_0} X_s(\omega) = \lim_{s \rightarrow t+, s \in T_0} Y_s(\omega) = Y_t(\omega),$$

czyli

$$\mathbb{P}(\forall_{t \in T} X_t = Y_t) \geq \mathbb{P}(A) = 1.$$

□

3.2 Twierdzenie o ciągłej modyfikacji

Najważniejsze twierdzenie tego wykładu podaje kryterium istnienia modyfikacji procesu, która ma ciągle trajektorie. Zanim sformułujemy dokładny wynik przypomnijmy definicję hölderowskości.

Definicja 3.3. Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest hölderowsko ciągła z wykładnikiem γ , jeśli dla pewnej stałej $C < \infty$,

$$|f(s) - f(t)| \leq C|t - s|^\gamma \text{ dla wszystkich } s, t \in [a, b].$$

Twierdzenie 3.4. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in [a, b]}$ jest procesem takim, że

$$\forall_{t, s \in [a, b]} \mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\beta} \quad (2)$$

dla pewnych stałych dodatnich α, β, C . Wówczas istnieje proces $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \in [a, b]}$, będący modyfikacją procesu X , którego wszystkie trajektorie są ciągłe. Co więcej trajektorie każdej modyfikacji X o ciągłych trajektoriach są, z prawdopodobieństwem 1, hölderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$.

Wniosek 3.5. Twierdzenie 3.4 jest prawdziwe, gdy przedział $[a, b]$ zastąpimy nieskończonym przedziałem, o ile hölderowskość trajektorii zastąpimy lokalną hölderowskością (tzn. hölderowskością na każdym przedziale skończonym). Co więcej, wystarczy, by warunek (2) zachodził dla $|s - t| \leq \delta$, gdzie δ jest ustaloną liczbą dodatnią.

Dowód. Przedział nieskończony T można zapisać jako przeliczalną sumę przedziałów $[a_n, a_{n+1}]$, długości nie większej od δ . Z Twierdzenia 3.4 wynika istnienie modyfikacji $\tilde{X}_t^{(n)}$ procesu X

na przedziale $[a_n, a_{n+1}]$, o ciągłych trajektoriach. Niech $A_n = \{\tilde{X}_{a_{n+1}}^{(n)} \neq \tilde{X}_{a_{n+1}}^{(n+1)}\}$, wówczas $A = \bigcup_n A_n$ ma miarę zero. Możemy więc położyć:

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \tilde{X}_t^{(n)}(\omega) & \text{dla } t \in [a_n, a_{n+1}], \omega \notin A \\ 0 & \text{dla } \omega \in A. \end{cases}$$

□

Dowód Twierdzenia 3.4. Ustalmy $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ i niech

$$D := \{t \in [a, b] : t = 2^{-n}k, \ n = 1, 2, \dots, k \in \mathbb{Z}\}$$

oznacza zbiór liczb dwójkowo wymiernych z $[a, b]$. Wówczas

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, \text{ gdzie } D_n := \{t \in [a, b] : t = 2^{-n}k, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Na mocy nierówności Czebyszewa,

$$\mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-\alpha} \mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C\varepsilon^{-\alpha}|t - s|^{1+\beta},$$

w szczególności

$$\mathbb{P}(|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}) \leq C2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}.$$

Zatem, dla ustalonego n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{a \leq \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \leq b} |X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}\right) &\leq \sum_{a \leq \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \leq b} \mathbb{P}(|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}) \\ &\leq 2^n(b-a)C2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)} = C(b-a)2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy $A := \limsup A_n$, gdzie

$$A_n := \left\{ \max_{a \leq 2^{-n}k < 2^{-n}(k+1) \leq b} |X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right\}.$$

Nierówność $\gamma\alpha < \beta$ implikuje, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C(b-a)2^{-n(\beta-\alpha\gamma)} < \infty.$$

zatem, na mocy lematu Borela-Cantelliego, $\mathbb{P}(A) = 0$, czyli $\mathbb{P}(B) = 1$, gdzie

$$B = \Omega \setminus A = \left\{ \omega : \exists n_0(\omega) \forall n \geq n_0(\omega) \forall a \leq 2^{-n}k < 2^{-n}(k+1) \leq b \ |X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| < 2^{-\gamma n} \right\}.$$

Założmy, że $\omega \in B$, pokażemy wpierw, indukcyjnie po m , że

$$\forall n \geq n_0(\omega) \forall m \geq n \forall s, t \in D_m \quad |s - t| \leq 2^{-n} \Rightarrow |X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n}^m 2^{-\gamma j}. \quad (3)$$

Dla $m = n$, jeśli $|s - t| \leq 2^{-n}$, to możemy przyjąć, że $s = \frac{k}{2^n}, t = \frac{k+1}{2^n}$ i $|X_s - X_t| = |X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| < 2^{-\gamma n}$ na mocy definicji B .

Założmy zatem, że (3) jest udowodnione dla $m = n, n+1, \dots, M-1$, pokażemy, że zachodzi również dla $m = M$. Niech $s, t \in D_M, s < t$, możemy założyć, że $|s - t| > 2^{-M}$, bo inaczej działa argument przedstawiony w pierwszym kroku indukcji. Połóżmy

$$\tilde{s} = \min\{u \in D_{M-1}, u > s\}, \quad \tilde{t} = \max\{u \in D_{M-1}, u < t\},$$

wówczas $s \leq \tilde{s} \leq \tilde{t} \leq t$, czyli $|\tilde{s} - \tilde{t}| \leq |s - t| \leq 2^{-n}$. Stąd, wobec założenia indukcyjnego, $|X_{\tilde{s}}(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n}^{M-1} 2^{-\gamma j}$. Ponadto, $|s - \tilde{s}| \leq 2^{-M}, |t - \tilde{t}| \leq 2^{-M}$, czyli

$$\begin{aligned} |X_s(\omega) - X_t(\omega)| &\leq |X_{\tilde{s}}(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| + |X_{\tilde{s}}(\omega) - X_s(\omega)| + |X_t(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| \\ &\leq 2 \sum_{j=n}^{M-1} 2^{-\gamma j} + 2^{-\gamma M} + 2^{-\gamma M} = 2 \sum_{j=n}^M 2^{-\gamma j}, \end{aligned}$$

co kończy dowód (3).

Wiemy zatem, że dla $\omega \in B$,

$$s, t \in D, |s - t| \leq 2^{-n}, n \geq n_0(\omega) \Rightarrow |X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-\gamma j} = C_\gamma 2^{-\gamma n},$$

gdzie C_γ jest stałą zależną tylko od γ . Weźmy teraz dowolne $s, t \in D$ takie, że $|s - t| \leq 2^{-n_0(\omega)}$, wówczas istnieje $n \geq n_0(\omega)$ spełniające $2^{-n-1} < |s - t| \leq 2^{-n}$ i

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leq C_\gamma 2^{-\gamma n} \leq 2^\gamma C_\gamma |s - t|^\gamma.$$

W końcu, dla dowolnych $s, t \in D$, możemy dobrać ciąg $s = s_0 < s_1 < \dots < s_k = t$, $k \leq 2^{n_0(\omega)}(b - a)$ taki, że $s_i \in D, |s_{i+1} - s_i| \leq 2^{-n_0(\omega)}$ i otrzymamy

$$\begin{aligned} |X_s(\omega) - X_t(\omega)| &\leq \sum_{i=1}^k |X_{s_i}(\omega) - X_{s_{i+1}}(\omega)| \leq \sum_{i=1}^k 2^\gamma \tilde{C}_\gamma |s_i - s_{i-1}|^\gamma \\ &\leq (b - a) 2^{n_0(\omega)} 2^\gamma \tilde{C}_\gamma |t - s|^\gamma. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem, że dla $\omega \in B$, funkcja $t \rightarrow X_t(\omega)$ jest hölderowsko ciągła na D , w szczególności jest jednostajnie ciągła i w każdym punkcie z $[a, b]$ ma granicę. Połóżmy

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow t, s \in D} X_s(\omega) & \text{dla } \omega \in B, \\ 0 & \text{dla } \omega \notin B. \end{cases}$$

Wówczas wszystkie trajektorie $\tilde{X}$ są ciągłe (a nawet hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ). Z nierówności Czebyszewa łatwo wynika, że dla dowolnego ciągu $(t_n) \subset D$, zbieżnego do $t \in [a, b]$, $X_{t_n} \rightarrow X_t$ według prawdopodobieństwa. Z drugiej strony $X_{t_n} \rightarrow \tilde{X}_t$ p.n., a więc również według prawdopodobieństwa. Z jednoznaczności granicy wynika, że $\tilde{X}_t = X_t$ p.n., czyli proces $\tilde{X}$ jest modyfikacją X .

Na koniec zauważmy, że trajektorie $\tilde{X}$ są hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ , a skoro wiemy, że wszystkie ciągłe modyfikacje X są nierozróżnialne, to wszystkie ciągłe modyfikacje X mają, z prawdopodobieństwem 1, hölderowsko ciągłe trajektorie z dowolnym wykładnikiem $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$. $\square$

Wniosek 3.6. *Istnieje proces Wienera, tzn. proces spełniający warunki (W0)-(W3).*

Dowód. Mamy $\mathbb{E}|W_s - W_t|^4 = \mathbb{E}|\sqrt{t-s}W_1|^4 = (s-t)^2 \mathbb{E}W_1^4 = 3(s-t)^2$ i możemy zastosować Wniosek 3.5 z $\beta = 1$, $\alpha = 4$ i $C = 3$. $\square$

Wniosek 3.7. *Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są lokalnie Hölderowsko ciągłe z dowolnym parametrem $\gamma < 1/2$.*

Dowód. Mamy $\mathbb{E}|W_s - W_t|^p = (s-t)^{p/2} \mathbb{E}W_1^p = C_p(s-t)^{p/2}$ dla dowolnego $p < \infty$. Stosując wniosek 3.5, z $\beta = p/2 - 1$ i $\alpha = p$, otrzymujemy lokalną Hölderowską ciągłość trajektorii z dowolnym $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Biorąc $p \rightarrow \infty$ dostajemy tezę. $\square$

Uwaga 3.8. Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na $[0, \infty)$, nie mogą więc być globalnie Hölderowskie z żadnym wykładnikiem.

Uwaga 3.9. Założenia $\beta > 0$ nie można opuścić – wystarczy rozważyć proces Poissona dla którego $\mathbb{E}|N_t - N_s| = \lambda|t - s|$, a oczywiście proces Poissona przyjmuje wartości całkowite, więc nie ma modyfikacji o ciągłych trajektoriach.

3.3 Inne rodzaje ciągłości procesów

W tym wykładzie koncentrowaliśmy uwagę nad procesami o trajektoriach ciągłych. Warto jednak wspomnieć o innych formach ciągłości procesów stochastycznych.

Definicja 3.10. Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie procesem stochastycznym. Mówimy, że
a) proces X jest *stochastycznie ciągły*, jeśli

$$t_n \rightarrow t \Rightarrow X_{t_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t.$$

b) proces X jest *ciągły wg p -tego momentu (ciągły w L_p)*, jeśli

$$t_n \rightarrow t \Rightarrow \mathbb{E}|X_{t_n} - X_t|^p \rightarrow 0.$$

Uwaga 3.11. Nietrudno wykazać, że zarówno ciągłość trajektorii jaki i ciągłość wg p -tego momentu implikują ciągłość stochastyczną procesu. Z pozostałych czterech implikacji między powyższymi pojęciami ciągłości procesu żadna nie jest prawdziwa bez dodatkowych założeń.

4 Procesy gaussowskie

4.1 Przypomnienie podstawowych faktów o wektorach gaussowskich

Definicja 4.1. Wektor losowy $X = (X_1, \dots, X_n)$ w $\mathbb{R}^n$ nazywamy *gaussowskim*, jeśli ma funkcję charakterystyczną postaci

$$\varphi_X(t) = e^{i\langle t, a \rangle - \frac{\langle Ct, t \rangle}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}^n$$

dla pewnego $a \in \mathbb{R}^n$ i symetrycznej, nieujemnie określonej macierzy $C \in M_{n \times n}$. Używamy oznaczenia $X \sim \mathcal{N}(a, C)$. W przypadku, gdy $a = 0$ oraz $C = \text{Id}$, X nazywamy kanonicznym wektorem gaussowskim.

Każdy wektor gaussowski ma ten sam rozkład co afiniczny obraz wektora gaussowskiego – jeśli $X \sim \mathcal{N}(a, C)$, to $X \sim a + \sqrt{C}Y$, gdzie $Y \sim \mathcal{N}(0, \text{Id})$. Wektory gaussowskie są zamknięte ze względu na przekształcenia afiniczne.

Jeśli $X \sim \mathcal{N}(a, C)$, to $\mathbb{E}X = a$ oraz $\text{Cov}(X) = C$. W szczególności rozkład wektora gaussowskiego jest jednoznacznie wyznaczony przez wektor wartości średniej i macierz kowariancji.

Uwaga 4.2. Można wykazać, że $X \sim \mathcal{N}(a, C)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy gdy macierz kowariancji C jest odwracalna i wówczas ta gęstość wynosi

$$g_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{\langle C^{-1}(x - a), x - a \rangle}{2}\right).$$

Twierdzenie 4.3. Jeśli wektor losowy $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ma rozkład gaussowski to zmienne $X_1, \dots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są nieskorelowane, tzn. gdy $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ dla $i \neq j$.

Dowód. $\Rightarrow$: Dowolne zmienne niezależne są nieskorelowane.

$\Leftarrow$: Macierz $C = \text{Cov}(X)$ jest diagonalna, zatem

$$\varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(t) = e^{i\langle t, a \rangle - \frac{\langle Ct, t \rangle}{2}} = \prod_{j=1}^n e^{it_j a_j - \frac{c_{j,j} t_j^2}{2}} = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j),$$

co dowodzi niezależności X_j . □

Uwaga 4.4. Kluczowym założeniem w Twierdzeniu 4.3 jest gaussowskość wektora X , a nie tylko jego współrzędnych. Łatwo skonstruować dwie zależne zmienne X_1, X_2 takie, że $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ oraz $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

4.2 Procesy gaussowskie – definicja i podstawowe własności

Przypomnijmy definicję, która już się pojawiła przy omawianiu procesu Wienera.

Definicja 4.5. Proces $X = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy *gaussowskim*, jeśli wszystkie skończone wymiarowe rozkłady X są gaussowskie czyli wektor $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ma rozkład gaussowski dla dowolnych $t_1, \dots, t_n \in T$.

Przykłady

1. $X_t = f(t)g$, gdzie $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ dowolne, a $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. Proces Wienera $(W_t)_{t \geq 0}$.
3. Most Browna $X_t = W_t - tW_1$, $0 \leq t \leq 1$.

Wiemy, że wielowymiarowe rozkłady gaussowskie są wyznaczone przez dwa parametry – wektor wartości średniej i macierz kowariancji. Podobnie jest w przypadku procesów, by sformułować odpowiednie twierdzenie, najpierw wprowadzimy stosowne definicje.

Definicja 4.6. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem stochastycznym całkwalnym z kwadratem, tzn. $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ dla wszystkich $t \in T$. *Funkcję wartości średniej (wartość średnią procesu) X* definiujemy wówczas wzorem $m(t) := \mathbb{E}X_t$, $t \in T$, a *funkcję kowariancji X* wzorem $K(t, s) := \text{Cov}(X_t, X_s)$, $t, s \in T$. Proces X nazywamy *scentrowanym*, jeśli $m \equiv 0$.

Fakt 4.7. *Funkcja kowariancji procesu stochastycznego jest nieujemnie określona tzn.*

$$\forall_{t_1, \dots, t_n \in T} \forall_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}} \sum_{i,j=1}^n K(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0.$$

Dowód. Liczymy

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n K(t_i, t_j) x_i x_j &= \sum_{i,j=1}^n \text{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) x_i x_j = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_{t_i} x_i, \sum_{j=1}^n X_{t_j} x_j\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_{t_i} x_i\right) \geq 0. \square \end{aligned}$$

Wiemy już, że proces Wienera można scharakteryzować jako scentrowany proces gaussowski o ciągłych trajektoriach i funkcji kowariancji $K(t, s) = \min(t, s)$. Poniższe twierdzenie pokazuje, że rozkład procesu gaussowskiego jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie funkcje – wartość średnią i kowariancję.

Twierdzenie 4.8. a) *Niech $m: T \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją, a $K: T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ symetryczną funkcją nieujemnie określoną. Wówczas istnieje proces gaussowski o wartości średniej m i funkcji kowariancji K .*

b) *Jeśli dwa procesy gaussowskie mają takie same funkcje kowariancji i wartości średniej, to mają ten sam rozkład.*

Dowód. a) Dla $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ określamy $\mu_{t_1, \dots, t_n}$ jako rozkład wektora gaussowskiego $(X_1, \dots, X_n)$ takiego, że $\mathbb{E}X_i = m(t_i)$ oraz $\text{Cov}(X_i, X_j) = K(t_i, t_j)$ (wektor taki istnieje bo macierz $(K(t_i, t_j))_{i,j \leq n}$ jest symetryczna nieujemnie określona. Łatwo sprawdzić (wykorzystując to, że n -wymiarowy rozkład gaussowski jest zadany przez dwa parametry), że rodzina miar $(\mu_{t_1, \dots, t_n})$ spełnia warunki zgodności, zatem z Twierdzenia 2.9 wynika istnienie szukanego procesu.

b) Ponieważ n -wymiarowe rozkłady gaussowskie są wyznaczone przez wektor średniej i macierz kowariancji, więc rozważane dwa procesy mają te same rozkłady skończenie wymiarowe, czyli na mocy Faktu 2.7 mają te same rozkłady. $\square$

Uwaga 4.9. Załóżmy, że X jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Powiemy, że zmienna losowa o wartościach w X ma rozkład gaussowski, jeśli dla dowolnego funkcjonału ciągłego $x^* \in X^*$ zmienna rzeczywista $x^*(X)$ ma rozkład gaussowski. Proces Wienera na skończonym przedziale $[0, T]$ można traktować jako gaussowską zmienną losową o wartościach w $C[0, T]$.

4.3 Proces Ornsteina-Uhlebecka

Definicja 4.10. *Proces Ornsteina-Uhlenbecka z parametrem $\beta > 0$ określamy wzorem*

$$X_t = e^{-\beta t} W_{e^{2\beta t}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zauważmy, że zbiór indeksów procesu Ornsteina-Uhlebecka to cała prosta rzeczywista.

Proces Ornsteina-Uhlenbecka jest gaussowski, ma ciągłe trajektorie, średnią zero i funkcję kowariancji

$$K(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = e^{-\beta s} e^{-\beta t} e^{2\beta(t \wedge s)} = e^{-\beta|t-s|}.$$

Fakt 4.11. *Proces Ornsteina-Uhlenbecka $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ jest procesem stacjonarnym, tzn. dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ proces $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ma ten sam rozkład, co $(X_{t+h})_{t \in \mathbb{R}}$*

Dowód. Proces $Y_t := X_{t+h}$, $t \in \mathbb{R}$, jest gaussowski, ma średnią zero i funkcję kowariancji równą $K_Y(t, s) = K_X(t+h, s+h) = K_X(t, s)$. Zatem, na mocy twierdzenia 4.8, X i Y mają ten sam rozkład. $\square$

4.4 Ułamkowy Ruch Browna

Definicja 4.12. Niech $H \in (0, 1]$. Proces gaussowski $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ o średniej zero, funkcji kowariancji

$$K(s, t) = K_H(s, t) = \frac{1}{2} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}) \quad (4)$$

oraz ciągłych trajektoriach nazywa się *ułamkowym ruchem Browna z parametrem (Hursta) H* .

Uwaga 4.13. W literaturze się często rozważa ułamkowy ruch Browna tylko na $[0, \infty)$.

Zauważmy, że dla $H = 1/2$ oraz $s, t \geq 0$ dostajemy

$$K_{1/2}(s, t) = K_{1/2}(-s, -t) = \frac{1}{2}(s + t - |t - s|) = s \wedge t, \quad K_{1/2}(-s, t) = \frac{1}{2}(s + t - (t + s)) = 0,$$

zatem jeśli $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem $1/2$, to procesy $(X_t)_{t \geq 0}$ i $(X_{-t})_{t \geq 0}$ są niezależnymi procesami Wienera.

Dla $H = 1$, $K_1(s, t) = st = \text{Cov}(sg, tg)$, gdzie g ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, zatem 1-ułamkowy proces Wienera można określić wzorem $X_t = tg$, $t \in \mathbb{R}$.

By udowodnić istnienie ułamkowego ruchu Browna dla $H \in (0, 1)$, sprawdzimy najpierw nieujemną określoność funkcji K_H . Jest ona konsekwencją następującego lematu.

Lemat 4.14. *Dla $0 < H < 1$ istnieje stała $c_H > 0$ taka, że*

$$|t|^{2H} = c_H \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(tx)}{|x|^{2H+1}} dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dowód. Całka jest dobrze określona, bo w otoczeniu zera funkcja podcałkowa jest rzędu $\frac{1}{2}(tx)^2|x|^{-2H-1} = \frac{1}{2}t^2|x|^{1-2H}$, ponadto jest nieujemna i szacuje się z góry przez $|x|^{-1-2H}$. Wykładnik $1 - 2H$ jest większy od -1 a $-1 - 2H$ mniejszy od -1 , więc funkcja podcałkowa jest całkowalna na $\mathbb{R}$. Podstawienie $y = tx$ pokazuje, że

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(tx)}{|x|^{2H+1}} dx = |t|^{2H} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(y)}{|y|^{2H+1}} dy.$$

□

Wniosek 4.15. *Funkcja $K_H(s, t) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H})$ jest nieujemnie określona.*

Dowód. Na mocy lematu mamy

$$\begin{aligned} K_H(s, t) &= \frac{c_H}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(tx) - \cos(sx) + \cos((t - s)x)}{|x|^{2H+1}} dx \\ &= \frac{c_H}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \cos(tx))(1 - \cos(sx)) + \sin(tx)\sin(sx)}{|x|^{2H+1}} dx. \end{aligned}$$

Ponadto funkcje $f_1(s, t) = (1 - \cos(tx))(1 - \cos(sx))$ i $f_2(s, t) = \sin(tx)\sin(sx)$ są nieujemnie określone na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. □

Twierdzenie 4.16. *Dla dowolnego $H \in (0, 1]$ istnieje ułamkowy ruch Browna z parametrem H .*

Dowód. Dla $H = 1$ wystarczy określić $X_t = tg$, dalej będziemy rozpatrywać $H \in (0, 1)$. Twierdzenie 4.8 oraz wniosek 4.15 implikują istnienie scentrowanego procesu gaussowskiego X_t o funkcji kowariancji $K_H(s, t)$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_t - X_s) &= \text{Var}(X_t) + \text{Var}(X_s) - 2\text{Cov}(X_s, X_t) = K_H(s, s) + K_H(t, t) - 2K_H(s, t) \\ &= |s - t|^{2H}.\end{aligned}$$

Zatem zmienna $X_t - X_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, |t - s|^{2H})$. Stąd

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha = c_\alpha |t - s|^{\alpha H}.$$

Twierdzenie 3.4 (zastowane z $\alpha > 1/H$ i $\beta = \alpha H - 1$) implikuje, że proces $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ma ciągłą modyfikację, ta modyfikacja to ułamkowy ruch Browna. $\square$

Uwaga 4.17. Twierdzenie 3.4 implikuje, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie ułamkowego ruchu Browna z parametrem H są lokalnie $H - \varepsilon$ hölderowskie dla każdego $\varepsilon > 0$.

Fakt 4.18. *Ułamkowy ruch Browna*

- i) ma stacjonarne przyrosty, tzn. zmienna $X_t - X_s$ ma ten sam rozkład co $X_{t+h} - X_{s+h}$,
- ii) jest samopodobny z wykładnikiem H , tzn. (X_{at}) ma ten sam rozkład co $(|a|^H X_t)$ dla $a \in \mathbb{R}$.

Dowód. i) Dowód twierdzenia 4.16 pokazuje, że $X_t - X_s$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, |t - s|^{2H})$.

ii) Procesy (X_{at}) oraz $(|a|^H X_t)$ są gaussowskie, mają średnią zero i funkcję kowariancji równą $|a|^{2H} K_H(s, t)$. $\square$

Uwaga 4.19. Nietrudno wykazać, że jeśli całkowalny z kwadratem proces $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ma stacjonarne przyrosty i jest H -samopodobny dla pewnego $H \neq 0$, to $H \in (0, 1]$ oraz X ma funkcję kowariancji równą $C(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |s - t|^{2H})$ dla pewnego $C \geq 0$.

5 Filtracje z czasem ciągłym, Momenty Zatrzymania

Celem tej części jest pokazanie jak zmodyfikować definicje omawiane podczas kursowego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa z przypadku czasu dyskretnego na czas ciągły.

Będziemy zakładać, że T jest lewostronnie domkniętym przedziałem (typowo $T = [0, \infty)$), choć większość definicji i wyników można uogólnić na szerszą klasę zbiorów.

5.1 Filtracje

Definicja 5.1. *Filtrację* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy rosnącą rodzinę σ -ciał zawartych w $\mathcal{F}$, tzn. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ dla $t \leq s$, $t, s \in T$.

Zdarzenia z σ -ciała $\mathcal{F}_t$ możemy interpretować jako zdarzenia obserwowalne do chwili t .

Definicja 5.2. Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie procesem stochastycznym. *Filtracją generowaną przez X* nazywamy rodzinę $(\mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$ daną wzorem $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t)$.

Fakt 5.3. *Proces X_t ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $s < t$, $s, t \in T$ przyrost $X_t - X_s$ jest niezależny od σ -ciała $\mathcal{F}_s^X$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Rodzina zdarzeń A niezależnych od $X_t - X_s$ tworzy λ -układ, ponadto, z niezależności przyrostów X , zawiera π -układ zdarzeń postaci $\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$ dla $t_1 < \dots < t_n \leq s$ (bo $\sigma(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = \sigma(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$).

$\Leftarrow$: Ustalmy $t_1 < \dots < t_n$ oraz zbiory borelowskie $A_1, \dots, A_n$. Zdarzenie $\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n\}$ należy do σ -ciała $\mathcal{F}_{t_{n-1}}^X$, więc jest niezależne od zmiennej $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. Stąd

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n) \\ = \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} \in A_{n-1}) \mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n). \end{aligned}$$

Iterując to rozumowanie pokazujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n) \\ = \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1) \mathbb{P}(X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \dots) \cdots \mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n). \end{aligned} \quad \square$$

Definicja 5.4. Proces $X = (X_t)$ nazywamy *zgodnym z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$* lub *$\mathcal{F}_t$ -adaptowalnym*, jeśli dla wszystkich $t \in T$, X_t jest $\mathcal{F}_t$ mierzalne.

Uwaga 5.5. Oczywiście proces X jest zgodny z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ dla $t \in T$. W szczególności każdy proces X jest zgodny z filtracją przez siebie generowaną.

5.2 Momenty Zatrzymania

Definicja 5.6. *Momentem zatrzymania (momentem Markowa, czasem zatrzymania) względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$* nazywamy zmienną losową o wartościach w $T \cup \{\infty\}$ taką, że $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t \in T$.

Moment zatrzymania to strategia przerywania eksperymentu losowego (np. zakończenia udziału w pewnej grze losowej) taka, że decyzję o przerywaniu do chwili t podejmujemy tylko na podstawie obserwacji dostępnych w tym czasie.

Przykład. Dla zbioru $A \subset \mathbb{R}$ i procesu stochastycznego $(X_t)_{t \in T}$ określmy

$$\tau_A = \inf\{t \in T : X_t \in A\}.$$

Jeśli $(X_t)_{t \in T}$ jest $\mathcal{F}_t$ -adaptowalnym procesem o ciągłych trajektoriach, zaś A zbiorem domkniętym, to τ_A jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$.

Dowód. Niech $T_0 \subset T$ będzie gęstym podzbiorem T zawierającym lewy koniec. Z domkniętości zbioru A i ciągłości X dostajemy dla $t \in T$

$$\{\tau_A \leq t\} = \{\exists_{s \leq t} X_s \in A\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \leq t, s \in T_0} \{X_s \in A_{1/n}\} \in \mathcal{F}_t,$$

gdzie

$$A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon\text{-otoczka zbioru } A). \quad \square$$

Uwaga 5.7. Jeśli w powyższym przykładzie A będzie zbiorem otwartym, to τ_A nie musi być momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, ale musi być momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_{t+})_{t \in T}$, gdzie dla $t < \sup T$

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s,$$

a jeśli t jest największym elementem T , to kładziemy $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.

Powyższa uwaga motywuje poniższą definicję, która ma nieco techniczny charakter, ale jest powszechnie używana w teorii procesów.

Definicja 5.8. Filtrację $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ nazywamy *prawostronnie ciągłą*, jeśli $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t \in T$. Mówimy, że filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *spełnia zwykłe warunki*, jeśli

- a) jest prawostronnie ciągła,
- b) dla wszystkich t , $\mathcal{F}_t$ zawiera wszystkie zbiory miary zero, tzn. jeśli $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0$, to $A \in \mathcal{F}_t$.

Definicja 5.9. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Definiujemy σ -ciało *zdarzeń obserwowalnych do chwili τ* wzorem

$$\mathcal{F}_\tau := \left\{ A \in \mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t\right) : \forall_{t \in T} A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \right\}.$$

Fakt 5.10. a) Zbiór $\mathcal{F}_\tau$ jest σ -ciałem.

b) Jeśli $\tau \leq \sigma$, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

c) Zmienna losowa τ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna.

Dowód. a) Zbiór $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$, bo $\Omega \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Jeśli $A \in \mathcal{F}_\tau$, to $A' \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \setminus (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$, czyli $A' \in \mathcal{F}_\tau$. Jeśli $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ dla $n = 1, 2, \dots$, to $(\bigcup_n A_n) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_n (A_n \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$, czyli $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_\tau$.

b) Weźmy $A \in \mathcal{F}_\tau$, wówczas dla $t \in T$, $A \cap \{\sigma \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, czyli $A \in \mathcal{F}_\sigma$.

c) Wystarczy pokazać, że $\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_\tau$, ale $\{\tau \leq s\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{s \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$. $\square$

Kolejny prosty fakt pozostawiamy do udowodnienia na ćwiczeniach.

Fakt 5.11. *Załóżmy, że τ i σ są momentami zatrzymania. Wówczas $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\sigma < \tau\}, \{\tau \leq \sigma\}, \{\sigma \leq \tau\}, \{\tau = \sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.*

Okazuje się, że (inaczej niż w przypadku czasu dyskretnego) adaptowalność procesu nie gwarantuje np. mierzalności zmiennych X_τ dla wszystkich momentów zatrzymania τ . Dlatego wprowadzimy jeszcze jedną techniczną definicję.

Definicja 5.12. Proces $X = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy *progresywnie mierzalnym* względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, jeśli dla każdego $t \in T$, funkcja $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ traktowana jako funkcja ze zbioru $T \cap (-\infty, t] \times \Omega$ w $\mathbb{R}$ jest mierzalna względem σ -algebry $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Równoważnie

$$\forall t \in T \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \{(s, \omega) \in T \times \Omega : s \leq t, X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

Fakt 5.13. *Załóżmy, że T jest przedziałem oraz dany jest proces $X = (X_t)_{t \in T}$ i filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$.*

- a) *Jeśli proces X jest progresywnie mierzalny względem $(\mathcal{F}_t)$, to jest $\mathcal{F}_t$ -adaptowalny.*
- b) *Jeśli proces X jest $\mathcal{F}_t$ -adaptowalny oraz ma prawostronnie ciągle trajektorie, to jest progresywnie mierzalny względem $(\mathcal{F}_t)$.*

Dowód. a) Zbiór $\{\omega : X_t(\omega) \in A\}$ jest przekrojem zbioru $\{(s, \omega) \in T \times \Omega : s \leq t, X_s(\omega) \in A\}$, a zatem należy do $\mathcal{F}_t$.

b) Ustalmy $t \in T$ i połóżmy dla $s \in T, s \leq t$, $X_s^{(n)} := X_{t-2^{-n}k}$, gdzie k jest liczbą całkowitą taką, że $t - 2^{-n}(k+1) < s \leq t - 2^{-n}k$. Wówczas

$$\begin{aligned} & \{(s, \omega) \in T \times \Omega : s \leq t, X_s^{(n)}(\omega) \in A\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(T \cap \left(t - \frac{k+1}{2^n}, t - \frac{k}{2^n} \right] \right) \times \{\omega : X_{t-\frac{k}{2^n}}(\omega) \in A\} \\ &\in \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $X_s^{(n)}(\omega), s \in T \cap (-\infty, t], \omega \in \Omega$ jest $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ mierzalna. Wobec prawostronnej ciągłości X mamy $X_s(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_s^{(n)}(\omega)$, zatem funkcja $X_s(\omega), s \in T \cap (-\infty, t], \omega \in \Omega$ jest $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ mierzalna jako granica funkcji mierzalnych. $\square$

Jeśli τ jest momentem zatrzymania, a $X = (X_t)_{t \in T}$ procesem, to zmienna X_τ jest dobrze zdefiniowana tylko na zbiorze $\{\tau < \infty\}$. Musimy zatem określić co mamy na myśli mówiąc, że zmienna X_τ jest mierzalna.

Definicja 5.14. Mówimy, że zmienna losowa Z określona na zbiorze A jest mierzalna względem σ -ciała $\mathcal{G}$ zawierającego A , jeśli $\{\omega \in A : Z(\omega) \in B\} \in \mathcal{G}$ dla dowolnego zbioru borelowskiego B .

Fakt 5.15. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem progresywnie mierzalnym względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, a τ jest momentem zatrzymania. Wówczas zmienna losowa X_τ określona na zbiorze $\{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna. Ponadto proces zatrzymany w chwili τ , $X^\tau := (X_{t \wedge \tau})_{t \in T}$ jest progresywnie mierzalny.

Dowód. Odwzorowanie

$$(s, \omega) \rightarrow (\tau(\omega) \wedge s, \omega): T \cap (-\infty, t] \times \Omega \rightarrow T \cap (-\infty, t] \times \Omega$$

jest mierzalne względem σ -ciała $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Jeśli złożymy je z odwzorowaniem

$$(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega) \text{ mierzalnym z } (T \cap (-\infty, t] \times \Omega, \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \text{ w } \mathbb{R},$$

to otrzymamy odwzorowanie

$$(s, \omega) \rightarrow X_{\tau(\omega) \wedge s}(\omega) \text{ mierzalne z } (T \cap (-\infty, t] \times \Omega, \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \text{ w } \mathbb{R}.$$

Stąd wynika progresywna mierzalność procesu X^τ . By zakończyć dowód zauważmy, że

$$\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X_{\tau \wedge t} \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

na mocy progresywnej mierzalności (a właściwie adaptowalności) X^τ . $\square$

6 Martynały z czasem ciągłym

6.1 Definicje i przykłady

Definicja 6.1. Mówimy, że $(X_t)_{t \in T}$ jest *martynałem* (odp. *podmartynałem*, *nadmartynałem*) względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ lub, że $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest *martynałem* (odp. *podmartynałem*, *nadmartynałem*), jeśli

- a) dla wszystkich $t \in T$, X_t jest $\mathcal{F}_t$ adaptowalny i $\mathbb{E}|X_t| < \infty$,
- b) dla dowolnych $s, t \in T, s < t$, $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ p.n. (odp. $\geq$ dla podmartynału i $\leq$ dla nadmartynału).

Przykład 1. Jeśli X jest całkowalną zmienną losową, a $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ dowolną filtracją, to $X_t := \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_t)$, $t \in T$ jest martynałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$.

Istotnie, całkowalność i mierzalność wynikają z definicji wwo. Ponadto dla $t > s$,

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_s) = X \text{ p.n..}$$

Przykład 2. $(W_t)_{t \geq 0}$ jest martynałem względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \leq t)$. Całkowalność i mierzalność są oczywiste. Ponadto, dla $t > s$ mamy z niezależności przyrostów

$$\mathbb{E}(W_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_s | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) = W_s + \mathbb{E}(W_t - W_s) = W_s \text{ p.n..}$$

Przykład 3. $(W_t^2)_{t \geq 0}$ jest podmartyngealem, a $(W_t^2 - t)_{t \geq 0}$ martyngealem względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \leq t)$.

Całkowalność i mierzalność są jasne. Ponadto, dla $t > s$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_s^2 | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(2W_s(W_t - W_s) | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s) \\ &= W_s^2 + 2W_s \mathbb{E}(W_t - W_s) + \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = W_s^2 + t - s \quad \text{p.n.}\end{aligned}$$

Uwaga 6.2. W ostatnich dwu przykładach filtrację $(\mathcal{F}_t^W)$ można zastąpić filtracją $(\mathcal{F}_{t+}^W)$.

Fakt 6.3. Załóżmy, że $(X_t, \mathcal{F}_t)$ jest martyngealem (odp. podmartyngealem) o wartościach w przedziale I , zaś $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją wypukłą (odp. wypukłą i niemalejącą) taką, że $\mathbb{E}|f(X_t)| < \infty$ dla wszystkich t . Wówczas $(f(X_t), \mathcal{F}_t)$ jest podmartyngealem.

Dowód. Z nierówności Jensena mamy $\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) \geq f(\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s))$ p.n., a ostatnia zmienna jest równa $f(X_s)$ w przypadku martyngeалу i nie mniejsza niż $f(X_s)$ dla podmartyngeалу. $\square$

6.2 Jednostajna całkowalność

By przenieść twierdzenia martyngealowe z przypadku dyskretnego na przypadek ciągły, wykorzystuje się często metodę aproksymacyjną. Dla uzasadnienia przejścia do granicy potrzebne są dodatkowe założenia o procesie (najczęściej wystarczy prawostronna ciągłość) oraz pewne narzędzia analityczne. Jednym z bardzo użytecznych pojęć jest jednostajna całkowalność – przypomnimy teraz jej definicję, omówimy podstawowe przykłady i własności.

Definicja 6.4. Rodzinę zmiennych losowych $(X_i)_{i \in I}$ nazywamy *jednostajnie całkowalną*, jeśli

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}_{\{|X_i| > C\}} = 0.$$

Fakt 6.5. Rodzina zmiennych losowych $(X_i)_{i \in I}$ jest jednostajnie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki

- a) $\sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| < \infty$,
- b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mathbb{P}(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}_A \leq \varepsilon$.

Dowód. $\Rightarrow$: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy C takie, że $\sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}_{\{|X_i| > C\}} \leq \varepsilon/2$. Wówczas

$$\forall_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| \leq C + \mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}_{\{|X_i| > C\}} \leq C + \varepsilon/2 < \infty$$

oraz, jeśli $\mathbb{P}(A) < \delta := \frac{\varepsilon}{2C}$, to

$$\mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}_A \leq C \mathbb{P}(A) + \mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}_{\{|X_i| > C\}} \leq C \delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Niech $M := \sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i|$ oraz $\delta > 0$ będzie takie, że $\sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}_A \leq \varepsilon$ dla $\mathbb{P}(A) \leq \delta$. Wówczas, jeśli $C = M/\delta$, to $\mathbb{P}(|X_i| > C) < M/C = \delta$ dla dowolnego $i \in I$, czyli $\sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}_{\{|X_i| > C\}} \leq \varepsilon$. $\square$

Przykłady rodzin jednostajnie całkowalnych

1. Rodzina jednoelementowa $\{Y\}$ taka, że $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

Istotnie $\lim_{C \rightarrow \infty} \mathbb{E}|Y|I_{\{|Y| > C\}} = 0$.

2. Rodzina wspólnie ograniczona przez zmienną całkowalną tzn. rodzina $(X_i)_{i \in I}$ taka, że $\forall i \in I |X_i| \leq Y$ oraz $\mathbb{E}Y < \infty$.

Wynika to z Faktu 6.5, poprzedniego przykładu i oczywistej obserwacji $\mathbb{E}|X_i|I_A \leq \mathbb{E}|Y|I_A$.

3. Rodzina uśrednień ustalonej całkowalnej zmiennej losowej, tzn. rodzina postaci $(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_i))_{i \in I}$, gdzie $\mathbb{E}|X| < \infty$, zaś $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ dowolna rodzina σ -podciał $\mathcal{F}$.

Na podstawie nierówności Jensena $\mathbb{E}|X_i| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_i)| \leq \mathbb{E}|X|$, a zatem

$$\mathbb{P}(|X_i| \geq C) \leq \frac{\mathbb{E}|X_i|}{C} \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{C} \leq \delta \text{ dla } C \geq \frac{\delta}{\mathbb{E}|X|}.$$

Zbiór $\{|X_i| > C\} \in \mathcal{F}_i$, więc z nierówności Jensena

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_i|I_{\{|X_i| > C\}} &= \mathbb{E}|\mathbb{E}(X I_{\{|X_i| > C\}}|\mathcal{F}_i)| \leq \mathbb{E}\mathbb{E}(|X|I_{\{|X_i| > C\}}|\mathcal{F}_i) \\ &\leq \mathbb{E}(|X|I_{\{|X_i| > C\}}) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

jeśli tylko dobierzemy odpowiednio małe δ korzystając z jednostajnej całkowalności $\{|X|\}$.

Fakt 6.6. Załóżmy, że $1 \leq p < \infty$, a X_n są zmiennymi losowymi takimi, że rodzina $(|X_n|^p)_{n=1}^\infty$ jest jednostajnie całkowalna. Wówczas X_n zbiega do zmiennej X w L_p wtedy i tylko wtedy, gdy X_n zbiega do X według prawdopodobieństwa.

Dowód. Wystarczy udowodnić, że zbieżność X_n według prawdopodobieństwa implikuje zbieżność w L_p , bo przeciwna implikacja jest zawsze prawdziwa. Załóżmy więc, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, wówczas dla pewnego podciągu n_k , X_{n_k} zbiega do X p.n., stąd na mocy Lematu Fatou

$$\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E} \lim |X_{n_k}|^p \leq \liminf \mathbb{E}|X_{n_k}|^p \leq \sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty.$$

Zatem rodzina $\{|X_n|^p: n = 1, 2, \dots\} \cup \{|X|^p\}$ jest jednostajnie całkowalna. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ tak by dla $\mathbb{P}(A) < \delta$ zachodziło $\mathbb{E}|X_n|^p I_A \leq \varepsilon$ oraz $\mathbb{E}|X|^p I_A \leq \varepsilon$. Mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n - X|^p &\leq \varepsilon^p + \mathbb{E}|X_n - X|^p I_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} \\ &\leq \varepsilon^p + 2^p \mathbb{E}|X_n|^p I_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + 2^p \mathbb{E}|X|^p I_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}, \end{aligned}$$

a ponieważ $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, więc $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \delta$ dla dużych n , czyli

$$\mathbb{E}|X_n - X|^p \leq \varepsilon^p + 2^{p+1} \varepsilon \text{ dla dostatecznie dużych } n.$$

□

Wniosek 6.7. *Jeśli rodzina $(X_n)_{n=1}^\infty$ jest jednostajnie całkowalna oraz X_n zbiega prawie na pewno do zmiennej X , to $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n \mathbb{I}_A = \mathbb{E}X \mathbb{I}_A$ dla wszystkich zdarzeń A .*

Dowód. Stosujemy Fakt 6.6 i oczywiste szacowanie $|\mathbb{E}X_n \mathbb{I}_A - \mathbb{E}X \mathbb{I}_A| \leq \mathbb{E}|X_n - X|$. $\square$

6.3 Twierdzenia Dooba o stopowaniu

Zacznijmy od przypomnienia lematu Dooba o stopowaniu martingałów z czasem dyskretnym.

Lemat 6.8. *Założmy, że $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ jest martingalem (odp. nad-, pod-), zaś $0 \leq \tau \leq \sigma \leq N$ dwoma momentami zatrzymania. Wówczas*

$$\mathbb{E}(X_\sigma | \mathcal{F}_\tau) = X_\tau \quad \text{p.n. (odp. } \leq, \geq \text{)}.$$

Dowód. Pokażemy dowód dla martingałów. Musimy pokazać, że dla $A \in \mathcal{F}_\tau$, $\mathbb{E}X_\tau \mathbb{I}_A = \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}_A$. Połóżmy $A_k := A \cap \{\tau = k\}$ dla $k = 0, 1, \dots, N$. Mamy

$$(X_\sigma - X_\tau) \mathbb{I}_{A_k} = (X_\sigma - X_k) \mathbb{I}_{A_k} = \sum_{i=k}^{\sigma-1} (X_{i+1} - X_i) \mathbb{I}_{A_k} = \sum_{i=k}^N (X_{i+1} - X_i) \mathbb{I}_{A_k \cap \{\sigma > i\}},$$

zatem

$$\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau) \mathbb{I}_{A_k}] = \sum_{i=k}^N \mathbb{E}[(X_{i+1} - X_i) \mathbb{I}_{A_k \cap \{\sigma > i\}}] = 0,$$

gdyż $A_k \cap \{\sigma > i\} \in \mathcal{F}_i$. Stąd

$$\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau) \mathbb{I}_A] = \sum_{k=0}^N \mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau) \mathbb{I}_{A_k}] = 0.$$

Dla nadmartingałów (podmartingałów) trzeba niektóre równości zastąpić nierównościami, szczegóły pozostawiamy jako proste ćwiczenie. $\square$

Uwaga 6.9. Lemat 6.8 nie jest prawdziwy, jeśli nie założymy ograniczoności momentów zatrzymania, np. biorąc $X_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$, gdzie ε_k niezależne zmienne losowe takie, że $\mathbb{P}(\varepsilon_k = \pm 1) = 1/2$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\tau = 0$, $\sigma = \inf\{n: X_n = 1\}$ widzimy, że $\mathbb{E}X_\tau = 0 \neq 1 = \mathbb{E}X_\sigma$.

Sformułujemy teraz ciągłą wersję Lematu 6.8.

Twierdzenie 6.10. *a) Założmy, że T jest przedziałem, $(X_t)_{t \in T}$ jest prawostronnie ciągłym martingalem, zaś σ i τ są czasami zatrzymania takimi, że $\sigma \leq \tau \leq t_{\max}$ oraz $t_{\max} \in T$. Wówczas $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ p.n..*

b) Jeśli $(X_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ jest prawostronnie ciągłym martingalem z ostatnim elementem X_∞ to dla dowolnych dwu czasów zatrzymania $\sigma \leq \tau$, $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ p.n.

Dowód. Udowodnimy część a) (część b) można za pomocą zmiany czasu sprowadzić do a)). Zdefiniujemy

$$\tau_n(\omega) := \begin{cases} t_{\max} - \frac{k}{n} & \text{dla } \tau(\omega) \in (t_{\max} - \frac{k+1}{n}, t_{\max} - \frac{k}{n}], \quad k = 0, 1, \dots, n^2, \\ t_{\max} - n & \text{dla } \tau(\omega) \leq t_{\max} - n \end{cases}$$

oraz

$$\sigma_n(\omega) := \begin{cases} t_{\max} - \frac{k}{n} & \text{dla } \sigma(\omega) \in (t_{\max} - \frac{k+1}{n}, t_{\max} - \frac{k}{n}], \quad k = 0, 1, \dots, n^2, \\ t_{\max} - n & \text{dla } \sigma(\omega) \leq t_{\max} - n. \end{cases}$$

Wówczas $\sigma_n \leq \tau_n \leq t_{\max}$ są ograniczonymi czasami zatrzymania przyjmującymi jedynie skończenie wiele wartości. Zatem na mocy Lematu 6.8 mamy $\mathbb{E}(X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}$ p.n., $\mathbb{E}(X_{t_{\max}} | \mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}$ p.n. oraz $\mathbb{E}(X_{t_{\max}} | \mathcal{F}_{\tau_n}) = X_{\tau_n}$ p.n., w szczególności więc rodziny $(X_{\tau_n})_{n=1}^{\infty}$ oraz $(X_{\sigma_n})_{n=1}^{\infty}$ są jednostajnie całkowalne. Ponieważ $\tau_n \rightarrow \tau+$ oraz $\sigma_n \rightarrow \sigma+$, więc z prawostronnej ciągłości X oraz Faktu 6.6 $X_{\tau_n} \rightarrow X_{\tau}$, $X_{\sigma_n} \rightarrow X_{\sigma}$ p.n. i w L_1 . Weźmy $A \in \mathcal{F}_{\sigma} \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$, wówczas

$$\mathbb{E}X_{\tau}I_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_{\tau_n}I_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_{\sigma_n}I_A = \mathbb{E}X_{\sigma}I_A,$$

co oznacza, że $\mathbb{E}(X_{\tau} | \mathcal{F}_{\sigma}) = X_{\sigma}$ p.n.. □

Uwaga 6.11. Powyższy dowód pokazuje też całkowalność zmiennych X_{τ} i X_{σ} .

Uwaga 6.12. Niewielka modyfikacja dowodu pokazuje, że jeśli $(X_t)_{t \in T}$ jest prawostronnie ciągłym nieujemnym podmartingalem, zaś σ i τ są czasami zatrzymania takimi, że $\sigma \leq \tau \leq t_{\max}$ oraz $t_{\max} \in T$, to $\mathbb{E}(X_{\tau} | \mathcal{F}_{\sigma}) \geq X_{\sigma}$ p.n.. Nieujemność jest tu potrzebna po to, by z warunków $\mathbb{E}(X_{t_{\max}} | \mathcal{F}_{\sigma_n}) \geq X_{\sigma_n}$ p.n. oraz $\mathbb{E}(X_{t_{\max}} | \mathcal{F}_{\tau_n}) \geq X_{\tau_n}$ wywnioskować jednostajną całkowalność $(X_{\tau_n})_{n=1}^{\infty}$ oraz $(X_{\sigma_n})_{n=1}^{\infty}$.

6.4 Nierówności maksymalne

Lemat 6.13. *Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ będzie podmartingalem, wówczas dla wszystkich $\lambda \geq 0$ mamy*

$$\begin{aligned} a) \quad & \lambda \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda\}} \leq \mathbb{E}X_N^+, \\ b) \quad & \lambda \mathbb{P}\left(\min_{0 \leq n \leq N} X_n \leq -\lambda\right) \leq \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\min_{0 \leq n \leq N} X_n < -\lambda\}} - \mathbb{E}X_0 \leq \mathbb{E}X_N^+ - \mathbb{E}X_0. \end{aligned}$$

Dowód. a) Niech $\tau := \inf\{n : X_n \geq \lambda\}$, z lematu 6.8 dostajemy (wobec $\tau \wedge N \leq N$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_N & \geq \mathbb{E}X_{\tau \wedge N} = \mathbb{E}X_{\tau} \mathbb{1}_{\{\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda\}} + \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\max_{0 \leq n \leq N} X_n < \lambda\}} \\ & \geq \lambda \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda\right) + \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\max_{0 \leq n \leq N} X_n < \lambda\}} \end{aligned}$$

i po przeniesieniu wartości oczekiwanych na jedną stronę dostajemy postulowaną nierówność.

b) Definiujemy $\tau := \inf\{n : X_n \leq -\lambda\}$, z lematu 6.8 dostajemy (wobec $\tau \wedge N \geq 0$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_0 &\leq \mathbb{E}X_{\tau \wedge N} = \mathbb{E}X_\tau \mathbb{1}_{\{\min_{0 \leq n \leq N} X_n \leq -\lambda\}} + \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\min_{0 \leq n \leq N} X_n > -\lambda\}} \\ &\leq -\lambda \mathbb{P}(\min_{0 \leq n \leq N} X_n \leq -\lambda) + \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\min_{0 \leq n \leq N} X_n > -\lambda\}}\end{aligned}$$

i znów wystarczy pogrupować wartości oczekiwane. □

Wniosek 6.14. *Jeśli $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ jest martingale, bądź nieujemnym podmartingalem, to*

$$\begin{aligned}a) \quad &\forall_{p \geq 1} \quad \forall_{\lambda \geq 0} \quad \lambda^p \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq n \leq N} |X_n| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}|X_N|^p, \\ b) \quad &\forall_{p > 1} \quad \mathbb{E}|X_N|^p \leq \mathbb{E} \max_{0 \leq n \leq N} |X_n|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_N|^p.\end{aligned}$$

Dowód. a) Funkcja $f(t) = |t|^p$ jest wypukła, niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, stąd na mocy Faktu 6.3 $|X_n|^p$ jest nieujemnym podmartingalem, zatem z Lematu 6.13 mamy

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq n \leq N} |X_n| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}|X_N|^p \mathbb{1}_{\{\max_{0 \leq n \leq N} |X_n|^p \geq \lambda^p\}} \leq \mathbb{E}|X_N|^p.$$

b) Niech $X^* := \max_{0 \leq n \leq N} |X_n|$, z rachunku przeprowadzonego powyżej (dla $p = 1$) mamy

$$\lambda \mathbb{P}(X^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}|X_N| \mathbb{1}_{\{X^* \geq \lambda\}}.$$

Stosując kolejno wzór na całkowanie przez części, twierdzenie Fubiniego i nierówność Höldera dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \max_{0 \leq n \leq N} |X_n|^p &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mathbb{P}(X^* \geq \lambda) d\lambda \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-2} \mathbb{E}|X_N| \mathbb{1}_{\{X^* \geq \lambda\}} d\lambda \\ &= p \mathbb{E}|X_N| \int_0^{X^*} \lambda^{p-2} d\lambda \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}|X_N| (X^*)^{p-1} \\ &\leq \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}|X_N|^p)^{1/p} (\mathbb{E}(X^*)^p)^{(p-1)/p}.\end{aligned}$$

W przypadku $\mathbb{E}|X_N|^p = \infty$ lub $\mathbb{E}(X^*)^p = 0$ dowodzona nierówność jest oczywista. Jeśli $\mathbb{E}|X_N|^p < \infty$, to $\mathbb{E}|X_n|^p \leq \mathbb{E}|X_N|^p < \infty$ dla $0 \leq n \leq N$ oraz $\mathbb{E}(X^*)^p \leq \mathbb{E} \sum_{n=0}^N |X_n|^p < \infty$. Dzieląc więc otrzymaną poprzednio nierówność stronami przez $(\mathbb{E}(X^*)^p)^{(p-1)/p}$ dostajemy

$$(\mathbb{E}(X^*)^p)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}|X_N|^p)^{1/p}.$$

□

Udowodnimy teraz *nierówność maksymalną Dooba* w przypadku ciągłym.

Twierdzenie 6.15. *Założmy, że $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem, o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Wówczas*

- a) $\forall_{p \geq 1} \forall_{\lambda \geq 0} \lambda^p \mathbb{P} \left(\sup_{t \in T} |X_t| \geq \lambda \right) \leq \sup_{t \in T} \mathbb{E} |X_t|^p,$
- b) $\forall_{p > 1} \sup_{t \in T} \mathbb{E} |X_t|^p \leq \mathbb{E} \sup_{t \in T} |X_t|^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{t \in T} \mathbb{E} |X_t|^p.$

Uwaga 6.16. Oczywiście jeśli T zawiera element maksymalny $t_{\max}$, to przy założeniach twierdzenia $\sup_{t \in T} \mathbb{E} |X_t|^p = \mathbb{E} |X_{t_{\max}}|^p$.

Dowód. Jeśli D jest skończonym podzbiorem T , to na podstawie Wniosku 6.14 dostajemy

$$\lambda^p \mathbb{P} \left(\sup_{t \in D} |X_t| \geq \lambda \right) \leq \sup_{t \in D} \mathbb{E} |X_t|^p \leq \sup_{t \in T} \mathbb{E} |X_t|^p.$$

Niech T_0 będzie gęstym podzbiorem T zawierającym prawy koniec T (o ile taki istnieje), zaś D_n wstępującym ciągiem skończonych podzbiorów T_0 takim, że $\bigcup_n D_n = T_0$. Wówczas dla dowolnego $\tilde{\lambda} > 0$ dostajemy na mocy prawostronnej ciągłości

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^p \mathbb{P} \left(\sup_{t \in T} |X_t| > \tilde{\lambda} \right) &= \tilde{\lambda}^p \mathbb{P} \left(\sup_{t \in T_0} |X_t| > \tilde{\lambda} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}^p \mathbb{P} \left(\sup_{t \in D_n} |X_t| > \tilde{\lambda} \right) \leq \sup_{t \in T} \mathbb{E} |X_t|^p. \end{aligned}$$

Biorąc ciąg $\tilde{\lambda}_n \nearrow \lambda$ dostajemy postulowaną w a) nierówność. Nierówność z punktu b) wynika z Wniosku 6.14 w podobny sposób. $\square$

Uwaga 6.17. Punkt b) twierdzenia 6.15 nie zachodzi dla $p = 1$ – można skonstruować martyngał dla którego $\sup_t \mathbb{E} |X_t| < \infty$, ale $\mathbb{E} \sup_t |X_t| = \infty$. Zachodzi jednak (przy założeniach Twierdzenia 6.15) nierówność

$$\mathbb{E} \sup_{t \in T} |X_t| \leq \frac{e}{e-1} \left(1 + \sup_{t \in T} \mathbb{E} |X_t| \ln^+ |X_t| \right).$$

Wniosek 6.18. *Dla dowolnych $u, s > 0$ zachodzi*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq s} W_t \geq u \right) \leq e^{-\frac{u^2}{2s}}.$$

Dowód. Ustalmy $\lambda > 0$, wówczas $M_t := \exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2})$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_t^W$ generowanej przez proces Wienera. Stąd na mocy Twierdzenia 6.15 a) i nieujemności M_t dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq s} W_t \geq u\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq s} M_t \geq e^{\lambda u - \frac{\lambda^2 s}{2}}\right) \\ &\leq e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}} \sup_{0 \leq t \leq s} \mathbb{E}|M_t| = e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}} \mathbb{E}M_0 = e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq s} W_t \geq u\right) \leq \inf_{\lambda > 0} e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}} = e^{-\frac{u^2}{2s}}.$$

□

7 Twierdzenia o zbieżności martyngałów

7.1 Przejścia w dół przez przedział

Definicja 7.1. Załóżmy, że $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\alpha < \beta$. Jeśli I jest skończone, to określamy

$$\tau_1 := \inf\{t \in I: f(t) \geq \beta\} \text{ oraz } \sigma_1 := \inf\{t \in I: t > \tau_1, f(t) \leq \alpha\}$$

i dalej indukcyjnie dla $i = 1, 2, \dots$

$$\tau_{i+1} := \inf\{t \in I: t > \sigma_i, f(t) \geq \beta\} \text{ oraz } \sigma_{i+1} := \inf\{t \in I: t > \tau_{i+1}, f(t) \leq \alpha\}.$$

oraz definiujemy

$$D_I(f, [\alpha, \beta]) := \sup\{j: \sigma_j < \infty\} \vee 0$$

W przypadku, gdy I jest nieskończone kładziemy

$$D_I(f, [\alpha, \beta]) := \sup\{D_F(f, [\alpha, \beta]): F \subset I \text{ skończone}\}.$$

Wielkość $D_I(f, [\alpha, \beta])$ nazywamy *liczbą przejść w dół funkcji f przez przedział $[\alpha, \beta]$* .

Przypomnijmy fakt z rachunku prawdopodobieństwa wiążący skończoność liczby przejść ciągu przez przedział z istnieniem granicy

Lemat 7.2. Ciąg liczbowy x_n jest zbieżny do pewnej, niekoniecznie skończonej granicy wtedy i tylko wtedy, gdy $D_{\mathbb{N}}((x_n), [\alpha, \beta]) < \infty$ dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha < \beta$.

Następny lemat jest niewielką modyfikacją poprzedniego.

Lemat 7.3. *Jeśli $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $b \leq \infty$ jest prawostronnie ciągłą funkcją taką, że dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha < \beta$, $D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(f, [\alpha, \beta]) < \infty$, to istnieje (niekoniecznie skończona) granica $\lim_{t \rightarrow b} f(t)$.*

Dowód. Załóżmy, że postulowana granica nie istnieje, wtedy można znaleźć liczby wymierne α, β takie, że

$$\liminf_{t \rightarrow b} f(t) < \alpha < \beta < \limsup_{t \rightarrow b} f(t).$$

Stąd wynika, że istnieje rosnący ciąg liczb wymiernych t_n z przedziału $[a, b)$ taki, że $f(t_{2k-1}) \geq \beta$ oraz $f(t_{2k}) \leq \alpha$. Przyjmując $I = \{t_1, t_2, \dots\}$ widzimy, że $D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(f, [\alpha, \beta]) \geq D_I(f, [\alpha, \beta]) = \infty$. $\square$

Lemat 7.4. *Założmy, że $X = (X_t)_{t \in T}$ jest podmartyngałem względem pewnej filtracji, a F jest przeliczalnym podzbiorem T , wówczas*

$$\mathbb{E}D_F(X, [\alpha, \beta]) \leq \sup_{t \in F} \frac{\mathbb{E}(X_t - \beta)^+}{\beta - \alpha}.$$

Dowód. Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej widzimy, że wystarczy udowodnić lemat dla skończonych zbiorów F , dla uproszczenia notacji możemy oczywiście przyjąć, że $F = \{1, 2, \dots, N\}$. Zauważmy, że (przy oznaczeniach jak w Definicji 7.1)

$$X_{\tau_i \wedge N} - X_{\sigma_i \wedge N} = \begin{cases} X_{\tau_i} - X_{\sigma_i} \geq \beta - \alpha & \text{gdy } \sigma_i < \infty, \\ X_{\tau_i} - X_N \geq \beta - X_N \geq -(X_N - \beta)^+ & \text{gdy } \tau_i < \sigma_i = \infty, \\ X_N - X_N = 0 & \text{gdy } \tau_i = \infty. \end{cases}$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^N (X_{\tau_i \wedge N} - X_{\sigma_i \wedge N}) \geq (\beta - \alpha)D_F(X, [\alpha, \beta]) - (X_N - \beta)^+.$$

Na mocy Lematu 6.8, $\mathbb{E}X_{\tau_i \wedge N} \leq \mathbb{E}X_{\sigma_i \wedge N}$, więc

$$0 \geq \mathbb{E} \sum_{i=1}^N (X_{\tau_i \wedge N} - X_{\sigma_i \wedge N}) \geq \mathbb{E}(\beta - \alpha)D_F(X, [\alpha, \beta]) - \mathbb{E}(X_N - \beta)^+.$$

$\square$

7.2 Zbieżność prawie na pewno

Przypomnijmy twierdzenie dotyczące zbieżności podmartyngałów z czasem dyskretnym:

Twierdzenie 7.5. *Założmy, że $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest podmartyngałem względem pewnej filtracji takim, że $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$ (lub nadmartyngałem takim, że $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^- < \infty$), wówczas $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ istnieje i jest skończona p.n., ponadto $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

Sformułujemy teraz odpowiednik powyższego twierdzenia dla czasu ciągłego.

Twierdzenie 7.6. *Załóżmy, że $(X_t)_{t \in [a,b]}$, $b \leq \infty$ jest podmartyngałem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że $\sup_{t \in [a,b]} \mathbb{E}X_t^+ < \infty$. Wówczas $X = \lim_{t \rightarrow b} X_t$ istnieje i jest skończony p.n., ponadto $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

Dowód. Dla ustalonego $\alpha < \beta$ na podstawie Lematu 7.4 mamy

$$\mathbb{E}D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(X_t, [\alpha, \beta]) \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}(X_t - \beta)^+ < \infty,$$

zatem $\mathbb{P}(D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(X_t, [\alpha, \beta]) = \infty) = 0$. Niech

$$A := \bigcap_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta} \{D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(X_t, [\alpha, \beta]) < \infty\},$$

wówczas $\mathbb{P}(A) = 1$, bo A jest przecięciem przeliczalnej liczby zbiorów pełnej miary. Jeśli $\omega \in A$, to $D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(X_t(\omega), [\alpha, \beta]) < \infty$ dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha < \beta$, czyli na podstawie Lematu 7.3 granica $X(\omega) := \lim_{t \rightarrow b} X_t(\omega)$ istnieje (choć apriori może być nieskończona). Zauważmy, że $\mathbb{E}|X_t| = 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_t \leq 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_0$, zatem $\sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}|X_t| < \infty$. Z Lematu Fatou

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E} \lim_{t \rightarrow b} |X_t| \leq \liminf_{t \rightarrow b} \mathbb{E}|X_t| \leq \sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty,$$

zatem zmienna X jest całkowalna, a więc w szczególności skończona p.n. □

Wniosek 7.7. *Załóżmy, że $(X_t)_{t \in [a,b]}$ jest niedodatnim podmartyngałem (lub nieujemnym nadmartyngałem) o prawostronnie ciągłych trajektoriach, wówczas $X = \lim_{t \rightarrow b} X_t$ istnieje i jest skończony p.n., ponadto $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

7.3 Zbieżność martyngałów w L_p

Zacznijmy od warunków zbieżności martyngałów z czasem ciągłym w L_1 .

Twierdzenie 7.8. *Załóżmy, że $(X_t)_{t \in [a,b]}$, $b \leq \infty$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- a) *Rodzina $(X_t)_{t \in [a,b]}$ jest jednostajnie całkowalna.*
- b) *Istnieje całkowalna zmienna losowa X_b taka, że X_t zbiega do X_b w L_1 przy $t \rightarrow b$, tzn. $\lim_{t \rightarrow b} \mathbb{E}|X_t - X_b| = 0$.*
- c) *Istnieje całkowalna zmienna losowa X_b mierzalna względem σ -ciała $\mathcal{F}_b := \sigma(\bigcup_{t \in [a,b)} \mathcal{F}_t)$ taka, że $X_t = \mathbb{E}(X_b | \mathcal{F}_t)$ dla $t \in [a, b)$.*

W przypadku, gdy zachodzą warunki (a)-(c), to $X_b = \lim_{t \rightarrow b} X_t$ p.n. i w L^1 .

Dowód. a) $\Rightarrow$ b). Rodzina X_t jest jednostajnie całkowalna, więc $\sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty$, czyli wobec Twierdzenia 7.6 istnieje całkowalna zmienna losowa X_b taka, że $X_t \rightarrow X_b$ p.n. przy $t \rightarrow b$. Z jednostajnej całkowalności i Lematu 6.6 wynika zbieżność w L_1 .

b) $\Rightarrow$ c). Dla pewnego podciągu $t_k \rightarrow b$, $X_{t_k} \rightarrow X_b$ p.n., stąd możemy zakładać, że zmienna X_b jest $\mathcal{F}_b$ mierzalna. Ustalmy t i $A \in \mathcal{F}_t$, wówczas dla $s \geq t$

$$\mathbb{E}X_t \mathbf{I}_A = \mathbb{E}X_s \mathbf{I}_A \rightarrow \mathbb{E}X_b \mathbf{I}_A, \quad s \rightarrow \infty.$$

Zatem $X_t = \mathbb{E}(X_b | \mathcal{F}_t)$ p.n..

c) $\Rightarrow$ a). Wiemy, że rodzina uśrednień ustalonej zmiennej jest jednostajnie całkowalna.

Ostatnia część twierdzenia wynika z dowodu implikacji a) $\Rightarrow$ b). $\square$

Twierdzenie 7.9. *Założmy, że $(X_t)_{t \in [a,b]}$ jest prawostronnie ciągłym martingale. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

a) $\sup_{t \in [a,b]} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty$.

b) Rodzina $(|X_t|^p)_{t \in [a,b]}$ jest jednostajnie całkowalna.

c) Istnieje zmienna losowa $X_b \in L_p$ taka, że X_t zbiega do X_b w L_p przy $t \rightarrow b$, tzn. $\lim_{t \rightarrow b} \mathbb{E}|X_t - X_b|^p = 0$.

d) Istnieje losowa $X_b \in L_p$ mierzalna względem $\mathcal{F}_b := \sigma(\bigcup_{t \in [a,b]} \mathcal{F}_t)$ taka, że $X_t = \mathbb{E}(X_b | \mathcal{F}_t)$ dla $t \in [a,b]$.

W przypadku, gdy zachodzą warunki (a)-(d), to $X_b = \lim_{t \rightarrow b} X_t$ p.n. i w L^p .

Dowód. a) $\Rightarrow$ b). Na podstawie Twierdzenia 6.15 wiemy, że

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [a,b]} |X_t|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t \in [a,b]} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty,$$

co implikuje jednostajną całkowalność $|X_t|^p$.

d) $\Rightarrow$ a) Z nierówności Jensena wynika, że $\mathbb{E}|X_t|^p \leq \mathbb{E}|X_b|^p$ dla wszystkich $t \in [a,b]$.

Implikacje b) $\Rightarrow$ c) i c) $\Rightarrow$ d) wykazujemy jak w dowodzie Twierdzenia 7.8. $\square$

7.4 *Regularność trajektorii

Ta część była omówiona na wykładzie, ale nie będzie wymagana na egzaminie

W wielu twierdzeniach zakłada się, iż (X_t) jest prawostronnie ciągłym podmartingale. Oczywiście modyfikacja podmartingala jest podmartingalem – problem jest tylko z mierzalnością, ale znika on, gdy filtracja spełnia zwykłe warunki. Naturalnie jest więc zapytać kiedy dany podmartingal możemy zmodyfikować tak, by stał się prawostronnie ciągły.

Następny lemat jest prostą modyfikacją Lematu 7.3, więc przytoczymy go bez dowodu.

Lemat 7.10. *Jeśli $f: [a,b] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną taką, że dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha < \beta$, $D_{[a,b] \cap \mathbb{Q}}(f, [\alpha, \beta]) < \infty$, to granice*

$$\forall_{t \in [a,b]} f(t+) := \lim_{s \rightarrow t+, s \in \mathbb{Q}} f(s) \quad \text{oraz} \quad \forall_{t \in (a,b]} f(t-) := \lim_{s \rightarrow t-, s \in \mathbb{Q}} f(s)$$

istnieją i są skończone.

Będziemy też wykorzystywać prosty fakt.

Fakt 7.11. *Załóżmy, że $(X_n)_{n \leq 0}$ jest podmartyngałem z czasem odwróconym o wartościach średnich ograniczonych z dołu, tzn. $a := \lim_{n \rightarrow -\infty} \mathbb{E}X_n > -\infty$. Wówczas rodzina $(X_n)_{n \leq 0}$ jest jednostajnie całkowalna.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy k takie, że $\mathbb{E}X_k \leq a + \varepsilon/2$, wówczas $\mathbb{E}X_k - \varepsilon/2 \leq \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_k$ dla $n \leq k$. Zatem dla takich n , z własności podmartyngału

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n| > C\}} &= \mathbb{E}X_n \mathbb{I}_{\{X_n > C\}} - \mathbb{E}X_n \mathbb{I}_{\{X_n < -C\}} \\ &= \mathbb{E}X_n \mathbb{I}_{\{X_n > C\}} + \mathbb{E}X_n \mathbb{I}_{\{X_n \geq -C\}} - \mathbb{E}X_n \\ &\leq \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{\{X_n > C\}} + \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{\{X_n \geq -C\}} - \mathbb{E}X_k + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{\{X_n > C\}} - \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{\{X_n < -C\}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mathbb{E}|X_k| \mathbb{I}_{\{|X_n| > C\}} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Mamy $\mathbb{E}|X_n| = 2\mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n \leq 2\mathbb{E}X_0^+ - a$, więc $\alpha := \sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Zatem

$$\mathbb{P}(|X_n| > C) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|}{C} \leq \frac{\alpha}{C} \leq \delta \quad \text{dla } C := \frac{\alpha}{\delta},$$

czyli, wobec jednostajnej całkowalności rodziny jednoelementowej, dla odpowiednio małego $\delta > 0$, $\mathbb{E}|X_k| \mathbb{I}_{\{|X_n| > C\}} \leq \varepsilon/2$, a więc $\mathbb{E}|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n| > C\}} \leq \varepsilon$ dla $n \leq k$ i odpowiednio dużego C . Ponieważ rodzina $\{X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_0\}$ jest skończona, a zatem i jednostajnie całkowalna, więc dla dużych C i wszystkich $n \leq 0$, $\mathbb{E}|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n| > C\}} \leq \varepsilon$. $\square$

Twierdzenie 7.12. *Załóżmy, że T jest przedziałem, a $(X_t)_{t \in T}$ podmartyngałem (lub nadmartyngałem). Wówczas istnieje zbiór A taki, że $\mathbb{P}(A) = 1$ oraz dla wszystkich $\omega \in A$ i $t \in T$ poza odpowiednio lewym i prawym końcami T granice*

$$X_{t+}(\omega) = \lim_{s \rightarrow t+, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) \quad \text{oraz} \quad X_{t-}(\omega) = \lim_{s \rightarrow t-, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega)$$

istnieją i są skończone.

Dowód. Bez straty ogólności możemy zakładać, że X_t jest podmartyngałem. Ponieważ możemy znaleźć niemalejący ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$ taki, że $T = \bigcup_n [a_n, b_n]$, więc dowód wystarczy przeprowadzić w przypadku $T = [a, b]$. Zauważmy, że

$$\sup_{t \in [a, b]} \mathbb{E}(X_t - \beta)^+ = \mathbb{E}(X_b - \beta)^+ < \infty,$$

zatem z Lematu 7.4 dostajemy

$$\forall_{\alpha < \beta} \mathbb{P}(D_{[a, b] \cap \mathbb{Q}}(X_t, [\alpha, \beta]) = \infty) = 0.$$

Ponadto, na mocy Lematu 6.13, dla dowolnego $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [a, b] \cap \mathbb{Q}} X_t \geq \lambda\right) \leq \sup_{t \in [a, b] \cap \mathbb{Q}} \mathbb{E}X_t^+ = \mathbb{E}X_b^+ < \infty$$

oraz

$$\lambda \mathbb{P}\left(\inf_{t \in [a, b] \cap \mathbb{Q}} X_t \leq -\lambda\right) \leq \sup_{t \in [a, b] \cap \mathbb{Q}} \mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_a = \mathbb{E}X_b^+ - \mathbb{E}X_a < \infty.$$

Stąd

$$\mathbb{P}\left(-\infty < \inf_{t \in [a, b] \cap \mathbb{Q}} X_t \leq \sup_{t \in [a, b] \cap \mathbb{Q}} X_t < \infty\right) = 1.$$

Niech

$$A := \bigcap_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta} \{D_{[a, b] \cap \mathbb{Q}}(X_n, [\alpha, \beta]) < \infty\} \cap \left\{ \sup_{t \in [a, b] \cap \mathbb{Q}} |X_t| < \infty \right\},$$

wtedy $\mathbb{P}(A) = 1$. By wykazać, że zbiór A ma postulowane własności wystarczy skorzystać z Lematu 7.10. $\square$

Definicja 7.13. Funkcję $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ określoną na przedziale T nazywamy *PCLG* (często również używa się pochodzącej z francuskiego nazwy *càdlàg*) jeśli jest prawostronnie ciągła i w każdym punkcie T (poza ewentualnie lewym końcem) ma skończone lewostronne granice.

Twierdzenie 7.14. Załóżmy, że T jest przedziałem, a $X = (X_t)_{t \in T}$ jest podmartyngałem (odp. nadmartyngałem) względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ spełniającej zwykłe warunki. Wówczas X ma prawostronnie ciągłą modyfikację wtedy i tylko wtedy gdy funkcja $t \rightarrow \mathbb{E}X_t$ jest prawostronnie ciągła. Co więcej, jeśli taka modyfikacja istnieje, to istnieje również modyfikacja PCLG i $\mathcal{F}_t$ -adaptowalna będąca podmartyngałem (odp. nadmartyngałem) względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$.

Dowód. $\Leftarrow$ Wystarczy rozpatrzyć przypadek podmartyngału oraz $T = [a, b]$. Na mocy Twierdzenia 7.12 istnieje zdarzenie A takie, że $\mathbb{P}(A) = 1$ oraz dla wszystkich $\omega \in A$ granice $\lim_{s \rightarrow t+, s \in \mathbb{Q}} X_s$, $t \in [a, b]$ oraz $\lim_{s \rightarrow t-, s \in \mathbb{Q}} X_s$, $t \in (a, b]$ istnieją i są skończone. Połóżmy $Y_b := X_b$ i dla $t \in [a, b)$,

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{s \rightarrow t+, s \in \mathbb{Q}} X_s(\omega) & \omega \in A, \\ 0 & \omega \notin A. \end{cases}$$

Proces Y_t ma trajektorie PCLG oraz jest $\mathcal{F}_t$ -adaptowalny (korzystamy z tego, że filtracja spełnia zwykłe warunki).

Niech $t_n \searrow t+$, ponieważ $\mathbb{E}X_{t_n} \geq \mathbb{E}X_a$, więc $(X_{t_n})_n$ jest jednostajnie całkowalny jako podmartyngał z czasem odwróconym (Fakt 7.11). Weźmy $A \in \mathcal{F}_t$, wówczas

$$\mathbb{E}X_t \mathbf{I}_A \leq \mathbb{E}X_{t_n} \mathbf{I}_A \rightarrow \mathbb{E}Y_t \mathbf{I}_A \text{ przy } n \rightarrow \infty,$$

stąd $Y_t = \mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_t) \geq X_t$ p.n.. Co więcej

$$\mathbb{E}(Y_t - X_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_{t_n} - \mathbb{E}X_t = 0$$

na mocy prawostronnej ciągłości $t \rightarrow \mathbb{E}X_t$, czyli $Y_t = X_t$ p.n., a zatem Y jest szukaną modyfikacją X .

$\Rightarrow$: Zauważmy, że jeśli X_t prawostronnie ciągły, to $X_{t+} = X_t$, biorąc $t_n \searrow t+$ i wykorzystując jednostajną całkowalność $(X_{t_n})_n$ (Fakt 7.11) dostajemy $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_{t+} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_{t_n}$. $\square$

8 Procesy Markowa

8.1 Definicja i przykłady

Podczas wykładu z Rachunku Prawdopodobieństwa II bada się łańcuchy Markowa z przeliczalną przestrzenią Markowa E , tzn. takie ciągi zmiennych losowych $(X_n)_{n \geq 0}$ o wartościach w E dla których dla wszystkich $n = 1, 2, \dots$ oraz wszystkich $x_0, \dots, x_n \in E$ takich, że $\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Nieformalnie, powyższa własność mówi, że do wyznaczenia przyszłego położenia rozważanego procesu wystarczy znajomość jego położenia w chwili obecnej, a nie jest ważne jak zachowywał się w chwilach wcześniejszych. Naturalnie jest zapytać jak taką własność sformalizować w przypadku, gdy przestrzeń stanów nie jest przeliczalna, a zbiór indeksów nie jest dyskretny – główna trudność jest jak zobaczymy w tym pierwszym przypadku.

Zanim sformułujemy definicję przypomnijmy, że $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \in T, s \leq t)$ oznacza filtrację generowaną przez proces X . Ponadto dla zdarzenia A , $\mathbb{P}(A | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{G})$ to całkowalna, $\mathcal{G}$ -mierzalna zmienna losowa dla której

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{E}(\mathbb{P}(A | \mathcal{G}) \mathbb{1}_B) \quad \text{dla wszystkich } B \in \mathcal{G}.$$

Definicja 8.1. Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie procesem stochastycznym o wartościach w pewnej przestrzeni $(E, \mathcal{E})$ takim, że $T \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że X jest *procesem Markowa*, jeśli dla wszystkich $t \in T$ oraz $h > 0$ takich, że $t + h \in T$ oraz wszystkich $\Gamma \in \mathcal{E}$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_t^X) = \mathbb{P}(X_{t+h} \in \Gamma | X_t) \quad \text{p.n.} \quad (5)$$

Często wygodniej jest korzystać z funkcyjnej wersji własności Markowa.

Fakt 8.2. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa o wartościach w $(E, \mathcal{E})$. Wówczas dla wszystkich $t \in T$, $h > 0$ takich, że $t + h \in T$ oraz funkcji $f : E \mapsto \mathbb{R}$ mierzalnych takich, że $\mathbb{E}|f(X_{t+h})| < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}(f(X_{t+h}) | \mathcal{F}_t^X) = \mathbb{E}(f(X_{t+h}) | X_t) \quad \text{p.n.} \quad (6)$$

Dowód. Wykorzystamy, znaną z teorii miary i całki, metodę komplikacji funkcji.

- i) Dla $f = \mathbb{1}_\Gamma$, wzór (6) wynika z (5);
- ii) Dla funkcji prostej f wykorzystujemy i) i liniowość wwo;
- iii) Dla funkcji nieujemnej f takiej, że $\mathbb{E}f(X_{t+h}) < \infty$ znajdujemy ciąg nieujemnych funkcji prostych f_n zbieżny punktowo w sposób niemalejący do f i korzystamy z ii) oraz twierdzenia o zbieżności monotonicznej dla wwo;
- iv) Dowolną funkcję f spełniającą założenia możemy wyrazić jako $f = f_+ - f_-$ i skorzystać z iii) i liniowości wwo. $\square$

Kolejne twierdzenie (którego dowód pominiemy) pokazuje, że jest wiele innych równoważnych sposobów wyrażania własności Markowa. Jego sformułowanie wymaga definicji σ -ciała zdarzeń zależnych od przyszłości procesu

$$\mathcal{F}_{\geq t}^X := \sigma(X_s : s \in T, s \geq t), \quad t \in T$$

Twierdzenie 8.3. Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie procesem stochastycznym o wartościach w pewnej przestrzeni $(E, \mathcal{E})$ takim, że $T \subset \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

i) Dla wszystkich $t \in T$, $A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X$ i $B \in \mathcal{F}_t^X$

$$\mathbb{P}(A \cap B | X_t) = \mathbb{P}(A | X_t) \mathbb{P}(B | X_t) \quad p.n.;$$

ii) Dla wszystkich $t \in T$, zmiennych losowych Y, Z takich, że Y jest $\mathcal{F}_{\geq t}^X$ mierzalne, Z jest $\mathcal{F}_t^X$ mierzalne oraz Y, Z i YZ są całkowalne zachodzi

$$\mathbb{E}(YZ | X_t) = \mathbb{E}(Y | X_t) \mathbb{E}(Z | X_t) \quad p.n.;$$

iii) Dla wszystkich $t \in T$ oraz całkowalnych i $\mathcal{F}_{\geq t}^X$ mierzalnych zmiennych losowych Y zachodzi

$$\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_t^X) = \mathbb{E}(Y | X_t);$$

iv) Dla wszystkich $t \in T$ oraz $A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X$ zachodzi

$$\mathbb{P}(A | \mathcal{F}_t^X) = \mathbb{P}(A | X_t) \quad p.n.;$$

v) Dla wszystkich $t \in T$, $h > 0$ takich, że $t + h \in T$ oraz $\Gamma \in \mathcal{E}$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_t^X) = \mathbb{P}(X_{t+h} \in \Gamma | X_t) \quad p.n.;$$

vi) Dla wszystkich $t \in T$, $h > 0$ takich, że $t + h \in T$ oraz funkcji $f : E \mapsto \mathbb{R}$ mierzalnych takich, że $\mathbb{E}|f(X_{t+h})| < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}(f(X_{t+h}) | \mathcal{F}_t^X) = \mathbb{E}(f(X_{t+h}) | X_t) \quad p.n.;$$

vii) Dla wszystkich $t \in T$, $h > 0$ takich, że $t + h \in T$ oraz $s_1 < s_2 < \dots < s_n = t$ takich, że $s_j \in T$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in \Gamma | X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) = \mathbb{P}(X_{t+h} \in \Gamma | X_t) \quad p.n.;$$

Zauważmy, że warunek i) powyższego twierdzenia implikuje, że jeśli $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa, to również proces $(X_{-t})_{t \in T}$ ma własność Markowa.

Terminologia. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa. Wówczas

- jeśli $T \subset \mathbb{Z}$, to X nazywamy *łańcuchem Markowa*;
- jeśli $T \subset \mathbb{Z}$ oraz E jest zbiorem conajwyżej przeliczalnym, to X nazywamy *dyskretnym łańcuchem Markowa*;
- jeśli T jest przedziałem (najczęściej $[0, \infty)$), a E jest zbiorem conajwyżej przeliczalnym, to X nazywamy *łańcuchem Markowa z czasem ciągłym*.

Dowód kolejnej uwagi będzie na ćwiczeniach.

Uwaga 8.4. i) Jeśli T jest przedziałem w $\mathbb{Z}$, to $(X_n)_{n \in T}$ jest procesem (łańcuchem) Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n \in T$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in \Gamma | \mathcal{F}_n^X) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in \Gamma | X_n);$$

ii) Jeśli przestrzeń stanów E jest przeliczalna, a $\mathcal{E}$ to wszystkie jej podzbiory, to $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ i $x_1, \dots, x_n \in E$ takich, że $t_1, \dots, t_n \in T$ oraz $\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n | X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}).$$

Przykład 1. Proces Poissona jest procesem Markowa

Możemy albo rozumować tak jak w kolejnym przykładzie albo skorzystać z poprzedniej uwagi i zauważyć, że dla $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ oraz liczb naturalnych $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t_n} = k_n | N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_{n-1}} = k_{n-1}) \\ = \mathbb{P}(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1} | N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_{n-1}} = k_{n-1}) \\ = \mathbb{P}(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}) = \mathbb{P}(N_{t_n} = k_n | N_{t_{n-1}} = k_{n-1}), \end{aligned}$$

gdzie druga i trzecia równość wynikają z niezależności przyrostów procesu Poissona.

Przykład 2. Proces Wienera jest procesem Markowa.

Istotnie, dla dowolnego $t \geq 0$, $h > 0$ i funkcji mierzalnej f takiej, że $f(W_{t+h})$ jest całkowne zachodzą p.n. równości

$$\mathbb{P}(f(W_{t+h}) | \mathcal{F}_t^W) = \mathbb{E}(f(W_t + (W_{t+h} - W_t)) | \mathcal{F}_t^W) = g(W_t) = \mathbb{E}(f(W_t + (W_{t+h} - W_t)) | W_t),$$

gdzie $g(x) = \mathbb{E}f(x + W_{t+h} - W_t)$. Wykorzystujemy tu następującą własność wwo.

Lemat 8.5. Załóżmy, że X i Y są zmiennymi losowymi, f funkcją mierzalną, zaś $\mathcal{G}$ sigma ciałem takimi, że X jest $\mathcal{G}$ mierzalne, Y jest niezależne od $\mathcal{G}$ oraz $\mathbb{E}|f(X + Y)| < \infty$. Wówczas $\mathbb{E}(f(X + Y) | \mathcal{G}) = g(X)$ p.n., gdzie g jest dane wzorem $g(x) = \mathbb{E}g(x + Y)$.

Powyższy przykład pokazuje, że każdy proces o przyrostach niezależnych jest procesem Markowa.

Używa się też ogólniejszej definicji procesu Markowa względem filtracji.

Definicja 8.6. Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie procesem stochastycznym o wartościach w pewnej przestrzeni $(E, \mathcal{E})$ takim, że $T \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że X jest *procesem Markowa względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, jeśli

- i) proces $(X_t)_{t \in T}$ jest $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ -adaptowalny
- ii) dla wszystkich $t \in T$ oraz $h > 0$ takich, że $t + h \in T$ oraz wszystkich $\Gamma \in \mathcal{E}$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+h} \in \Gamma | X_t) \quad \text{p.n.} \quad (7)$$

Nietrudno zauważyć, że jeśli $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, to $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_t^X$ dla wszystkich $t \in T$ oraz X jest procesem Markowa w zwykłym sensie.

Rozumowanie z przykładu 2 pokazuje, że każdy prawostronnie ciągły proces $(X_t)_{t \in T}$ o niezależnych przyrostach jest procesem Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_{t+}^X)_{t \in T}$.

8.2 Funkcje przejścia. Równanie Chapmana-Kołmogorowa

Fundamentalną rolę w badaniu łańcuchów Markowa pełnią macierze przejścia. Ich uogólnieniem są funkcje przejścia. Niech $(X_t)_{t \in T}$ będzie łańcuchem Markowa. Wówczas dla $s \leq t$, $s, t \in T$ istnieją funkcje nieujemne $P_{s,t}(x, \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{E}$ takie, że

$$\mathbb{P}(X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{P}(X_t \in \Gamma | X_s) = P_{s,t}(x, \Gamma) \quad \text{p.n..}$$

Nietrudno zauważyć, że $P_{s,t}(X_s, E) = 1$ p.n. oraz dla parami rozłącznych zbiorów $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ z $\mathcal{E}$, $P_{s,t}(X_s, \bigcup_{i \geq 1} \Gamma_i) = \sum_{i \geq 1} P_{s,t}(X_s, \Gamma_i)$ p.n. Motywuje to następujące definicje.

Definicja 8.7. Rodzinę funkcji $(P_{s,t}(x, \Gamma))_{s,t \in T, s \leq t, x \in E, \Gamma \in \mathcal{E}}$ nazywamy *funkcją przejścia* (*funkcją prawdopodobieństwa przejścia*, *jądrem przejścia*) jeśli zachodzą następujące trzy własności

- i) $\forall_{s,t \in T, s \leq t} \forall_{x \in E} P_{s,t}(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną na $(E, \mathcal{E})$;
- ii) $\forall_{s,t \in T, s \leq t} \forall_{\Gamma \in \mathcal{E}} x \rightarrow P_{s,t}(x, \Gamma)$ jest funkcją mierzalną z $(E, \mathcal{E})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
- iii) $\forall_{s \in T} \forall_{x \in E} \forall_{\Gamma \in \mathcal{E}} P_{s,s}(x, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$.

Definicja 8.8. Jeśli $(P_{s,t}(\cdot, \cdot))$ jest funkcją przejścia, to mówimy, że $(P_{s,t})$ jest *funkcją przejścia dla procesu Markowa* $X = (X_t)$, jeśli

$$\forall_{s,t \in T, s \leq t} \forall_{\Gamma \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(X_t \in \Gamma | X_s) = P_{s,t}(X_s, \Gamma) \quad \text{p.n.}$$

Uwaga 8.9. Nieco nieformalnie można powyższą definicję zapisać jako

$$P_{s,t}(x, \Gamma) = \mathbb{P}(X_t \in \Gamma | X_s = x).$$

Przykład 1 Załóżmy, że E jest zbiorem przeliczalnym oraz $\mathcal{E}$ to wszystkie podzbiory E . Funkcja przejścia w tym przypadku jest wyznaczona przez *macierz przejścia*

$$P^{s,t}(x, y) = (p_{s,t}(x, y))_{x, y \in E}, \text{ gdzie } p_{s,t}(x, y) := P_{s,t}(x, \{y\}).$$

Wtedy dla dowolnego $\Gamma \subset E$ mamy $P_{s,t}(x, \Gamma) = \sum_{y \in \Gamma} P_{s,t}(x, \{y\}) = \sum_{y \in \Gamma} p_{s,t}(x, y)$.

Macierz przejścia musi spełniać następujące dwa warunki:

- i) $\forall_{s \leq t} \forall_{x \in E} \sum_{y \in E} p_{s,t}(x, y) = 1$ oraz $\forall_{x, y \in E} p_{s,t}(x, y) \geq 0$, czyli $P^{s,t}$ jest macierzą stochastyczną;
- ii) $p_{s,s}(x, y) = \delta_x(y)$, czyli $P^{s,s} = \text{Id}$.

Przykład 2 Załóżmy, że $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (lub $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$) Mówimy, że rodzina funkcji $(p_{s,t}(x, y))_{x, y \in E, s < t, s, t \in T}$ jest *gęstością przejścia* jeśli

$$\forall_{s < t, s, t \in T} \forall_{x \in E} \forall_{\Gamma \in \mathcal{E}} P_{s,t}(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} p_{s,t}(x, y) dy.$$

Gęstość przejścia musi spełniać następujące dwa warunki:

- a) $\forall_{s < t} \forall_{x, y \in E} p_{s,t}(x, y) \geq 0, \int_E p_{s,t}(x, y) dy = 1$,
- b) $\forall_{s < t} (x, y) \rightarrow p_{s,t}(x, y)$ jest funkcją mierzalną z $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Proces Wienera jest procesem Markowa z gęstością przejścia

$$p_{s,t}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right).$$

W podobny sposób jak w dowodzie faktu 8.2 pokazujemy, że jeśli $P_{s,t}$ jest funkcją przejścia dla procesu Markowa $(X_t)_{t \in T}$, to dla dowolnej funkcji mierzalnej ograniczonej $f: E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\forall_{s, t \in T, s \leq t} \mathbb{P}(f(X_t) | X_s) = \int_E f(y) P_{s,t}(X_s, dy) \quad \text{p.n.} \quad (8)$$

Nie każda funkcja spełniająca definicję 8.7 jest funkcją przejścia pewnego łańcucha Markowa, tak jak nie każda rodzina macierzy stochastycznych jest rodziną macierzy przejścia. Muszą być spełnione jeszcze pewne warunki zgodności. Istotnie, zauważmy, że dla $s < t < u$

$$\begin{aligned} P_{s,u}(X_s, \Gamma) &= \mathbb{P}(X_u \in \Gamma | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(X_u \in \Gamma | \mathcal{F}_t^X) | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(P_{t,u}(X_t, \Gamma) | \mathcal{F}_s^X) \\ &= \int_E P_{t,u}(y, \Gamma) P_{s,t}(X_s, dy) \quad \text{p.n.}, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z (8).

Motywuje to następującą definicję

Definicja 8.10. Mówimy, że funkcja przejścia $P_{s,t}$ spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa, jeśli dla wszystkich $s, t, u \in T$ takich, że $s < t < u$ zachodzi

$$\forall_{x \in E} \forall_{\Gamma \in \mathcal{E}} P_{s,u}(x, \Gamma) = \int_E P_{t,u}(y, \Gamma) P_{s,t}(x, dy).$$

Uwaga 8.11. a) W przypadku przeliczalnej przestrzeni fazowej E i macierzy przejścia $P^{s,t} = (p_{s,t}(x, y))_{x,y \in E}$ równanie Chapmana Kołmogorowa przyjmuje postać

$$\forall_{s < t < u} \forall_{x, z \in E} p_{s,u}(x, z) = \sum_{y \in E} p_{s,t}(x, y) p_{t,u}(y, z)$$

czyli $P^{s,u} = P^{s,t} P^{t,u}$.

b) W przypadku $E = \mathbb{R}^n$ i gęstości przejścia $p_{s,t}$ równanie Chapmana Kołmogorowa ma postać

$$\forall_{s < t < u} \forall_{x \in E} p_{s,u}(x, z) = \int_E p_{s,t}(x, y) p_{t,u}(y, z) dy \quad \text{dla p.w. } z \in E.$$

8.3 Rozkłady skończenie wymiarowe procesów Markowa

Wiemy, że $(X_n)_{n \geq 0}$ jest łańcuchem Markowa o wartościach w przeliczalnej przestrzeni E z rozkładem początkowym μ i macierzami przejścia w jednym kroku $(p_{n-1,n}(x, y))_{x,y \in E}$, $n = 1, 2, \dots$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n = 1, 2, \dots$ oraz $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu(\{x_0\}) p_{0,1}(x_0, x_1) \cdots p_{n-1,n}(x_{n-1}, x_n).$$

Ponadto, łańcuch Markowa o zadanym rozkładzie początkowym oraz macierzach przejścia istnieje i ma jednoznacznie wyznaczony rozkład.

W tej części odpowiemy na pytanie jak powyższe własności uogólnić na przypadek procesów Markowa. Niestety sformułowania dla przestrzeni nieprzeliczalnych są dłuższe i nieco bardziej techniczne. Zaczniemy od prostego lematu.

Lemat 8.12. Załóżmy, że $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ o wartościach w $(E, \mathcal{E})$ i funkcji przejścia $P_{s,t}$. Wówczas dla wszystkich $s, t_1, \dots, t_n \in T$ takich, że $s \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ i wszystkich ograniczonych funkcji mierzalnych $f_j: E \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ zachodzi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) | \mathcal{F}_s) \\ &= \int_{E^n} f_1(y_1) \cdots f_n(y_n) P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) P_{s, t_1}(X_s, dy_1) \quad \text{p.n.} \end{aligned} \quad (9)$$

Dowód. Wykażemy tezę indukcyjnie po n .

Dla $n = 1$ i $f_1 = \mathbb{1}_\Gamma$ teza wynika z definicji procesu Markowa i funkcji przejścia. Przypadek $n = 1$ i dowolne f_1 otrzymujemy metodą komplikacji funkcji (można też skorzystać z Faktu 8.2 i wzoru (8)).

Założmy, że teza zachodzi dla n . By wykazać ją dla $n + 1$ zauważamy, że

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) f_{n+1}(X_{t_{n+1}}) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E} \mathbb{E}((f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) f_{n+1}(X_{t_{n+1}}) | \mathcal{F}_{t_n}) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) \mathbb{E}(f_{n+1}(X_{t_{n+1}}) | \mathcal{F}_{t_n}) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) \int_E f(y_{n+1}) P_{t_n, t_{n+1}}(X_s, dy_{n+1}) | \mathcal{F}_s) \quad \text{p.n.}, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z udowodnionego przypadku $n = 1$. By zakończyć dowód kroku indukcyjnego wystarczy zastosować tezę indukcyjną z

$$f_n(y) \int_E f(y_{n+1}) P_{t_n, t_{n+1}}(y, dy_{n+1})$$

zamiast $f_n(y)$. □

Kolejny wniosek opisuje rozkłady skończenie-wymiarowe procesu Markowa o zadanym rozkładzie początkowym i funkcji przejścia.

Wniosek 8.13. *Założmy, że $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa o wartościach w $(E, \mathcal{E})$ i funkcji przejścia $P_{s,t}$. Wówczas dla wszystkich $s, t_1, \dots, t_n \in T$ takich, że $s \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ oraz $\Gamma \in \mathcal{E}^{\otimes n}$*

$$\mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in \Gamma) = \int_E \int_\Gamma P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) P_{s, t_1}(x, dy_1) d\mu_{X_s}(x). \quad (10)$$

Dowód. Dla $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$ takiego, że $\Gamma_i \in \mathcal{E}$, $1 \leq i \leq n$ wzór (10) wynika z odcałkowania wzoru (9) zastosowanego z $f_i = \mathbb{1}_{\Gamma_i}$. Rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów $\mathcal{E}^{\otimes n}$ spełniających (10) tworzy λ -układ zawierający π -układ $\mathcal{B}$ zbiorów postaci $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$. Zatem, na mocy lematu o π -, λ -układach, $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{E}^{\otimes n}$. □

Możemy teraz sformułować i udowodnić twierdzenie charakteryzujące własność Markowa w terminach rozkładów skończenie-wymiarowych.

Twierdzenie 8.14. *Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie procesem o wartościach w $(E, \mathcal{E})$ i zbiorze indeksów $T \subset \mathbb{R}$, zaś $P_{s,t}$ będzie funkcją przejścia. Wówczas X jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $s, t_1, \dots, t_n \in T$ takich, że $s \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ oraz $\Gamma_i \in \mathcal{E}$, $i = 1, \dots, n$, zachodzi*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n) \\ &= \int_E \int_{\Gamma_1} \cdots \int_{\Gamma_n} P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) P_{s, t_1}(x, dy_1) d\mu_{X_s}(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Dowód. Implikacja "⇒" wynika z wniosku 8.13. By wykazać przeciwną implikację musimy wykazać, że dla dowolnego $t \in T$, $h > 0$ takiego, że $t + h \in T$ oraz $\Gamma \in \mathcal{E}$ mamy

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_t^X) = P_{t,t+h}(X_t, \Gamma) \quad \text{p.n.},$$

czyli dla wszystkich $A \in \mathcal{F}_t^X$,

$$\mathbb{P}(\{X_{t+h} \in \Gamma\} \cap A) = \mathbb{E}P_{t,t+h}(X_t, \Gamma) \mathbb{1}_A. \quad (12)$$

Ustalmy t, h i Γ . Rodzina zbiorów $A \in \mathcal{F}_t^X$ spełniających (12) tworzy λ -układ, wystarczy więc pokazać, że zawiera π -układ zbiorów (generujący $\mathcal{F}_t^X$) postaci

$$A = \{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}, \quad t_1, \dots, t_n \in T, t_1 < t_2 < \dots < t_n = t, \quad \Gamma_i \in \mathcal{E}.$$

Oznaczając $t_{n+1} := t + h$, $\Gamma_{n+1} = \Gamma$ wystarczy pokazać, że dla $t_1 < \dots < t_{n+1}$, $t_i \in T$, $\Gamma_i \in \mathcal{E}$, $1 \leq i \leq n+1$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_{n+1}} \in \Gamma_{n+1}) = \mathbb{E}P_{t_n, t_{n+1}}(X_{t_n}, \Gamma_{n+1}) \mathbb{1}_{\{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}}. \quad (13)$$

Założenie (11) implikuje, że dla dowolnej ograniczonej funkcji mierzalnej f zachodzi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}f(X_{t_n}) \mathbb{1}_{\{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_{n-1}} \in \Gamma_{n-1}\}} \\ &= \int_E \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_{n-1}} \int_E f(y_n) P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \dots P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) P_{s, t_1}(x, dy_1) d\mu_{X_s}(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Istotnie, dla $f = \mathbb{1}_\Gamma$ powyższy wzór wynika z (11) (zastosowanego z $\Gamma_n = \Gamma$), a ogólny przypadek otrzymujemy metodą komplikowania funkcji. Stosując (14) z

$$f(y) = P_{t_n, t_{n+1}}(y, \Gamma_{n+1}) \mathbb{1}_{\Gamma_n}(y) = \mathbb{1}_{\Gamma_n}(y) \int_{\Gamma_{n+1}} P_{t_n, t_{n+1}}(y, dy_{n+1})$$

oraz (11) z $n+1$ widzimy, że obie strony (13) są równe

$$\int_E \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_{n+1}} P_{t_n, t_{n+1}}(y_n, dy_{n+1}) \dots P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) P_{s, t_1}(x, dy_1) d\mu_{X_s}(x).$$

□

Uwaga 8.15. Jeśli w T istnieje najmniejszy element t_0 , to wystarczy zakładać, że wzór (11) zachodzi dla $s = t_0$.

Twierdzenie 8.16. Niech $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ (lub ogólniej $(E, \mathcal{E})$ jest przestrzenią polską z σ -ciałem zbiorów borelowskich), $T \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem z najmniejszym elementem s , $P_{s,t}$ będzie funkcją przejścia spełniającą równania Chapmana-Kołmogorowa, a μ będzie rozkładem probabilistycznym na $(E, \mathcal{E})$. Wówczas istnieje proces Markowa $X = (X_t)_{t \in T}$ z funkcją przejścia $P_{s,t}$ i rozkładem początkowym $\mu_{X_s} = \mu$. Ponadto rozkład X jest wyznaczony jednoznacznie, a rozkłady skończenie wymiarowe X są zadane wzorem (10).

Dowód. Jednoznaczność rozkładu X wynika z wniosku 8.13 i faktu 2.7.

By wykazać istnienie procesu wystarczy skorzystać z twierdzenia Kołmogorowa o istnieniu (twierdzenie 2.9) i sprawdzić, że rodzina miar $(\mu_{t_1, \dots, t_n})_{t_1 < \dots < t_n, t_1, \dots, t_n \in T}$ zadana wzorem

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(\Gamma) := \int_E \int_\Gamma P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) P_{s, t_1}(x, dy_1) d\mu(x).$$

spełnia warunki zgodności. Trzeba zatem wykazać, że dla wszystkich $t_1, \dots, t_n \in T$ takich, że $t_1 < \dots < t_n$ oraz zbiorów $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$ zachodzi

i) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(E \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n) = \mu_{t_2, \dots, t_n}(\Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n)$

ii) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times E \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n) = \mu_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n)$

oraz

iii) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n-1} \times E) = \mu_{t_1, \dots, t_{n-1}}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n-1})$.

Warunek iii) jest oczywisty (odcałkowujemy względem dy_n), sprawdzimy ii) (i) się dowodzi analogicznie).

Zauważmy wpraw, że dla dowolnej funkcji mierzalnej i ograniczonej $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$\forall_{s \leq t \leq u} \int_E \int_E f(z) P_{s, t}(x, dy) P_{t, u}(y, dz) = \int_E f(z) P_{s, u}(x, dz). \quad (15)$$

Istotnie dla $f = \mathbb{1}_\Gamma$, (15) to równanie Chapmana-Kołmogorowa, z liniowości obu stron otrzymujemy, że (15) zachodzi dla funkcji prostych, a stąd przez jednostajną aproksymację dla dowolnych funkcji mierzalnych ograniczonych.

Pokażmy więc ii). Stosując (15) dla

$$f(z) := \mathbb{1}_{\Gamma_{i+1}}(z) \int_{\Gamma_{i+2}} \cdots \int_{\Gamma_n} P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_{i+1}, t_{i+2}}(y_{i+1}, dy_{i+2})$$

dostajemy

$$\begin{aligned} & \mu_{t_1, \dots, t_n}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times E \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n) \\ &= \int_E \int_{\Gamma_1} \cdots \int_{\Gamma_{i-1}} \int_E \int_{\Gamma_{i+1}} \cdots \int_{\Gamma_n} P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) P_{s, t_1}(x, dy_1) d\mu(x) \\ &= \int_E \int_{\Gamma_1} \cdots \int_{\Gamma_{i-1}} \int_E \int_E f(y_{i+1}) P_{t_i, t_{i+1}}(y_i, dy_{i+1}) \cdots P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) P_{s, t_1}(x, dy_1) d\mu(x) \\ &= \int_E \int_{\Gamma_1} \cdots \int_{\Gamma_{i-1}} \int_E f(y_{i+1}) P_{t_{i-1}, t_{i+1}}(y_{i-1}, dy_{i+1}) \cdots P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) P_{s, t_1}(x, dy_1) d\mu(x) \\ &= \int_E \int_{\Gamma_1} \cdots \int_{\Gamma_{i-1}} \int_{\Gamma_{i+1}} \cdots \int_{\Gamma_n} P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_{i-1}, t_{i+1}}(y_{i-1}, dy_{i+1}) \\ &= \\ &= \mu_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n). \end{aligned}$$

□

8.4 Jednorodne Procesy i Rodziny Markowa

Jeśli $T = [0, \infty)$ lub $T = \mathbb{N}$, to mówimy, że funkcja przejścia jest *jednorodna*, jeśli $P_{s,t} = P_{s+h,t+h}$ dla wszystkich h in T . Wówczas $P_{s,t}(x, \Gamma) = P_{s-t}(x, \Gamma)$, gdzie funkcja $P_t(x, \Gamma)$, $t \in T$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{E}$ spełnia następujące warunki

- i) $\forall t \in T \forall x \in E$ $P_t(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną na $(E, \mathcal{E})$;
- ii) $\forall t \in T \forall \Gamma \in \mathcal{E}$ $x \rightarrow P_t(x, \Gamma)$ jest funkcją mierzalną z $(E, \mathcal{E})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
- iii) $\forall x \in E \forall \Gamma \in \mathcal{E}$ $P_0(x, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$.

Równanie Chapmana-Kołmogorowa ma w tym przypadku postać

$$\forall x \in E \forall \Gamma \in \mathcal{E} \quad P_{s+t}(x, \Gamma) = \int_E P_s(y, \Gamma) P_t(x, dy).$$

Proces Markowa nazywany jednorodnym, jeśli ma jednorodną funkcję przejścia. Procesy Poissona i Wienera są jednorodnymi procesami Markowa.

W wielu zastosowaniach bada się nie jeden ustalony procesem Markowa, lecz całą rodzinę procesów posiadającą wspólną funkcję przejścia, ale różne rozkłady początkowe. Wygodniej jest jednak nie zmieniać samego procesu, a jedynie modyfikować przestrzeń probabilistyczną – motywuje to następującą definicję, którą sformułujemy tylko w przypadku jednorodnym.

Definicja 8.17. Załóżmy, że $T = [0, \infty)$ lub $T = \mathbb{N}$, $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem o wartościach w $(E, \mathcal{E})$, $(\mathbb{P}_x)_{x \in E}$ jest rodziną miar probabilistycznych na $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(P_t)_{t \in T}$ jest jednorodną funkcją przejścia. Mówimy, że $((X_t)_{t \in T}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E})$ jest *jednorodną rodziną Markowa względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, jeśli spełnione są warunki

- i) dla wszystkich $x \in E$ proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ jest procesem Markowa względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ z funkcją przejścia P_t ;
- ii) $\forall x \in E \quad \mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.

Jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ jest filtracją generowaną przez X , to $((X_t)_{t \in T}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E})$ nazywamy *jednorodną rodziną Markowa*.

Z wniosku 8.13 wynika, że rozkłady skończone wymiarowe rodzin Markowa są zadane wzorem

$$\mathbb{P}_x((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in \Gamma) = \int_{\Gamma} P_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_2 - t_1}(y_1, dy_2) P_{t_1}(x, dy_1). \quad (16)$$

Stąd łatwo wyprowadzić następujący lemat.

Lemat 8.18. Dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_\infty^X$ funkcja $x \rightarrow \mathbb{P}_x(A)$ jest mierzalna.

Dowód. Z lematu o π - λ -układach wystarczy pokazać tezę dla zbiorów A postaci $A = \{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, a to jest łatwy wniosek z (16) i mierzalności funkcji przejścia. $\square$

Uwaga 8.19. Dla rozkładu probabilistycznego μ na E możemy zdefiniować miarę $\mathbb{P}_\pi$ na $\mathcal{F}_\infty^X$ wzorem

$$\mathbb{P}_\pi(A) = \int_E \mathbb{P}_x(A) d\mu(x).$$

Wówczas $(X_t)_{t \in T}$ jest na $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X, \mathbb{P}_\pi)$ jednorodnym procesem Markowa z rozkładem początkowym μ i funkcją przejścia P_t .

Twierdzenie 8.20. *Niech $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ (lub ogólniej $(E, \mathcal{E})$ jest przestrzenią polską z σ -ciałem zbiorów borelowskich), $T \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{N}\}$ oraz P_t będzie jednorodną funkcją przejścia spełniającą równania Chapmana-Kolmogorowa. Wówczas istnieje jednorodna rodzina Markowa $((X_t)_{t \in T}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E})$ z funkcją przejścia P_t .*

Dowód. Określamy $\Omega := E^T$ oraz $\mathcal{F} := \mathcal{B}(E^T)$. Ustalmy $x \in E$, z twierdzenia 8.16 istnieje jednorodny proces Markowa $Y^x = (Y_t^x)_{t \in T}$ z rozkładem początkowym δ_x i funkcją przejścia P_t . Proces Y^x można traktować jako zmienną o wartościach w $(E^T, \mathcal{B}(E^T))$ i przyjąć za $\mathbb{P}_x$ rozkład tej zmiennej. Wówczas, jeśli określimy X_t na E^T wzorem $X_t(\omega) = \omega(t)$, to $((X_t)_{t \in T}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E})$ jest poszukiwaną jednorodną rodziną Markowa. $\square$

Przykład (Proces Wienera jako rodzina Markowa)

Niech P_t^W będzie funkcją przejścia dla procesu Wienera. Funkcja ta spełnia równania Chapmana-Kolmogorowa, więc istnieje jednorodna rodzina Markowa $((W_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}})$ o funkcji przejścia P_t . Ponadto możemy wykonać taką konstrukcję jak w dowodzie twierdzenia 8.20, przyjmując jednak $\Omega = C([0, \infty))$ zamiast E^T a za $\mathbb{P}_x$ rozkład $W_t - x$, gdzie W_t jest „zwykłym” procesem Wienera. Wówczas tak skonstruowany proces ma trajektorie ciągłe, a względem $\mathbb{P}_x$ ma ten sam rozkład co $W_t - x$. Z (prawostronnej) ciągłości trajektorii i niezależności przyrostów wynika, że rozważana rodzina jest rodziną Markowa również względem $\mathcal{F}_{t+}^W$.

Ten wykład zakończymy następującym faktem o jednorodnych rodzinach Markowa. By uprościć notację definiujemy proces X^{+h} wzorem $X_t^{+h} := X_{t+h}$ dla $t, h \in T$.

Fakt 8.21. *Załóżmy, że $T \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{N}\}$ oraz $((X_t)_{t \in T}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E})$ jest jednorodną rodziną Markowa o wartościach w $(E, \mathcal{E})$ z funkcją przejścia P_t względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Wówczas dla każdego $A \in \mathcal{E}^{\otimes T}$ oraz $x \in E$ zachodzi*

$$\mathbb{P}_x(X^{+h} \in A | \mathcal{F}_h) = \mathbb{P}_{X_h(\omega)}(X \in A) \quad p.n.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić wzór dla π -układu generującego $\mathcal{E}^{\otimes T}$ zbiorów postaci

$$A = \{x \in E^T : x_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, x_{t_n} \in \Gamma_n\}, \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_1, \dots, t_n \in T, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}.$$

Ale wówczas,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(X^{+h} \in A | \mathcal{F}_h) &= \mathbb{P}(X_{t_1+h} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n+h} \in \Gamma_n | \mathcal{F}_h) \\ &= \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_n} P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n) \dots P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) P_{t_1}(X_h, dy_1), \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z (9), zastosowanego z $f_i = \mathbb{1}_{\Gamma_i}$, $1 \leq i \leq n$.

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X_h(\omega)}(X \in A) &= \mathbb{P}_{X_h(\omega)}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n) \\ &= \int_{\Gamma_1} \cdots \int_{\Gamma_n} P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) P_{t_1}(X_h(\omega), dy_1), \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z (16). $\square$

9 Mocna własność Markowa i jej zastosowania

W czasie całego wykładu $T = [0, \infty)$ lub $\mathbb{N}$. Własność Markowa jednorodnej rodziny $((X_t)_{t \in T}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E})$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ z funkcją przejścia P_t można wyrazić jako

$$\mathbb{P}_x(X_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_h) = P_t(X_h, \Gamma) = \mathbb{P}_{X_h(\omega)}(X_t \in \Gamma) \quad \text{p.n.}$$

Mniej formalnie oznacza to, że jeśli znamy wartość procesu Markowa do chwili h , to dalsze zachowanie procesu odbywa się tak jakby proces startował w chwili h z losowego punktu $X_h(\omega)$ (bardziej ogólna forma tej własności była wyrażona w fakcie 8.21). Często jednak obserwujemy zachowanie się procesu do chwili losowej $\tau(\omega)$ - czy wówczas analogiczna własność jest prawdziwa, tzn. czy

$$\mathbb{P}_x(X_{\tau+t} \in \Gamma | \mathcal{F}_\tau) = P_t(X_\tau, \Gamma) \quad \text{p.n.} \quad (17)$$

Przykład. Niech $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ będzie symetrycznym błędzeniem losowym po $\mathbb{Z}^3$. Wiadomo, że $|X_n| \rightarrow \infty$. Niech τ oznacza moment ostatniej wizyty X_n w punkcie 0 - wówczas $\tau < \infty$ p.n.. Ponadto $X_\tau(\omega) = 0$ oraz

$$\mathbb{P}_0(X_{\tau+2} = 0) = 0 \neq \mathbb{P}_0(X_2 = 0) > 0.$$

Powyższy przykład pokazuje, że nasze oczekiwania były zbyt optymistyczne - nawet w bardzo prostym przypadku nie możemy mieć postulowanej własności dla wszystkich τ . Jednak zwykle decydujemy o zatrzymaniu obserwacji na podstawie zachowania procesu, czyli naturalnie jest dodać założenie, że τ jest momentem zatrzymania. Użyteczne jest też uogólnienie (17) na

$$\mathbb{P}_x(X_{\tau+\eta} \in \Gamma | \mathcal{F}_\tau) = P_\eta(X_\tau, \Gamma) \quad \text{p.n.}, \quad (18)$$

gdzie η jest zmienną $\mathcal{F}_\tau$ -mierzalną o wartościach w $T \cap \{\infty\}$.

Pojawiają się tu pewne trudności techniczne - po pierwsze warto by było wiedzieć, że zmienna $P_\eta(X_\tau, \Gamma)$ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna, po drugie trzeba nadać odpowiedni sens równości (18), gdy τ i η przyjmują wartości nieskończone. Z pierwszą trudnością można sobie poradzić zakładając, że X jest progresywnie mierzalny, i stosując poniższy fakt.

Fakt 9.1. Niech $(X_t, \mathbb{P}_x)$ będzie jednorodną rodziną Markowa z funkcją przejścia (P_t) . Załóżmy, że $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest pewną filtracją taką, że $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty^X$ oraz X_t jest progresywnie mierzalny względem $\mathcal{F}_t$. Wówczas dla wszystkich $\Gamma \in \mathcal{E}$ funkcja $(t, x) \rightarrow P_t(x, \Gamma)$ jest mierzalna jako funkcja z $(T \times E, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{E})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Dowód. Dla $T = \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{B}(\mathbb{Z}_+)$ to wszystkie podzbiory $\mathbb{Z}_+$ czyli funkcja $(n, x) \rightarrow f_n(x)$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n funkcja $x \rightarrow f_n(x)$ jest mierzalna. Zatem w tym przypadku teza wynika z mierzalności funkcji przejścia. Możemy więc przyjąć $T = \mathbb{R}_+$.

Określmy

$$A := \{(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : X_s(\omega) \in \Gamma\}.$$

Wówczas na podstawie progresywnej mierzalności X dostajemy

$$A \cap ([0, u] \times \Omega) = \{(s, \omega) : 0 \leq s \leq u, X_s(\omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{B}([0, u]) \otimes \mathcal{F}_u \subset \mathcal{B}([0, u]) \otimes \mathcal{F}_\infty^X.$$

Stąd $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty^X$. Zauważmy, że

$$P_t(x, \Gamma) = \mathbb{P}_x(X_t \in \Gamma) = \mathbb{P}_x(\omega : (t, \omega) \in A),$$

wystarczy zatem iż pokażemy, że dla wszystkich $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty^X$ funkcja $(t, x) \rightarrow \mathbb{P}_x(\omega : (t, \omega) \in A)$ jest mierzalna.

Jeśli $A = C \times B$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $B \in \mathcal{F}_\infty^X$ to

$$\mathbb{P}_x(\omega : (t, \omega) \in A) = \mathbb{1}_C(t) \mathbb{P}_x(B)$$

jest funkcją mierzalną jako iloczyn funkcji mierzalnych. Niech

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty^X : (t, x) \rightarrow \mathbb{P}_x(\omega : (t, \omega) \in A) \text{ jest mierzalna}\},$$

wówczas $\mathcal{A}$ jest λ -układem zawierającym π -system zbiorów postaci $C \times B$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $B \in \mathcal{F}_\infty^X$, a zatem $\mathcal{A}$ zawiera σ ciało generowane przez powyższy π -system, czyli $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty^X$. $\square$

Zanim sformułujemy definicję funkcji przejścia wprowadźmy notację

$$\Omega_\sigma := \{\omega \in \Omega : \sigma(\omega) < \infty\} \quad \text{dla } \sigma : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}.$$

Definicja 9.2. Niech $((X_t)_{t \in T}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E})$ będzie jednorodną rodziną Markowa z funkcją przejścia P_t , zaś $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ filtracją taką, że dla wszystkich $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty^X$. Mówimy, że rodzina $(X_t, \mathbb{P}_x)$ jest *mocno markowska* lub *ma mocną własność Markowa względem filtracji $\mathcal{F}_t$* , jeśli zachodzą następujące warunki

- a) X_t jest progresywnie mierzalny względem $\mathcal{F}_t$;
- b) Dla każdego momentu zatrzymania τ i dla każdej funkcji $\mathcal{F}_\tau$ -mierzalnej $\eta : \Omega_\tau \rightarrow T \cup \{\infty\}$ zachodzi

$$\forall x \in E \forall \Gamma \in \mathcal{E} \forall A \subset \Omega_\tau \cap \Omega_\eta, A \in \mathcal{F}_\tau \quad \mathbb{P}_x(A \cap \{X_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) = \mathbb{E}_x P_\eta(X_\tau, \Gamma) \mathbb{1}_A.$$

Uwaga 9.3. i) Progresywna mierzalność X_t implikuje $\mathcal{F}_\tau$ -mierzalność X_τ , ponadto na podstawie faktu 9.1 funkcja $(t, x) \rightarrow P_t(x, \Gamma)$ jest mierzalna, zatem zmienna $P_\eta(X_\tau, \Gamma)$ jest $\mathcal{F}_\tau$ -mierzalna na zbiorze $\Omega_\tau \cap \Omega_\eta$.

ii) Warunek b) często zapisuje się jako

$$\mathbb{P}_x(X_{\tau+\eta} \in \Gamma | \mathcal{F}_\tau) = P_\eta(X_\tau, \Gamma) \quad \mathbb{P}_x\text{-p.n. na zbiorze } \Omega_\tau \cap \Omega_\eta.$$

Uwaga 9.4. Dla jednorodnej rodziny Markowa określmy rodzinę operatorów $P^t = P_X^t$, $t \in T$ wzorem

$$P^t f(x) := \mathbb{E}_x f(X_t) = \int_E f(y) P_t(x, dy), \quad x \in E, \quad f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ ograniczona, mierzalna.}$$

Operatory P^t mają szereg ważnych własności (niektóre z nich, w tym własność półgrupy, omówimy na kolejnym wykładzie). Na razie zauważmy, że warunek b) implikuje (metodą komplikacji funkcji), że dla dowolnej funkcji mierzalnej ograniczonej f zachodzi

$$\mathbb{P}_x(f(X_{\tau+\eta}) | \mathcal{F}_\tau) = P^\eta f(X_\tau) = \int_E f(y) P_\eta(X_\tau, dy) \quad \mathbb{P}_x\text{-p.n. na zbiorze } \Omega_\tau \cap \Omega_\eta,$$

czyli, że dla każdego $A \subset \Omega_\tau \cap \Omega_\eta$, $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$\mathbb{E}_x f(X_{\tau+\eta}) \mathbb{1}_A = \mathbb{E}_x P^\eta f(X_\tau) \mathbb{1}_A.$$

Fakt 9.5. *Każdy jednorodny łańcuch Markowa $(X_n, \mathbb{P}_x)$ o dowolnej przestrzeni stanów $(E, \mathcal{E})$ ma mocną własność Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_n^X)$.*

Dowód. Warunek a) definicji jest spełniony, bo dla zbioru dyskretnego T progresywna mierzalność jest równoważna adaptowalności. Załóżmy więc, że τ, η, A są jak w części b) definicji. Określmy

$$A_{n,m} := A \cap \{\tau = m, \eta = n\}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\mathbb{P}_x(A \cap \{X_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(A_{n,m} \cap \{X_{n+m} \in \Gamma\}) \quad (19)$$

oraz

$$\mathbb{E}_x P_\eta(X_\tau, \Gamma) \mathbb{1}_A = \sum_{m,n=0}^{\infty} \mathbb{E} P_n(X_m, \Gamma) \mathbb{1}_{A_{n,m}}. \quad (20)$$

Z $\mathcal{F}_\tau$ -mierzalności A i η wynika, że $A \cap \{\eta = n\} \in \mathcal{F}_\tau$ zatem $A_{n,m} \in \mathcal{F}_m^X$. Z własności Markowa $\mathbb{P}_x(X_{n+m} \in \Gamma | \mathcal{F}_m^X) = P_n(X_m, \Gamma)$, $\mathbb{P}_x$ -p.n., więc

$$\mathbb{P}_x(A_{n,m} \cap \{X_{n+m} \in \Gamma\}) = \mathbb{E} P_n(X_m, \Gamma) \mathbb{1}_{A_{n,m}},$$

czyli każdy składnik sumy (19) jest równy odpowiedniemu składnikowi sumy (20). $\square$

W analogiczny sposób wykazujemy

Fakt 9.6. Niech $(X_t, \mathbb{P}_x)$ będzie dowolną rodziną Markowa oraz $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$. Wówczas warunek b) Definicji 9.2 jest spełniony jeśli τ i η przyjmują przeliczalnie wiele wartości.

Sformułujemy i udowodnimy teraz ważne twierdzenie, którego zastosowania będą omówione na ćwiczeniach.

Twierdzenie 9.7. Proces Wienera ma mocną własność Markowa względem $\mathcal{F}_{\leq t+}^W$ (czyli również względem $\mathcal{F}_{\leq t}^W$).

W dowodzie istotną rolę odgrywa następująca własność operatorów P^t związanych z procesem Wienera.

Fakt 9.8. Jeśli f jest ciągła i ograniczona, to $P_W^t f$ też jest ciągle i ograniczone dla dowolnego $t \geq 0$.

Dowód. Teza wynika natychmiast z reprezentacji $P_W^t f(x) = \mathbb{E}_0 f(x + W_t)$. $\square$

Uwaga 9.9. Nie wszystkie procesy Markowa mają powyższą własność, ale podany dowód pokazuje, że zachodzi ona dla procesów o niezależnych przyrostach.

Dowód twierdzenia 9.7. Najpierw zauważmy, iż wystarczy udowodnić, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ względem $\mathcal{F}_{\leq t+}^W$ oraz zmiennej losowej $\mathcal{F}_\tau$ mierzalnej $\eta: \Omega_\tau \rightarrow \mathbb{R}_+$ dla każdej ograniczonej funkcji ciągłej f zachodzi

$$\forall A \subset \Omega_\tau \cap \Omega_\eta, A \in \mathcal{F}_\tau \quad \mathbb{E}_x f(W_{\tau+\eta}) \mathbb{1}_A = \mathbb{E}_x P^\eta f(W_\tau) \mathbb{1}_A. \quad (21)$$

Istotnie, jeśli zachodzi (21) i $\Gamma \subset E$ jest zbiorem domkniętym, to możemy znaleźć funkcję ciągłą f taką, że $f(x) = 1$ dla $x \in \Gamma$ oraz $0 \leq f(x) < 1$ dla $x \notin \Gamma$. Stosujemy wówczas (21) dla f^n w miejsce f , przechodzimy z n do nieskończoności i dostajemy

$$\forall \Gamma \subset E \text{ domknięty} \quad \mathbb{P}_x(A \cap \{W_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) = \mathbb{E}_x P_\eta(W_\tau, \Gamma) \mathbb{1}_A.$$

Stąd w zwykły sposób (przy użyciu twierdzenia o $\pi - \lambda$ układach) dowodzimy, że powyższy warunek zachodzi dla wszystkich $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$ czyli W_t jest mocno markowski.

Tożsamość (21) udowodnimy w trzech krokach.

KROK I. Zmienne τ i η przyjmują przeliczalnie wiele wartości, τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{\leq t}^W$, a η i A są $\mathcal{F}_{\leq \tau}^W$ mierzalne. Wówczas (21) zachodzi na mocy faktu 9.6.

KROK II. Zmienna τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{\leq t+}^W$, a η jest $\mathcal{F}_{\leq \tau+}^W$ mierzalna, ale przyjmuje jedynie przeliczalnie wiele wartości. Określmy $\tau_n := 2^{-n}([2^n \tau] + 1)$, wówczas $\tau_n > \tau$, τ_n przyjmuje tylko wartości $2^{-n}k$, $k = 1, 2, \dots$ oraz ∞ . Co więcej τ_n jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{\leq t}^W$ i $\mathcal{F}_{\leq \tau+}^W \subset \mathcal{F}_{\leq \tau_n}^W$. Zatem η oraz A są $\mathcal{F}_{\leq \tau}^W$ mierzalne i na mocy Kroku I,

$$\mathbb{E}_x f(W_{\tau_n+\eta}) \mathbb{1}_A = \mathbb{E}_x P^\eta f(W_\tau) \mathbb{1}_A.$$

Ponieważ $\tau_n \rightarrow \tau$, więc ciągłość f i trajektorii procesu Wienera implikują $f(W_{\tau_n+\eta})\mathbb{1}_A \rightarrow f(W_{\tau+\eta})\mathbb{1}_A$. Ponadto $|f(W_{\tau_n+\eta})\mathbb{1}_A| \leq \sup |f| < \infty$, zatem na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$\mathbb{E}_x f(W_{\tau_n+\eta})\mathbb{1}_A \rightarrow \mathbb{E}_x f(W_{\tau+\eta})\mathbb{1}_A.$$

Z drugiej strony na mocy faktu 9.8 dla wszystkich ω , $P^{\eta(\omega)}f$ jest ciągła, czyli na zbiorze Ω_τ , $P^\eta f(X_{\tau_n}) \rightarrow P^\eta f(X_\tau)$. Zatem w podobny sposób co poprzednio dostajemy

$$\mathbb{E}_x P^\eta f(W_{\tau_n})\mathbb{1}_A \rightarrow \mathbb{E}_x P^\eta f(W_\tau)\mathbb{1}_A.$$

KROK III. Zmienne τ i η spełniają tylko wymagane w definicji założenia. Określamy wówczas $\eta_n := 2^{-n}(\lfloor 2^n \eta \rfloor + 1)$ i zauważamy, że $\eta_n \rightarrow \eta$, $\eta_n \geq \eta$, $\sigma(\eta_n) \subset \sigma(\eta) \subset \mathcal{F}_{\leq \tau+}^W$. Zatem τ i η_n spełniają założenia Kroku II, czyli jak już wiemy

$$\mathbb{E}_x f(W_{\tau+\eta_n})\mathbb{1}_A = \mathbb{E}_x P^{\eta_n} f(W_\tau)\mathbb{1}_A.$$

Ponadto, z ciągłości W , $f(W_{\tau+\eta_n}) \rightarrow f(W_{\tau+\eta})$ i jak poprzednio twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej implikuje

$$\mathbb{E}_x f(W_{\tau+\eta_n})\mathbb{1}_A \rightarrow \mathbb{E}_x f(W_{\tau+\eta})\mathbb{1}_A.$$

Zauważmy wreszcie, że funkcja $t \rightarrow P^t f(x)$ jest ciągła (bo $P^t f(x) = \mathbb{E}_x f(W_t) \rightarrow \mathbb{E}_x f(W_{t_0})$ przy $t \rightarrow t_0$), zatem $P^{\eta_n} f(W_\tau)\mathbb{1}_A \rightarrow P^\eta f(W_\tau)\mathbb{1}_A$ i

$$\mathbb{E}_x P^{\eta_n} f(W_\tau)\mathbb{1}_A \rightarrow \mathbb{E}_x P^\eta f(W_\tau)\mathbb{1}_A. \quad \square$$

Uwaga 9.10. Powyższe twierdzenie (z tym samym dowodem) pokazuje, że wielowymiarowy proces Wienera też ma mocną własność Markowa względem $\mathcal{F}_{t+}^W$. Niewielka modyfikacja daje też mocną własność Markowa dla procesów o niezależnych, stacjonarnych przyrostach i prawostronnie ciągłych trajektoriach (tzn. procesów Levy'ego).

10 Półgrupy operatorów związane z jednorodnymi rodzinami Markowa

10.1 Definicja i Przykłady

Jak widzieliśmy już na poprzednim wykładzie z każdą jednorodną rodziną przekształceń możemy związać pewną rodzinę operatorów $(P^t)_{t \in T}$. W tym wykładzie będziemy badać własności tej rodziny – w szczególności pokażemy, że tworzy ona półgrupę. Będziemy zakładać, że $T = [0, \infty)$. Zaczniemy od definicji ważnej przestrzeni Banacha.

Definicja 10.1. Załóżmy, że $(E, \mathcal{E})$ jest przestrzenią mierzalną. Przez $B(E)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych ograniczonych z E w $\mathbb{R}$ z normą

$$\|f\| := \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in B(E).$$

Uwaga 10.2. Nietrudno wykazać, że $B(E)$ jest przestrzenią Banacha (tzn. zupełną przestrzenią unormowaną).

Definicja 10.3. Załóżmy, że $(X_t, \mathbb{P}_x)$ jest jednorodną rodziną Markowa z funkcją przejścia P_t . Definiujemy operatory $P^t: B(E) \rightarrow B(E)$ wzorem

$$P^t f(x) = \mathbb{E}_x f(X_t) = \int_E f(y) P_t(x, dy), \quad t \geq 0.$$

Uwaga 10.4. Zauważmy, że operatory P^t wyznaczają funkcję przejścia, bo

$$P_t(x, \Gamma) = \mathbb{P}_x(X_t \in \Gamma) = \mathbb{E}_x \mathbb{1}_\Gamma(X_t) = P^t \mathbb{1}_\Gamma(x).$$

Fakt 10.5. Operatory $(P_t)_{t \geq 0}$ zdefiniowane powyżej spełniają następujące własności

- i) P^t są operatorami liniowymi;
- ii) P^t są kontrakcjami tzn. $\|P^t f\| \leq \|f\|$ dla $f \in B(E)$;
- iii) P^t są operatorami nieujemnymi tzn. $P^t f \geq 0$ dla $f \geq 0$;
- iv) $P^t \mathbb{1} = \mathbb{1}$, gdzie $\mathbb{1}$ oznacza funkcję stałą równą 1;
- v) $P^0 = \text{Id}$;
- vi) $P^{s+t} = P^s P^t$ dla $s, t \geq 0$.

Dowód. Punkty i), iii)-v) są oczywiste. Własność ii) wynika stąd, że

$$|P^t f(x)| = |\mathbb{E}_x f(X_t)| \leq \mathbb{E}_x |f(X_t)| \leq \mathbb{E} \|f\| = \|f\|.$$

Wreszcie by udowodnić vi) zauważmy, że

$$\begin{aligned} P^{s+t} f(x) &= \int_E P_{s+t}(x, dz) f(z) = \int_E \int_E P_s(x, dy) P_t(y, dz) f(z) \\ &= \int_E P_s(x, dy) \int_E P_t(y, dz) f(z) = \int_E P_s(x, dy) P^t f(y) = P^s P^t f(x), \end{aligned}$$

gdzie druga równość wynika z funkcyjnej formy równania Chapmana-Kołmogorowa (15). $\square$

Uwaga 10.6. Rodzinę operatorów liniowych $(P^t)_{t \geq 0}$ określonych na przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$ taką, że $P^0 = \text{Id}$ oraz $P^{s+t} = P^s P^t$ nazywamy *półgrupą operatorów*.

Przykład 1. W przypadku gdy E jest przeliczalna i $P^t = (p_t(x, y))_{x, y \in E}$, to $P^t f(x) = \sum_{y \in E} p_t(x, y) f(y)$. Zatem utożsamiając funkcje $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ z wektorami $[f(x_1), f(x_2), \dots]^T$ dostajemy, że P^t jest mnożeniem przez macierz P^t . W szczególności dla procesu Poissona mamy $E = \mathbb{N}$, $p_t(n, m) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} \mathbb{1}_{\{m \geq n\}}$ oraz

$$P^t f(n) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} f(n+k). \quad (22)$$

Przykład 2. Jeśli $((W_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ jest d -wymiarową rodziną Wienera, to

$$P^t f(x) = (2\pi t)^{-d/2} \int_{-\mathbb{R}^d} f(y) e^{-|y|^2/2t} dy = \mathbb{E} f(x + \sqrt{t} W_1).$$

Półgrupę związaną z procesem Wienera nazywamy też półgrupą ciepła.

Przykład 3. Niech $X_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$ będzie d -wymiarowym procesem Ornsteina-Uhlenbecka. Nietrudno sprawdzić, że X jest jednorodnym procesem Markowa z funkcją przejścia

$$P_t(x, \Gamma) = (2\pi(1 - e^{-2t}))^{-d/2} \int_{\Gamma} \exp\left(-\frac{|y - e^{-t}x|^2}{2(1 - e^{-2t})}\right) dy, \quad t > 0,$$

(inaczej $P_t(x, \cdot)$ to rozkład $\mathcal{N}(e^{-t}x, (1 - e^{-2t})\text{Id})$). Otrzymana funkcja P_t spełnia równania Chapmana-Kołmogorowa, więc możemy zdefiniować jednorodną rodzinę Markowa $(X_t, \mathbb{P}_x)$ z tą funkcją przejścia. Z rodziną tą jest związana półgrupa Ornsteina-Uhlenbecka zadana na $B(\mathbb{R}^d)$ wzorem

$$\begin{aligned} P^t f(x) &= (2\pi(1 - e^{-2t}))^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \exp\left(-\frac{|x - e^{-t}y|^2}{2(1 - e^{-2t})}\right) dy \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) e^{-|y|^2/2} dy = \mathbb{E} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}W_1). \end{aligned}$$

Uwaga 10.7. Przestrzeń $B(E)$ jest bardzo duża. Często (przy dodatkowych założeniach o rodzinie Markowa) wygodniej jest rozpatrywać półgrupę na przestrzeni funkcji ciągłych ograniczonych lub na ośrodkowej przestrzeni $C_0(\mathbb{R}^d)$ funkcji ciągłych, zbieżnych do zera w nieskończoności. Zarówno półgrupa ciepła, jak i półgrupa Ornsteina-Uhlenbecka działa z $C_0(\mathbb{R}^d)$ w $C_0(\mathbb{R}^d)$.

10.2 Operatory infinitesimalne

W części tej pokażemy, że z każdą półgrupą operatorów da się związać pewien operator zdefiniowany na liniowej (zazwyczaj niedomkniętej) podprzestrzeni. Operator taki nazywamy operatorem infinitesimalnym bądź generatorem półgrupy, gdyż na ogół jednoznacznie wyznacza on półgrupę. Przedyskutujemy też kilka przykładów i pewne związki z równaniami różniczkowymi.

Zacznijmy od ogólnej definicji.

Definicja 10.8. Załóżmy, że $(F, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha, a $(P^t)_{t \geq 0}$ jest półgrupą ograniczonych operatorów liniowych na F (tzn. $P^t: F \rightarrow F$ liniowe ograniczone, $P^{t+s} = P^t P^s$, $P^0 = \text{Id}$). Definiujemy wówczas

$$D_A := \left\{ f \in F : \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{P^t f - f}{t} \text{ istnieje w } F \right\}$$

oraz

$$Af := \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{P^t f - f}{t}, \quad f \in D_A.$$

Operator A określony na zbiorze D_A nazywamy *operatorem infinitesimalnym (generatorem)* półgrupy P^t , a D_A dziedziną generatora A .

Fakt 10.9. *Zbiór D_A jest podprzestrzenią liniową F , a $A: D_A \rightarrow F$ jest liniowy.*

Dowód. Jest to natychmiastowa konsekwencja liniowości granicy. $\square$

Przykład 1. Załóżmy, że $A: F \rightarrow F$ jest ograniczonym operatorem liniowym, a

$$P^t := e^{tA} = \text{Id} + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

Wtedy $P^0 = \text{Id}$,

$$\|P^t\| \leq 1 + t\|A\| + \frac{t^2 \|A\|^2}{2!} + \frac{t^3 \|A\|^3}{3!} + \dots = e^{t\|A\|}$$

i nieco żmudny, choć standardowy rachunek pokazuje, że $P^{t+s} = P^t P^s$, czyli P^t jest półgrupą ograniczonych operatorów liniowych na F . Mamy

$$\frac{P^t f - f}{t} = Af + \frac{t}{2!} A^2 f + \frac{t^2}{3!} A^3 f + \dots,$$

stąd

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P^t f - f}{t} - Af \right\| &\leq \frac{t}{2!} \|A\|^2 \|f\| + \frac{t^2}{3!} \|A\|^3 \|f\| + \dots \\ &\leq t\|A\|^2 \|f\| (1 + t\|A\| + t^2\|A\|^2 + \dots) = \frac{t\|A\|^2 \|f\|}{1 - t\|A\|} \rightarrow 0 \quad \text{przy } t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Zatem $D_A = F$ oraz generatorem e^{tA} jest A .

W kolejnych przykładach rozważamy już tylko półgrupy związane z rodzinami Markowa $(X_t, \mathbb{P}_x)$. Wtedy $F = B(E)$ (lub przy dodatkowych założeniach $C(\mathbb{R}^d)$ albo $C_0(\mathbb{R}^d)$) z normą supremum. W tym przypadku $P^t f(x) = \mathbb{E}_x f(X_t)$ oraz

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\mathbb{E}_x f(X_t) - f(x)}{t}.$$

Przykład 2. Niech P^t będzie półgrupą związaną z procesem Poissona na przestrzeni ℓ_∞ wszystkich ciągów ograniczonych. Wówczas P^t jest zadana wzorem (22) i nietrudno wykazać, że $D_A = \ell_\infty$ oraz $D_A f(n) = \lambda(f(n+1) - f(n))$.

Przykład 3. Niech $E = \mathbb{R}$ oraz $X_t = X_0 + t$ deterministyczny ruch w prawo. Wówczas dla $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o $x \in \mathbb{R}$

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'_+(x) \text{ (pochodna prawostronna w } x)$$

oraz

$$D_A = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \text{ zbiega jednostajnie do funkcji z } B(E)\}.$$

Niech $f \in D_A$, wówczas dla $t \leq t_0$, $\|t^{-1}(f(x+t) - f(x)) - Af(x)\| \leq 1$, czyli

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| \leq t + t\|Af\| \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow 0+.$$

Stąd łatwo wynika, że f jest funkcją ciągłą, a zatem Af jest granicą jednostajną funkcji ciągłych, czyli też jest funkcją ciągłą. Nietrudno stąd wywnioskować, że

$$D_A = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ różniczkowalne, o pochodnej ciągłej i ograniczonej}\}$$

oraz $Af(x) = f'(x)$ dla $f \in D_A$.

Przykład 4. Dla d wymiarowego procesu Wienera można wykazać, że $D(A)$ zawiera $C_u^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ – przestrzeń funkcji $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalnych ograniczonych o pochodnych pierwszego i drugiego rzędu ograniczonych i jednostajnie ciągłych oraz $Af = \frac{1}{2}\Delta f$ dla $f \in C_u^{(2)}(\mathbb{R}^d)$.

Wykażemy ten wzór dla $d = 1$. Ustalmy $f \in C_u^{(2)}(\mathbb{R})$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Określmy $h(t) := P^t f(x) = f(X + \sqrt{t}W_1)$. Wówczas h jest ciągła na $[0, \infty)$, $h(0) = f(x)$ oraz dla $t > 0$

$$h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbb{E} f'(x + \sqrt{t}W_1) = \frac{1}{2} \mathbb{E} f''(x + \sqrt{t}W_1).$$

Ostatnie przejście wynika ze wzoru (który łatwo udowodnić całkując przez części) $\mathbb{E} g(W_1)W_1 = \mathbb{E} g'(W_1)$ dla $g \in C_{\text{ogr}}^1(\mathbb{R})$. Zatem z twierdzenia o wartości średniej

$$\frac{P^t f(x) - f(x)}{t} = \frac{h(t) - h(0)}{t} = h'(t_0) = \frac{1}{2} \mathbb{E} f''(x + \sqrt{t_0}W_1),$$

gdzie $t_0 = t_0(t, x) \in [0, t]$. Zatem

$$\begin{aligned} \left| \frac{P^t f(x) - f(x)}{t} - \frac{1}{2} f''(x) \right| &= \frac{1}{2} \left| \mathbb{E} f''(x + \sqrt{t_0}W_1) - f''(x) \right| \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} |f''(x + \sqrt{t_0}W_1) - f''(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} |f''(x + \sqrt{t_0}W_1) - f''(x)| \mathbb{1}_{\{|W_1| \leq A\}} + \frac{1}{2} \mathbb{E} |f''(x + \sqrt{t_0}W_1) - f''(x)| \mathbb{1}_{\{|W_1| > A\}} \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{|x-y| \leq A\sqrt{t}} |f''(y) - f''(x)| + \|f''\|_{\infty} \mathbb{P}(|W_1| > A). \end{aligned}$$

Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ możemy wybrać A takie, że drugi składnik jest mniejszy od ε , z jednostajnej ciągłości g'' wynika, że pierwszy składnik dąży do zera przy $t \rightarrow 0$ i ustalonym A . To pokazuje, że

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{P^t f(x) - f(x)}{t} - \frac{1}{2} f''(x) \right| = 0,$$

stąd $f \in D(A)$ i $Af = \frac{1}{2} f''$.

Uwaga 10.10. Dokładne wyznaczenie D_A bywa bardzo trudnym (często beznadziejnym) zadaniem. Np dla jednowymiarowego procesu Wienera można wykazać, że $D(A) = C_u(\mathbb{R})$, ale już dla $d > 1$ $D(A) \supsetneq C_u(\mathbb{R}^d)$.

Przykład 5. Dla d -wymiarowego procesu Ornsteina-Uhlenbecka można wykazać, że $D(A)$ zawiera $C_c^2(\mathbb{R}^d)$ – przestrzeń funkcji dwukrotnie różniczkowalnych w sposób ciągły, o nośniku zwartym oraz $Af(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x) \rangle$ dla $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$.

Ostatnie twierdzenie jakie omówimy pokazuje, że półgrupa zastosowana do funkcji z dziedziny generatora spełnia pewne równanie różniczkowe. Jak zobaczymy na przykładzie wynik ten można stosować do badania związków między procesami Markowa a równaniami różniczkowymi.

Zanim jednak sformułujemy twierdzenie będziemy potrzebowali ważnej definicji i prostego faktu.

Definicja 10.11. Dla półgrupy P^t operatorów na przestrzeni Banacha F okreśmy

$$F_0 := \{f \in F : \lim_{t \rightarrow 0+} \|P^t f - f\| = 0\}.$$

Fakt 10.12. Załóżmy, że $P^t : F \rightarrow F$ jest półgrupą kontrakcji, zaś $A : D_A \rightarrow F$ jest jej generatorem. Wówczas

- a) F_0 jest domkniętą liniową podprzestrzenią F ,
- b) Dla $f \in F_0$ funkcja $t \rightarrow P^t f$ jest ciągła na $[0, \infty)$, w szczególności $P^t F_0 \subset F_0$,
- c) $D_A \subset F_0$ oraz $AD_A \subset F_0$ (tzn. jeśli $f \in D_A$, to $f, P^t f \in F_0$).

Dowód. a) Liniowość F_0 jest oczywista, trzeba wykazać domkniętość. Niech $f_n \in F_0$ takie, że $f_n \rightarrow f \in F$, wtedy

$$\|P^t f - f\| \leq \|P^t f - P^t f_n\| + \|P^t f_n - f_n\| + \|f_n - f\| \leq \|P^t f_n - f_n\| + 2\|f_n - f\|.$$

Dla $\varepsilon > 0$ dobierzmy n takie, że $\|f_n - f\| \leq \varepsilon/3$ i t_0 takie, że $\|P^t f_n - f_n\| \leq \varepsilon/3$ dla $t \leq t_0$. Wówczas $\|P^t f - f\| \leq \varepsilon$ dla $t \leq t_0$, czyli $\|P^t f - f\| \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0+$, więc $f \in F_0$.

b) Mamy dla $s \leq t$

$$\|P^t f - P^s f\| = \|P^s(P^{t-s} f - f)\| \leq \|P^{t-s} f - f\|,$$

skąd łatwo wynika jednostajna ciągłość $t \rightarrow P^t f$ dla $f \in F_0$.

c) Niech $f \in D_A$, wtedy $t^{-1}(P^t f - f)$ jest funkcją zbieżną przy $t \rightarrow 0+$, a zatem ograniczoną w otoczeniu zera, czyli $\|t^{-1}(P^t f - f)\| \leq M$ dla $t \leq t_0$. Stąd $\|P^t f - f\| \leq Mt \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0+$, więc $f \in F_0$. Z liniowości F_0 i punktu b), również $t^{-1}(P^t f - f) \in F_0$ dla $t > 0$, a zatem $Af = \lim_{t \rightarrow 0+} t^{-1}(P^t f - f) \in F_0$ z domkniętości F_0 . $\square$

Twierdzenie 10.13. Niech P^t będzie półgrupą kontrakcji oraz $f \in D_A$. Wówczas $P^t f \in D_A$ dla wszystkich t , funkcja $t \rightarrow P^t f$ jest różniczkowalna w sposób ciągły oraz

$$\frac{d}{dt} P^t f = AP^t f = P^t Af.$$

Co więcej

$$P^t f = f + \int_0^t AP^s f ds = f + \int_0^t P^s Af ds.$$

Dowód. Ustalmy $f \in D_A$, wtedy

$$\frac{P^{t+h} f - P^t f}{h} = \frac{P^h P^t f - P^t f}{h} = P^t \left(\frac{P^h f - f}{h} \right).$$

Zatem z ciągłości P^t ,

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P^{t+h} f - P^t f}{h} = P^t \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P^h f - f}{h} = P^t Af,$$

czyli $P^t f \in D_A$ oraz $AP^t f = P^t Af$. Pokazaliśmy też, że $\lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1}(P^{t+h} f - P^t f) = P^t Af$. Musimy jeszcze policzyć lewostronną pochodną P^t czyli

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{P^{t+h} f - P^t f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P^{t-h} f - P^t f}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P^t f - P^{t-h} f}{h}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P^t f - P^{t-h} f}{h} - P^t Af \right\| &= \left\| P^{t-h} \left(\frac{P^h f - f}{h} - Af \right) \right\| + \|P^{t-h}(Af - P^h Af)\| \\ &\leq \left\| \frac{P^h f - f}{h} - Af \right\| + \|Af - P^h Af\| \rightarrow 0 \text{ przy } h \rightarrow 0+, \end{aligned}$$

bo $f \in D_A$ oraz $Af \in F_0$. Zatem wykazaliśmy, że $\lim_{h \rightarrow 0-} h^{-1}(P^{t+h} f - P^t f) = P^t Af$ czyli rzeczywiście $\frac{d}{dt} P^t f = P^t Af = AP^t f$. Ciągłość pochodnej wynika stąd, że $AD_A \subset F_0$. Wreszcie ostatnia część faktu wynika z podstawowego twierdzenia analizy matematycznej. $\square$

Przykład. Jeśli $g \in C_u^2(\mathbb{R}^n)$, a P^t jest półgrupą ciepła to funkcja $f(x, t) = P^t f(x) = \mathbb{E}_x f(x + W_t)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = \frac{1}{2} \Delta f(t, x)$$

z warunkiem początkowym $f(0, x) = g(x)$.

Literatura

- [1] P. Billingsley *Prawdopodobieństwo i miara*, wyd. II, PWN, Warszawa 2009.
- [2] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, wyd. IV, Script, Warszawa 2010.
- [3] I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York 1997.
- [4] R. Latała, *Wstęp do Analizy Stochastycznej*, Uniwersytet Warszawski, 2011, <https://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/was/wyklad.pdf>.
- [5] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian Motion*, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin 1999
- [6] A. Talarczyk-Noble, *Wstęp do Procesów Stochastycznych (2022/23)*.
- [7] A. D. Wentzell, *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1980.