Wstęp do Analizy Stochastycznej

Rafał Latała

6 września 2010

Poniższy tekst zawiera notatki do wykładów ze Wstępu do Analizy Stochastycznej, prowadzonego w semestrze wiosennym 2010 roku. Gwiazdkami oznaczono paragrafy dla których zabrakło czasu w trakcie wykładów (być może niektóre z nich były omówione podczas ćwiczeń) i których znajomość nie będzie wymagana podczas egzaminu, choć mile widziana.

U Czytelnika zakłada się znajomość podstawowych faktów z zakresu kursowego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa. Wszystkie potrzebne wiadomości można znaleźć w podręcznikach [1] i [3].

Autor przeprasza za wszystkie nieścisłości i omyłki mogące się pojawić w tekście i jednocześnie zwraca się z prośbą do Czytelników, którzy zauważyli błędy lub mają jakieś inne uwagi na temat notatek o ich zakomunikowanie osobiste lub wysłanie na adres emailowy `rlatala@mimuw.edu.pl` z podaniem wersji notatek (daty), której dotyczą.

Dziękuje panom Krzesimirowi Arodziowi, Tomaszowi Badowskiemu, Marianowi Kędzierskiemu i Radomirowi Mastelorzowi za zauważenie literówek w notatkach.

1 Podstawowe Definicje. Proces Wienera.

Zaczniemy od podania ważnych definicji używanych podczas całego wykładu.

Definicja 1. *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną,* $(E, \mathcal{E})$ *przestrzenią mierzalną, zaś* T *dowolnym zbiorem.* Procesem stochastycznym *o wartościach w* E*, określonym na zbiorze* T*, nazywamy rodzinę zmiennych losowych* $X = (X_t)_{t \in T}$*, przyjmujących wartości w zbiorze* E*.*

Uwaga 2. W zasadzie w czasie całego wykładu T będzie podzbiorem $\mathbb{R}$ (najczęściej przedziałem, niekoniecznie ograniczonym), zaś $E = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^d$. Parametr t można wówczas interpretować jako czas.

Definicja 3. Trajektorią procesu X *nazywamy funkcję (losową!)* $t \to X_t(\omega)$*, określoną na zbiorze* T *o wartościach w* E*.*

Definicja 4. *Powiemy, że proces* $X = (X_t)_{t \in T}$*,* $T \subset \mathbb{R}$ ma przyrosty niezależne *jeśli dla dowolnych indeksów* $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ *ze zbioru* T*, zmienne losowe* $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *są niezależne.*

Definicja 5. *Mówimy, że proces stochastyczny* $(X_t)_{t \geqslant 0}$ ma przyrosty stacjonarne*, jeśli rozkład* $X_t - X_s$ *zależy tylko od* $t - s$*, czyli*

$$\forall_{t > s \geqslant 0} \; X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0.$$

1.1 Proces Wienera (Ruch Browna)

Definicja 6. Procesem Wienera (Ruchem Browna) *nazywamy proces stochastyczny* $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ *taki, że*

$$W_0 = 0 \text{ } p.n.; \tag{W0}$$

$$W \text{ ma przyrosty niezależne}; \tag{W1}$$

$$\text{Dla } 0 \leqslant s < t \text{ zmienna } W_t - W_s \text{ ma rozkład normalny } \mathcal{N}(0, t-s); \tag{W2}$$

$$\text{Trajektorie } W \text{ są ciągłe z prawdopodobieństwem 1.} \tag{W3}$$

Uwaga 7. Warunek (W3) oznacza, że istnieje zbiór A taki, że $\mathbb{P}(A) = 1$ oraz dla wszystkich $\omega \in A$, $t \to W_t(\omega)$ jest funkcją ciągłą na $[0, \infty)$. Czasami w definicji procesu Wienera zakłada się, że wszystkie trajektorie są ciągłe oraz $W_0 \equiv 0$.

1.2 *Konstrukcja Procesu Wienera*

Podczas następnych wykładów podamy dość abstrakcyjną konstrukcję procesu Wienera opartą o ogólniejsze twierdzenia dotyczące istnienia i ciągłości trajektorii procesów stochastycznych. W tym paragrafie jedynie naszkicujemy alternatywną, bardziej bezpośrednią konstrukcję.

Najpierw zdefiniujemy pewne dwa ważne układy funkcji.

Definicja 8. *Niech* $I(0) = \{1\}, I(n) = \{1, \ldots, 2^{n-1}\}, n = 1, 2, \ldots$. Układem Haara *nazywamy rodzinę funkcji* $(h_{n,k})_{k\in I(n),n=0,1,\ldots}$ *określonych na* $[0, 1]$ *wzorami* $h_{0,1}(t) \equiv 1$ *oraz dla* $k \in I(n), n \geqslant 1$,

$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \textit{dla } (2k-2)2^{-n} \leqslant t < (2k-1)2^{-n} \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \textit{dla } (2k-1)2^{-n} \leqslant t < 2k \cdot 2^{-n} \\ 0 & \textit{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Definicja 9. *Przy oznaczeniach poprzedniej definicji* układem Schaudera *nazywamy rodzinę funkcji* $(S_{n,k})_{n=0,1,\ldots,k\in I(n)}$ *określonych na* $[0, 1]$ *wzorem* $S_{n,k}(t) = \int_0^t h_{n,k}(s)ds$.

Fakt 10. *a) Układ Haara jest bazą ortonormalną przestrzeni* $L_2[0, 1]$.
b) Dla ustalonego $n \geqslant 1$, *funkcje* $(S_{n,k})_{k\in I(n)}$ *mają nośniki o rozłącznych wnętrzach oraz* $\|S_{n,k}\|_\infty = 2^{-(n+1)/2}$.

Uwaga 11. Układ Haara jest bazą Schaudera w przestrzeniach $L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p < \infty$. Po dodaniu funkcji stale równej 1, układ Schaudera staje się bazą Schaudera przestrzeni $C[0, 1]$.

Fakt 12. *Dla dowolnych* $t, s \in [0, 1]$ *mamy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in I(n)} S_{n,k}(t)S_{n,k}(s) = \min\{t, s\}.$$

Niech $(g_{n,k})_{k\in I(n),n=0,1,\ldots}$ będzie rodziną niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$ i

$$W_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k\in I(m)} g_{m,k}(\omega)S_{m,k}(t).$$

Twierdzenie 13. *Dla prawie wszystkich* $\omega \in \Omega$ *ciąg funkcji* $(W_t^{(n)}(\omega))$ *zbiega jednostajnie na* $[0, 1]$ *do pewnej funkcji ciągłej* $W_t(\omega)$. *Jeśli określimy np.* $W_t(\omega) = 0$ *dla pozostałych* ω, *to tak zdefiniowany proces stochastyczny jest procesem Wienera na* $[0, 1]$.

Uwaga 14. Mając dany proces Wienera $(W_t)_{t\in[0,1]}$ nietrudno skonstruować proces Wienera na całej prostej. Można np. sprawdzić, że $((1+t)W_{\frac{1}{1+t}} - W_1)_{t\geqslant 0}$ jest takim procesem.

1.3 Charakteryzacje procesu Wienera

Najpierw podamy twierdzenie, które znacznie ułatwia sprawdzanie, że dany proces jest procesem Wienera. Musimy wpierw podać ważną definicję.

Definicja 15. *Proces $X = (X_t)_{t\in T}$ nazywamy* gaussowskim*, jeśli wszystkie skończenie wymiarowe rozkłady X są gaussowskie, tzn. wektor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ ma rozkład gaussowski dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in T$.*

Przykłady

1. $X_t = f(t)g$, gdzie $f\colon T \to \mathbb{R}$ dowolne oraz $g \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Proces Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$.
3. Most Browna $X_t = W_t - tW_1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

Twierdzenie 16. *Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy jest procesem gaussowskim, o ciągłych trajektoriach p.n. takim, że $\mathbb{E}X_t = 0$ oraz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \min\{t,s\}$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Mamy $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}(X_t - X_0) = 0$ oraz $\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(X_t - X_0) = t$ na mocy (W0) i (W2). Ponadto z niezależności przyrostów, dla $t > s$, $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{Cov}(X_t - X_s, X_s) + \mathrm{Var}(X_s) = 0 + s = \min\{t,s\}$.

$\Leftarrow$: Zauważmy, że $\mathrm{Var}(X_0) = 0 = \mathbb{E}X_0$, więc spełniony jest warunek (W0). Dla $t > s$, zmienna $W_t - W_s$ ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją $\mathrm{Var}(X_t - X_s) = \mathrm{Var}(X_t) + \mathrm{Var}(X_s) - 2\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = t - s$, więc zachodzi (W2). By sprawdzić niezależność przyrostów ustalmy $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$. Zauważmy, że wektor $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ ma rozkład gaussowski, więc jego współrzędne są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są nieskorelowane. Mamy jednak dla $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant s_4$,

$$\mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_3} - X_{s_2}) = \mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_3}) - \mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_2}) = s_1 - s_1 = 0$$

oraz

$$\mathrm{Cov}(X_{s_2} - X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = \mathrm{Cov}(X_{s_2}, X_{s_4} - X_{s_3}) - \mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = 0.$$

□

Kolejne twierdzenie pokazuje, że (z dokładnością do drobnych technicznych założeń oraz normalizacji) proces Wienera jest jedynym procesem o ciągłych trajektoriach oraz niezależnych i stacjonarnych przyrostach.

Twierdzenie 17. *Załóżmy, że proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ spełnia warunki (W0), (W1), (W3) (z W zastąpionym przez X) oraz*

$$X \text{ ma przyrosty stacjonarne}; \tag{W2a}$$

$$\mathbb{E}X_1 = 0,\ \operatorname{Var}(X_1) = 1; \tag{W2b}$$

$$\mathbb{E}X_t^4 < \infty \text{ dla wszystkich } t > 0. \tag{W2c}$$

Wówczas X_t jest procesem Wienera.

Dowód. Określmy dla $t \geqslant 0$, $a(t) = \mathbb{E}X_t$ oraz $b(t) = \operatorname{Var}(X_t)$. Zauważmy, że na mocy niezależności i stacjonarności przyrostów,

$$\begin{aligned} b(t+s) &= \operatorname{Var}(X_{t+s} - X_t + X_t) = \operatorname{Var}(X_{t+s} - X_t) + \operatorname{Var}(X_t) \\ &= \operatorname{Var}(X_s) + \operatorname{Var}(X_t) = b(t) + b(s). \end{aligned}$$

Ponadto oczywiście $b(t) \geqslant 0$, zatem funkcja $b(t)$ jest addytywna i niemalejąca na $[0,\infty)$, więc $b(t) = ct$ dla pewnego $c \geqslant 0$, co wobec (W2b) daje $\operatorname{Var}(X_t) = b(t) = t$. Analogicznie sprawdzamy, że $a(t+s) = a(t) + a(s)$, wiemy też, że $a(0) = 0$, stąd dowodzimy, że $\mathbb{E}X_t = a(t) = 0$ dla t wymiernych. Weźmy $t > 0$ i wybierzmy dążący do t ciąg liczb wymiernych (t_n). Na mocy (W2c), $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$, wiemy też, że $\mathbb{E}X_{t_n}^2 = \operatorname{Var}(X_{t_n}) = t_n$, zatem $(\mathbb{E}|X_{t_n} - X_t|^2)^{1/2} \leqslant M$ dla pewnej stałej M. Z ciągłości trajektorii $X_{t_n} \to X_t$ prawie na pewno, czyli również według prawdopodobieństwa. Zatem dla $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}X_t| &= |\mathbb{E}X_t - \mathbb{E}X_{t_n}| \leqslant \mathbb{E}|X_t - X_{t_n}| \leqslant \varepsilon + \mathbb{E}|X_t - X_{t_n}|\mathbb{1}_{\{|X_t - X_{t_n}|\geqslant\varepsilon\}} \\ &\leqslant \varepsilon + (\mathbb{E}|X_t - X_{t_n}|^2)^{1/2}\mathbb{P}(|X_t - X_{t_n}| \geqslant \varepsilon)^{1/2} \\ &\leqslant \varepsilon + M\mathbb{P}(|X_t - X_{t_n}| \geqslant \varepsilon)^{1/2} \leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n. Stąd $\mathbb{E}X_t = 0$. Wykazaliśmy zatem, że X_t ma średnią zero i wariancję t.

Ustalmy $t > s \geqslant 0$, chcemy pokazać, że $X_t - X_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t-s)$. Zauważmy, że

$$X_t - X_s = \sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}, \text{ gdzie } \quad Y_{n,k} = X_{s+k(t-s)/n} - X_{s+(k-1)(t-s)/n}.$$

Zmienne $(Y_{n,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ tworzą układ trójkątny, możemy więc skorzystać z Centralnego Twierdzenia Granicznego i wykazać, że $\sum_{k=1}^n Y_{n,k}$ zbiega do $\mathcal{N}(0,t-s)$ według rozkładu. Mamy

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_{n,k}=0,\quad \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(Y_{n,k})=t-s,$$

wystarczy więc sprawdzić warunek Lindeberga. Dla $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|Y_{n,k}|^2\mathbb{1}_{\{|Y_{n,k}|\geqslant\varepsilon\}} \leqslant \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^n |Y_{n,k}|^2\Big)\mathbb{1}_{\{\max_{k\leqslant n}|Y_{n,k}|\geqslant\varepsilon\}}\Big] \\ &\leqslant \Big(\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n |Y_{n,k}|^2\Big)^2\Big)^{1/2}\mathbb{P}\Big(\max_{k\leqslant n}|Y_{n,k}|\geqslant\varepsilon\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zmienne $(Y_{n,k})$ dla ustalonego n są niezależne i mają średnią zero, zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t-X_s)^4 = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n Y_{n,k}\Big)^4 &= \sum_{1\leqslant k_1,k_2,k_3,k_4\leqslant n} \mathbb{E}Y_{n,k_1}Y_{n,k_2}Y_{n,k_3}Y_{n,k_4} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_{n,k}^4 + 6\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\mathbb{E}Y_{n,k}^2\mathbb{E}Y_{n,l}^2 \\ &\geqslant \sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_{n,k}^4 + 2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\mathbb{E}Y_{n,k}^2\mathbb{E}Y_{n,l}^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n |Y_{n,k}|^2\Big)^2. \end{aligned}$$

Z ciągłości trajektorii X wynika, że $\mathbb{P}(\max_{k\leqslant n}|Y_{n,k}|\geqslant\varepsilon)\to 0$ przy $n\to\infty$, zatem $\lim_{n\to\infty}L_n(\varepsilon)=0$. □

Uwaga 18. Warunek (W2c) nie jest konieczny - zob. Twierdzenie 5 z paragrafu 13.1 książki [3].

Okazuje się, że również nie trzeba zakładać skończoności wariancji ani nawet istnienia wartości średniej W_1 - warunek (W2b) ma charakter czysto normalizacyjny. Dokładniej zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 19. *Załóżmy, że proces stochastyczny $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ spełnia warunki (W0),(W1),(W2a) i (W3). Wówczas istnieją stałe $a,b\in\mathbb{R}$ i proces Wienera W takie, że $X_t=aW_t+bt$ dla wszystkich $t\geqslant 0$.*

1.4 Nieróżniczkowalność trajektorii

Trajektorie procesu Wienera mają wiele ciekawych własności, część z nich poznamy później. W tym paragrafie pokażemy, że mimo iż są ciągłe, to z prawdopodobieństwem 1 nie są różniczkowalne w żadnym punkcie.

Twierdzenie 20. *Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$ są funkcjami nieróżniczkowalnymi w żadnym punkcie, tzn.*

$$\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\geqslant 0}\ t\to W_t(\omega)\ \textit{jest różniczkowalne w}\ t_0\Big)=0.$$

Dowód. Najpierw pokażemy nieróżniczkowalność trajektorii na $[0,1)$, tzn.

$$\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,1)}\ t\to W_t(\omega)\ \text{jest różniczkowalne w}\ t_0\Big)=0.$$

Zauważmy, że jeśli funkcja $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $t_0\in[0,1)$ oraz $|f'(t_0)|<M$, to $|f(t)-f(t_0)|\leqslant M|t-t_0|$ dla t dostatecznie bliskich t_0. Zatem, jeśli $j/n\leqslant t_0<(j+1)/n$, to dla dostatecznie dużych n,

$$\Big|f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)-f\Big(\frac{j}{n}\Big)\Big|\leqslant\Big|f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)-f(t_0)\Big|+\Big|f(t_0)-f\Big(\frac{j}{n}\Big)\Big|\leqslant M\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\Big),$$

$$\Big|f\Big(\frac{j+2}{n}\Big)-f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)\Big|\leqslant\Big|f\Big(\frac{j+2}{n}\Big)-f(t_0)\Big|+\Big|f(t_0)-f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)\Big|\leqslant M\Big(\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\Big)$$

oraz

$$\Big|f\Big(\frac{j+3}{n}\Big)-f\Big(\frac{j+2}{n}\Big)\Big|\leqslant\Big|f\Big(\frac{j+3}{n}\Big)-f(t_0)\Big|+\Big|f(t_0)-f\Big(\frac{j+2}{n}\Big)\Big|\leqslant M\Big(\frac{3}{n}+\frac{2}{n}\Big).$$

Stąd, jeśli funkcja f jest różniczkowalna w jakimś punkcie przedziału $[0,1)$, to

$$\exists_{M<\infty}\ \exists_{m<\infty}\ \forall_{n\geqslant m}\ \exists_{0\leqslant j\leqslant n-3}\ \forall_{k=0,1,2}\ \Big|f\Big(\frac{j+k+1}{n}\Big)-f\Big(\frac{j+k}{n}\Big)\Big|\leqslant\frac{5M}{n}.$$

Czyli

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,1)}\ t\to & W_t(\omega)\ \text{jest różniczkowalne w}\ t_0\Big)\\ &\leqslant\mathbb{P}\Big(\bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{n-3}\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big)\\ &\leqslant\sum_{M=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{n-3}\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big).\end{aligned}$$

Z niezależności przyrostów dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big) &= \prod_{k=0}^{2}\mathbb{P}\Big(|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big)\\
&= \Big(\mathbb{P}\Big(|W_{\frac{1}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big)\Big)^3=\Big(\mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}|W_1|\leqslant\frac{5M}{n}\Big)\Big)^3\\
&= \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-5M/\sqrt{n}}^{5M/\sqrt{n}}e^{-x^2/2}dx\Big)^3\leqslant\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{10M}{\sqrt{n}}\Big)^3.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=0}^{n-3}\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big)\leqslant\sum_{j=0}^{n-3}\frac{1000M^3}{n^{3/2}}\leqslant\frac{1000M^3}{\sqrt{n}},$$

czyli

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{n-3}\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big)=0$$

i

$$\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,1)}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\Big)=0.$$

Nieznacznie modyfikując poprzedni dowód (albo używając faktu, że $\widetilde{W}_t = T^{-1/2}W_{tT}$ też jest procesem Wienera oraz w oczywisty sposób nieróżniczkowalność W na $[0,1)$ jest równoważna nieróżniczkowalności $\widetilde{W}$ na $[0,T)$) dostajemy, że dla $T<\infty$,

$$\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,T)}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\Big)=0.$$

By zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0>0}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\Big)\\
&\quad=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,N)}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\Big)=0.
\end{aligned}$$

□

Uwaga 21. Dokładna analiza przedstawionego dowodu pokazuje, że nie wykazaliśmy mierzalności zdarzenia $\{\exists_{t_0}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\}$, a jedynie to, że jest ono podzbiorem pewnego zdarzenia miary zero. By uniknąć kłopotów technicznych podobnego rodzaju, wygodnie jest przyjąć, że przestrzeń probabilistyczna $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ jest zupełna, tzn. dowolny podzbiór zbioru miary zero jest mierzalny (każdą przestrzeń probabilistyczną można rozszerzyć do przestrzeni zupełnej).

2 Rozkłady Procesów Stochastycznych

Podczas tego wykładu zdefiniujemy rozkład procesu stochastycznego, w szczególności powiemy jakie zdarzenia określone przez proces są mierzalne. Udowodnimy, że rozkład procesu jest wyznaczony przez rozkłady skończenie wymiarowe. Sformułujemy też warunki, które muszą być spełnione, by istniał proces stochastyczny o zadanych rozkładach skończenie wymiarowych.

Przypomnijmy, że jeśli X jest zmienną losową o wartościach w przestrzeni $(E,\mathcal{E})$, to *rozkładem* X jest miara probabilistyczna na $(E,\mathcal{E})$ zadana wzorem

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A),\ A \in \mathcal{E}.$$

2.1 σ-ciało zbiorów cylindrycznych

Proces $X = (X_t)_{t\in T}$ możemy traktować jako zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^T$. Jakie podzbiory $\mathbb{R}^T$ są wówczas na pewno mierzalne?

Definicja 1. *Zbiory postaci*

$$\{x \in \mathbb{R}^T \colon (x_{t_1},\ldots,x_{t_n}) \in A\},\ t_1,\ldots,t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

nazywamy zbiorami cylindrycznymi. *Przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ będziemy oznaczać najmniejsze σ-ciało zawierające zbiory cylindryczne i będziemy je nazywać* σ-ciałem zbiorów cylindrycznych.

Uwaga 2. Zauważmy, że

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \sigma(\{x \in \mathbb{R}^T \colon x_t \in A\},\ t \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Przykłady

1. Zbiory $\{x \colon x_t > x_s\}$, $\{x \colon x_{t_1} > 0, x_{t_2} - x_{t_1} > 0, \ldots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}} > 0\}$ oraz $\{x \colon \forall_{t<s,t,s\in\mathbb{Q}_+}\ x_t > x_s\}$ należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$.

2. Zbiór $\{x \colon \sup_{t\in T}|x_t| \leqslant 1\}$ nie należy do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, gdy T jest nieprzeliczalny, podobnie $\{x \colon t \to x_t \text{ ciągłe}\}$ nie należy do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, gdy T jest niezdegenerowanym przedziałem.

Definicja 3. Rozkładem procesu $X = (X_t)_{t\in T}$ *nazywamy miarę probabilistyczną μ_X na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ daną wzorem*

$$\mu_X(C) = \mathbb{P}((X_t)_{t\in T} \in C),\ C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

Uwaga 4. Załóżmy, że T jest przedziałem (skończonym lub nie). Na przestrzeni funkcji ciagłych $C(T)$ rozważmy topologię zbieżności niemal jednostajnej. Wówczas $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T) = \mathcal{B}(C(T))$, co oznacza, że jeśli proces $X = (X_t)_{t\in T}$ ma ciągłe trajektorie, to X wyznacza rozkład probabilistyczny na przestrzeni funkcji ciągłych $(C(T), \mathcal{B}(C(T)))$. W szczególności proces Wienera wyznacza pewien rozkład probabilistyczny na $C[0,\infty)$.

2.2 Warunki zgodności. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu

Najprostsze zbiory z $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to zbiory cylindryczne. Miary takich zbiorów to rozkłady skończenie wymiarowe procesu.

Definicja 5. *Dla procesu $(X_t)_{t\in T}$ o wartościach w $\mathbb{R}$ i $t_1,\ldots,t_n \in T$ określamy miarę $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ na $\mathbb{R}^n$ wzorem*

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A) = \mathbb{P}((X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \in A),\ \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Rodzinę miar $\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} \colon t_1,\ldots,t_n \in T$ parami różne$\}$ nazywamy rodziną skończenie wymiarowych rozkładów *procesu X.*

Fakt 6. *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\in T}$ i $Y = (Y_t)_{t\in T}$ są procesami o tych samych skończenie wymiarowych rozkładach, czyli*

$$\mathbb{P}((X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \in A) = \mathbb{P}((Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n}) \in A)$$

dla wszystkich $t_1,\ldots,t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Wówczas X i Y mają ten sam rozkład, tzn.

$$\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(Y \in C) \text{ dla wszystkich } C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

Dowód. Rodzina zbiorów cylindrycznych $\mathcal{A}$ tworzy π-układ, a rodzina $\mathcal{C}$ zbiorów C takich, że $\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(Y \in C)$, jest λ-układem zawierającym $\mathcal{A}$. Zatem z twierdzenia o π- i λ- układach, $\mathcal{C}$ zawiera również σ-ciało generowane przez $\mathcal{A}$, czyli $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. □

Definicja 7. *Powiemy, że rodzina skończenie wymiarowych rozkładów*

$$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} \colon\ t_1,\ldots,t_n \in T \text{ parami różne}\}$$

spełnia warunki zgodności, *jeśli zachodzą następujące warunki:*

i) Dla dowolnych $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, dowolnej permutacji $(i_1, \ldots, i_n)$ liczb $(1, \ldots, n)$ oraz zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n).$$

ii) Dla dowolnych $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \in T$ oraz $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n).$$

Oczywiście rodzina rozkładów skończenie wymiarowych dowolnego procesu stochastycznego spełnia warunki zgodności. Okazuje się, że są to jedyne warunki jakie należy nałożyć na taką rodzinę.

Twierdzenie 8. *Załóżmy, że dana jest rodzina skończenie wymiarowych rozkładów $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$ spełniająca warunki zgodności. Wówczas istnieje proces $(X_t)_{t\in T}$ mający skończenie wymiarowe rozkłady równe $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$.*

Nie będziemy przedstawiać technicznego dowodu powyższego twierdzenia - wszystkich zainteresowanych odsyłamy do Dodatku B. W zamian sformułujemy użyteczny wniosek.

Wniosek 9. *Załóżmy, że $T \subset \mathbb{R}$ oraz dana jest rodzina rozkładów skończenie wymiarowych $\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} : t_1 < t_2 < \ldots < t_n, t_1, \ldots, t_n \in T\}$ spełniająca warunek*

$$\begin{aligned}\mu_{t_1,\ldots,t_n}&(A_1 \times \ldots \times A_{k-1} \times \mathbb{R} \times A_{k+1} \ldots \times A_n) \\ &= \mu_{t_1,\ldots t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_{k-1} \times A_{k+1} \times \ldots \times A_n).\end{aligned}$$

dla wszystkich $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz zbiorów borelowskich $A_1, \ldots, A_n$. Wówczas istnieje proces $(X_t)_{t\in T}$ taki, że $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ ma rozkład $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ dla $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Dowód. Dla $t_1, \ldots, t_n \in T$ parami różnych istnieje permutacja $(i_1, \ldots, i_n)$ liczb $(1, \ldots, n)$ taka, że $t_{i_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_n}$. Możemy więc określić $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ jako rozkład wektora $(Y_1, \ldots, Y_n)$ takiego, że $(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n})$ ma rozkład $\mu_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}$. Można sprawdzić, że tak określona rodzina miar $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$ spełnia warunki zgodności. □

Przykłady

1. Jeśli $(\mu_t)_{t\in T}$ jest dowolną rodziną rozkładów na $\mathbb{R}$, to istnieje rodzina niezależnych zmiennych losowych $(X_t)_{t\in T}$ taka, że X_t ma rozkład μ_t. Używamy tu twierdzenia o istnieniu dla $\mu_{t_1,\ldots,t_n} = \mu_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_n}$.

2. Istnieje proces spełniający warunki (W0)-(W2) definicji procesu Wienera. Istotnie dla $0 = t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ kładziemy

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n} \sim \Big(X_1, X_1 + X_2, \ldots, \sum_{k=1}^{n} X_k\Big),$$

gdzie $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$. Warunki zgodności wynikają wówczas stąd, iż jeśli Y_1, Y_2 są niezależne i $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ dla $i = 1, 2$, to $Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Uwaga 10. Dla uproszczenia zakładaliśmy podczas tego wykładu, że proces X_t ma wartości rzeczywiste. Nic się zmieni (poza oczywistymi drobnymi zmianami definicji) dla procesów o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Czasem jednak zachodzi potrzeba rozpatrywania procesów o wartościach w ogólniejszej przestrzeni E. warto więc zauważyć, że

- w Fakcie 6 nie wykorzystywaliśmy żadnych własności przestrzeni E,
- w dowodzie Twierdzenia 8 wykorzystuje się regularność miar na E^n -tu wystarczy założyć, że E jest σ-zwartą przestrzenią metryczną, tzn. E jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych lub dodać warunek regularności rozpatrywanych miar.

3 Ciągłość trajektorii

Wiemy już kiedy istnieje proces o zadanych skończenie wymiarowych rozkładach. Nasuwa się pytanie – kiedy taki proces ma ciągłe trajektorie? Zanim jednak zastanowimy się nad odpowiedzią wprowadzimy dwa ważne sposoby porównywania procesów.

3.1 Procesy stochastycznie równoważne i nierozróżnialne

Definicja 11. *Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ oraz $Y = (Y_t)_{t\in T}$ będą dwoma procesami stochastycznymi, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Powiemy, że:*
a) X jest modyfikacją *Y (lub X jest* stochastycznie równoważny *Y), jeśli*

$$\forall_{t\in T}\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

b) X i Y są nierozróżnialne, jeśli

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in T}\ X_t = Y_t) = 1.$$

Zauważmy, że procesy nierozróżnialne są oczywiście stochastycznie równoważne. Ponadto dwa procesy stochastycznie równoważne mają ten sam rozkład. Poniższy przykład pokazuje, że z rozkładu procesu nie można wnioskować o własnościach trajektorii.

Przykład

Niech $Z \geqslant 0$ będzie dowolną zmienną losową o rozkładzie bezatomowym tzn. $\mathbb{P}(Z = z) = 0$ dla wszystkich $z \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy dwa procesy na $T = [0, \infty)$:

$$X_t \equiv 0 \quad \text{oraz} \quad Y_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq Z(\omega) \\ 1 & \text{dla } t = Z(\omega). \end{cases}$$

Wówczas Y jest modyfikacją X, bo $\mathbb{P}(X_t \neq Y_t) = \mathbb{P}(Z = t) = 0$. Zauważmy jednak, że wszystkie trajektorie Y są nieciągłe, czyli w szczególności $\mathbb{P}(\forall_{t\neq 0}\ X_t = Y_t) = 0$, a zatem procesy X i Y nie są nierozróżnialne.

Fakt 12. *Załóżmy, że T jest przedziałem oraz procesy $X = (X_t)_{t\in T}$ i $Y = (Y_t)_{t\in T}$ mają prawostronnie ciągłe trajektorie. Wówczas, jeśli X jest modyfikacją Y, to X i Y są nierozróżnialne.*

Dowód. Wybierzmy przeliczalny podzbiór $T_0 \subset T$, gęsty w T, zawierający dodatkowo $\sup T$, jeśli T jest przedziałem prawostronnie domkniętym. Niech

$$A = \{\forall_{t\in T_0}\ X_t = Y_t\},$$

wówczas $\mathbb{P}(A) = 1$, jako przeliczalne przecięcie zbiorów pełnej miary. Ponadto, jeśli $\omega \in A$, to dla dowolnego $t \in T$,

$$X_t(\omega) = \lim_{s\to t+, s\in T_0} X_s(\omega) = \lim_{s\to t+, s\in T_0} Y_s(\omega) = Y_t(\omega),$$

czyli

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in T}\ X_t = Y_t) \geqslant \mathbb{P}(A) = 1.$$

□

3.2 Twierdzenie o ciągłej modyfikacji

Najważniejsze twierdzenie tego wykładu podaje kryterium istnienia modyfikacji procesu, która ma ciągłe trajektorie. Zanim sformułujemy dokładny wynik przypomnijmy definicję hölderowskości.

Definicja 13. *Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest hölderowsko ciągła z wykładnikiem γ, jeśli dla pewnej stałej $C < \infty$,*

$$|f(s) - f(t)| \leqslant C|t-s|^{\gamma} \text{ dla wszystkich } s,t \in [a,b].$$

Twierdzenie 14. *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\in[a,b]}$ jest procesem takim, że*

$$\forall_{t,s\in[a,b]}\ \mathbb{E}|X_t - X_s|^{\alpha} \leqslant C|t-s|^{1+\beta} \tag{1}$$

dla pewnych stałych dodatnich α, β, C. Wówczas istnieje proces $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t\in[a,b]}$, będący modyfikacją procesu X, którego wszystkie trajektorie są ciągłe. Co więcej trajektorie każdej modyfikacji X o ciągłych trajektoriach są, z prawdopodobieństwem 1, hölderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$.

Zainteresownych dowodem odsyłamy do Dodatku B.

Wniosek 15. *Twierdzenie 14 jest prawdziwe, gdy przedział $[a,b]$ zastąpimy nieskończonym przedziałem, o ile hölderowskość trajektorii zastąpimy lokalną hölderowskością (tzn. hölderowskością na każdym przedziale skończonym). Co więcej, wystarczy, by warunek (1) zachodził dla $|s-t| \leqslant \delta$, gdzie δ jest ustaloną liczbą dodatnią.*

Dowód. Przedział nieskończony T można zapisać jako przeliczalną sumę przedziałów $[a_n, a_{n+1}]$, długości nie większej od δ. Z Twierdzenia 14 wynika istnienie modyfikacji $\widetilde{X}_t^{(n)}$ procesu X na przedziale $[a_n, a_{n+1}]$, o ciągłych trajektoriach. Niech $A_n = \{\tilde{X}^{(n)}_{a_{n+1}} \neq \tilde{X}^{(n+1)}_{a_{n+1}}\}$, wówczas $A = \bigcup_n A_n$ ma miarę zero. Możemy więc położyć:

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \widetilde{X}_t^{(n)}(\omega) & \text{dla } t \in [a_n, a_{n+1}],\ \omega \notin A \\ 0 & \text{dla } \omega \in A. \end{cases}$$

□

Wniosek 16. *Istnieje proces Wienera, tzn. proces spełniający warunki (W0)-(W3).*

Dowód. Mamy $\mathbb{E}|W_s - W_t|^4 = \mathbb{E}|\sqrt{t-s}W_1|^4 = (s-t)^2\mathbb{E}W_1^4 = 3(s-t)^2$ i możemy zastosować Wniosek 15 z $\beta = 1$, $\alpha = 4$ i $C = 3$. □

Wniosek 17. *Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są lokalnie Hölderowsko ciągłe z dowolnym parametrem $\gamma < 1/2$.*

Dowód. Mamy $\mathbb{E}|W_s - W_t|^p = (s-t)^{p/2}\mathbb{E}W_1^p = C_p(s-t)^{p/2}$ dla dowolnego $p < \infty$. Stosując twierdzenie 14 z $\beta = p/2-1$, $\alpha = p$ dostajemy Hölderowską ciągłość trajektorii z dowolnym $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Biorąc $p \to \infty$ dostajemy tezę. $\square$

Uwaga 18. Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na $[0,\infty)$, nie mogą więc być globalnie Hölderowskie z żadnym wykładnikiem.

Uwaga 19. Założenia $\beta > 0$ nie można opuścić – wystarczy rozważyć proces Poissona (tzn. proces $(N_t)_{t\geqslant 0}$ o prawostronnie ciaglych trajektoriach, startujący z zera, o przyrostach niezależnych taki, że $N_t - N_s$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t-s)$ – zob. np. Rozdział 23 w [1]) dla którego $\mathbb{E}|N_t - N_s| = \lambda|t-s|$, a oczywiście proces Poissona przyjmuje wartości całkowite, więc nie ma modyfikacji o ciągłych trajektoriach.

3.3 Inne rodzaje ciągłości procesów

W tym wykładzie koncentrowaliśmy uwagę nad procesami o trajektoriach ciągłych. Warto jednak wspomnieć o innych formach ciągłości procesów stochastycznych.

Definicja 20. *Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym. Mówimy, że*

a) proces X jest stochastycznie ciągły, *jeśli*

$$t_n \to t \;\Rightarrow\; X_{t_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t.$$

b) proces X jest ciągły wg p-tego momentu (ciągły w L_p), *jeśli*

$$t_n \to t \;\Rightarrow\; \mathbb{E}|X_{t_n} - X_t|^p \to 0.$$

Uwaga 21. Nietrudno wykazać, że zarówno ciągłość trajektorii jaki i ciągłość wg p-tego momentu implikują ciągłość stochastyczną procesu. Z pozostałych czterech implikacji między powyższymi pojęciami ciągłości procesu żadna nie jest prawdziwa bez dodatkowych założeń.

4 Filtracje, Momenty Zatrzymania

Celem tego wykładu jest pokazanie jak zmodyfikować definicje omawiane podczas kursowego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa z przypadku czasu dyskretnego na czas ciągły.

Będziemy zakładać, że T jest lewostronnie domkniętym przedziałem (typowo $T = [0,\infty)$), choć większość definicji i wyników można uogólnić na szerszą klasę zbiorów.

4.1 Filtracje

Definicja 1. Filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *nazywamy rosnący rodzinę σ-ciał zawartych w $\mathcal{F}$, tzn. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ dla $t \leqslant s,\ t,s \in T$.*

Zdarzenia z σ-ciała $\mathcal{F}_t$ możemy interpretować jako zdarzenia obserwowalne do chwili t.

Definicja 2. *Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym.* Filtracją generowaną przez X *nazywamy rodzinę $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in T}$ daną wzorem $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s \colon s \leqslant t)$.*

Fakt 3. *Proces X_t ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $t < s,\ t,s \in T$ przyrost $X_s - X_t$ jest niezależny od σ-ciała $\mathcal{F}_t^X$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Rodzina zdarzeń A niezależnych od $X_s - X_t$ tworzy λ-układ, ponadto, z niezależności przyrostów X, zawiera π-układ zdarzeń postaci $\{X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n\}$ dla $t_1 < \ldots < t_n \leqslant t$.

$\Leftarrow$: Ustalmy $t_1 < \ldots < t_n$ oraz zbiory borelowskie $A_1, \ldots, A_n$. Zdarzenie $\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} \in A_{n-1}\}$ należy do σ-ciała $\mathcal{F}_{t_{n-1}}^X$, więc jest niezależne od zmiennej $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. Stąd

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n)\\ &\quad = \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} \in A_{n-1})\mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n).\end{aligned}$$

Iterując to rozumowanie pokazujemy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t_1} \in&A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n)\\ &= \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1)\mathbb{P}(X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2,) \cdots \mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n).\end{aligned}$$

□

Definicja 4. *Proces $X = (X_t)$ nazywamy* zgodnym z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *lub* $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym, *jeśli dla wszystkich $t \in T$, X_t jest $\mathcal{F}_t$ mierzalne.*

Uwaga 5. Oczywiście proces X jest zgodny z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ dla $t \in T$. W szczególności każdy proces X jest zgodny z filtracją przez siebie generowaną.

4.2 Momenty Zatrzymania

Definicja 6. Momentem zatrzymania (momentem Markowa, czasem zatrzymania) *względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *nazywamy zmienną losową o wartościach w* $T \cup \{\infty\}$ *taką, że* $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ *dla wszystkich* $t \in T$.

Moment zatrzymania to strategia przerwania eksperymentu losowego (np. zakończenia udziału w pewnej grze losowej) taka, że decyzję o przerwaniu do chwili t podejmujemy tylko na podstawie obserwacji dostępnych w tym czasie.

Przykład. Dla zbioru $A \subset \mathbb{R}$ i procesu stochastycznego $(X_t)_{t\in T}$ określmy

$$\tau_A = \inf\{t \in T\colon X_t \in A\}.$$

Jeśli $(X_t)_{t\in T}$ jest $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym procesem o ciągłych trajektoriach, zaś A zbiorem domkniętym, to τ_A jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$.

Dowód. Niech $T_0 \subset T$ będzie gęstym podzbiorem T zawierającym lewy koniec. Z domkniętości zbioru A i ciągłości X dostajemy dla $t \in T$

$$\{\tau_A \leqslant t\} = \{\exists_{s\leqslant t}\ X_s \in A\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s\leqslant t, s\in T_0} \{X_s \in A_{1/n}\} \in \mathcal{F}_t,$$

gdzie

$$A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n\colon d(x, A) < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon\text{-otoczka zbioru } A).$$

□

Uwaga 7. Jeśli w powyższym przykładzie A będzie zbiorem otwartym, to τ_A nie musi być momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, ale musi być momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$, gdzie dla $t < \sup T$

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s,$$

a jeśli t jest największym elementem T, to kładziemy $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.

Powyższa uwaga motywuje poniższą definicję, która ma nieco techniczny charakter, ale jest powszechnie używana w teorii procesów.

Definicja 8. *Filtrację* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *nazywamy* prawostronnie ciągłą, *jeśli* $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ *dla wszystkich* $t \in T$. *Mówimy, że filtracja* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ spełnia zwykłe warunki, *jeśli*
a) jest prawostronnie ciągła,
b) dla wszystkich t, $\mathcal{F}_t$ *zawiera wszystkie zbiory miary zero, tzn. jeśli* $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0$, *to* $A \in \mathcal{F}_t$.

Definicja 9. *Niech τ będzie momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Definiujemy σ-ciało* zdarzeń obserwowalnych do chwili τ *wzorem*

$$\mathcal{F}_\tau := \Big\{A \in \mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{t\in T}\mathcal{F}_t\Big)\colon \forall_{t\in T}\ A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t\Big\}.$$

Fakt 10. *a) Zbiór $\mathcal{F}_\tau$ jest σ-ciałem.*
b) Jeśli $\tau\leqslant\sigma$, to $\mathcal{F}_\tau\subset\mathcal{F}_\sigma$.
c) Zmienna losowa τ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna.

Dowód. a) Zbiór $\Omega\in\mathcal{F}_\tau$, bo $\Omega\cap\{\tau\leqslant t\}=\{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$. Jeśli $A\in\mathcal{F}_\tau$, to $A'\cap\{\tau\leqslant t\}=\{\tau\leqslant t\}\setminus(A\cap\{\tau\leqslant t\})\in\mathcal{F}_t$, czyli $A'\in\mathcal{F}_\tau$. Jeśli $A_n\in\mathcal{F}_\tau$, to $(\bigcup_n A_n)\cap\{\tau\leqslant t\}=\bigcup_n(A_n\cap\{\tau\leqslant t\})\in\mathcal{F}_t$, czyli $\bigcup_n A_n\in\mathcal{F}_\tau$.

b) Weźmy $A\in\mathcal{F}_\tau$, wówczas dla $t\in T$, $A\cap\{\sigma\leqslant t\}=A\cap\{\tau\leqslant t\}\cap\{\sigma\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$, czyli $A\in\mathcal{F}_\sigma$.

c) Wystarczy pokazać, że $\{\tau\leqslant s\}\in\mathcal{F}_\tau$, ale $\{\tau\leqslant s\}\cap\{\tau\leqslant t\}=\{\tau\leqslant s\wedge t\}\in\mathcal{F}_{s\wedge t}\subset\mathcal{F}_t$. □

Fakt 11. *Załóżmy, że τ i σ są momentami zatrzymania. Wówczas $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}=\mathcal{F}_\tau\cap\mathcal{F}_\sigma$ oraz zdarzenia $\{\tau<\sigma\},\{\sigma<\tau\},\{\tau\leqslant\sigma\},\{\sigma\leqslant\tau\},\{\tau=\sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.*

Dowód. Zauważmy, że $\tau\wedge\sigma$ jest momentem zatrzymania oraz $\tau\wedge\sigma\leqslant\tau$ i $\tau\wedge\sigma\leqslant\sigma$, zatem na mocy Faktu 10 dostajemy $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}\subset\mathcal{F}_\tau\cap\mathcal{F}_\sigma$. Na odwrót, jeśli $A\in\mathcal{F}_\tau\cap\mathcal{F}_\sigma$, to $A\cap\{\tau\wedge\sigma\leqslant t\}=A\cap(\{\tau\leqslant t\}\cup\{\sigma\leqslant t\})=(A\cap\{\tau\leqslant t\})\cup(A\cap\{\sigma\leqslant t\})\in\mathcal{F}_t$, czyli $A\in\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$. Dalszą część faktu pozostawiamy do udowodnienia na ćwiczeniach. □

Okazuje się, że adaptowalność procesu nie gwarantuje np. mierzalności zmiennych X_τ dla wszystkich momentów zatrzymania τ. Dlatego wprowadzimy jeszcze jedną techniczną definicję.

Definicja 12. *Proces $X=(X_t)_{t\in T}$ nazywamy* progresywnie mierzalnym *względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, jeśli dla każdego $t\in T$, funkcja $(s,\omega)\to X_s(\omega)$ traktowana jako funkcja ze zbioru $T\cap(-\infty,t]\times\Omega$ w $\mathbb{R}$ jest mierzalna względem σ-algebry $\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t$. Równoważnie*

$$\forall_{t\in T}\ \forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\ \{(s,\omega)\in T\times\Omega\colon s\leqslant t, X_s(\omega)\in A\}\in\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t.$$

Fakt 13. *Załóżmy, że T jest przedziałem oraz dany jest proces $X=(X_t)_{t\in T}$ oraz filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.*
a) Jeśli proces X jest progresywnie mierzalny względem $(\mathcal{F}_t)$, to jest $\mathcal{F}_t$-adaptowalny.
b) Jeśli proces X jest $\mathcal{F}_t$-adaptowalny oraz ma prawostronnie ciągłe trajektorie, to jest progresywnie mierzalny względem $(\mathcal{F}_t)$.

Dowód. a) Zbiór $\{\omega\colon X_t(\omega)\in A\}$ jest przekrojem zbioru $\{(s,\omega)\in T\times\Omega\colon s\leqslant t, X_s(\omega)\in A\}$, a zatem należy do $\mathcal{F}_t$.

b) Ustalmy $t\in T$ i połóżmy dla $s\in T$, $s\leqslant t$, $X_s^{(n)}:=X_{t-2^{-n}k}$, gdzie k jest liczbą całkowitą taką, że $t-2^{-n}(k+1)<s\leqslant t-2^{-n}k$. Wówczas

$$\begin{aligned}\{(s,\omega)\in & T\times\Omega\colon s\leqslant t, X_s^{(n)}(\omega)\in A\}\\ &=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Big(T\cap\Big(t-\frac{k+1}{2^n},t-\frac{k}{2^n}\Big]\Big)\times\{\omega\colon X_{t-\frac{k}{2^n}}(\omega)\in A\}\\ &\in\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Zatem funkcja $X_s^{(n)}(\omega), s\in T\cap(-\infty,t],\omega\in\Omega$ jest $\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t$ mierzalna. Wobec prawostronnej ciągłości X mamy $X_s(\omega)=\lim_{n\to\infty}X_s^{(n)}(\omega)$, zatem funkcja $X_s(\omega), s\in T\cap(-\infty,t],\omega\in\Omega$ jest $\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t$ mierzalna jako granica funkcji mierzalnych. $\square$

Jeśli τ jest momentem zatrzymania, a $X=(X_t)_{t\in T}$ procesem, to zmienna X_τ jest dobrze zdefiniowana tylko na zbiorze $\{\tau<\infty\}$. Musimy zatem określić co mamy na myśli mówiąc, że zmienna X_τ jest mierzalna.

Definicja 14. *Mówimy, że zmienna losowa X określona na zbiorze A jest mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{G}$ zawierającego A, jeśli $\{\omega\in A\colon\ X(w)\in B\}\in\mathcal{G}$ dla dowolnego zbioru borelowskiego B.*

Fakt 15. *Załóżmy, że $X=(X_t)_{t\in T}$ jest procesem progresywnie mierzalnym względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, a τ jest momentem zatrzymania. Wówczas zmienna losowa X_τ określona na zbiorze $\{\tau<\infty\}\in\mathcal{F}_\tau$ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna. Ponadto proces zatrzymany w chwili τ, $X^\tau:=(X_{t\wedge\tau})_{t\in T}$ jest progresywnie mierzalny.*

Dowód. Odwzorowanie

$$(s,\omega)\to(\tau(\omega)\wedge s,\omega)\colon T\cap(-\infty,t]\times\Omega\to T\cap(-\infty,t]\times\Omega$$

jest mierzalne względem σ-ciała $\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t)$. Jeśli złożymy je z odwzorowaniem

$$(s,\omega)\to X_s(\omega)\text{ mierzalnym z }(T\cap(-\infty,t]\times\Omega,\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t)\text{ w }\mathbb{R},$$

to otrzymamy odwzorowanie

$$(s,\omega)\to X_{\tau(\omega)\wedge s}(\omega)\text{ mierzalne z }(T\cap(-\infty,t]\times\Omega,\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t)\text{ w }\mathbb{R}.$$

Stąd wynika progresywna mierzalność procesu X^τ. By zakończyć dowód zauważmy, że

$$\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{X_{\tau\wedge t} \in A\} \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$$

na mocy progresywnej mierzalności (a właściwie adaptowalności) X^τ. $\square$

5 Martyngały z czasem ciągłym

Jak podczas poprzedniego wykładu, jeśli nie powiemy inaczej, zakładamy, że T jest lewostronnie domkniętym przedziałem.

5.1 Definicje i przykłady

Definicja 1. *Mówimy, że $(X_t)_{t\in T}$ jest* martyngałem *(odp.* podmartyngałem, nadmartyngałem) *względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ lub, że $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest* martyngałem *(odp.* podmartyngałem, nadmartyngałem*), jeśli*
a) dla wszystkich $t \in T$, X_t jest $\mathcal{F}_t$ adaptowalny i $\mathbb{E}|X_t| < \infty$,
b) dla dowolnych $s, t \in T, s < t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ p.n. (odp. $\geqslant$ dla podmartyngału i $\leqslant$ dla nadmartyngału).

Przykład 1. Jeśli X jest całkowalną zmienną losową, a $\mathcal{F}_t$ dowolną filtracją to $X_t := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$ jest martyngałem.
Sprawdzamy dla $t > s$

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s) = X \text{ p.n..}$$

Przykład 2. $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}^W_t = \sigma(W_s \colon s \leqslant t)$.
Istotnie dla $t > s$ mamy z niezależności przyrostów

$$\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = W_s + \mathbb{E}(W_t - W_s) = W_s \text{ p.n..}$$

Przykład 3. $(W_t^2)_{t\geqslant 0}$ jest podmartyngałem, a $(W_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ martyngałem względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}^W_t = \sigma(W_s \colon s \leqslant t)$.
Liczymy dla $t > s$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_s^2|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(2W_s(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s)\\ &= W_s^2 + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s) + \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = W_s^2 + t - s \text{ p.n..}\end{aligned}$$

Uwaga 2. W ostatnich dwu przykładach filtrację $(\mathcal{F}^W_t)$ można zastąpić filtracją $(\mathcal{F}^W_{t+})$.

Fakt 3. *Załóżmy, że $(X_t, \mathcal{F}_t)$ jest martyngałem (odp. podmartyngałem), zaś $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją wypukłą (odp. wypukłą i niemalejącą) taką, że $\mathbb{E}|f(X_t)| < \infty$ dla wszystkich t. Wówczas $(f(X_t), \mathcal{F}_t)$ jest podmartyngałem.*

Dowód. Z nierówności Jensena mamy $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) \geqslant f(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s))$ p.n., a ostatnia zmienna jest równa $f(X_s)$ w przypadku martyngału i nie mniejsza niż $f(X_s)$ dla podmartyngału. $\square$

Przypomnijmy definicję funkcji harmonicznych.

Definicja 4. *Funkcję $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy podharmoniczną (odp. harmoniczną, nadharmoniczną) jeśli*

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^n}\ \forall_{r\geqslant 0}\ f(x) \leqslant \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x+ry)d\sigma(y)\ \textit{(odp.} =, \geqslant\textit{)},$$

gdzie $\sigma(y)$ jest miarą powierzchniową na sferze, a $|S_{n-1}| = \int_{S^{n-1}} d\sigma(y) = 2\pi^{n/2}(\Gamma(n/2))^{-1}$.

Uwaga 5. Funkcja gładka jest harmoniczna (odp. pod-,nad-) wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta f = 0$ (odp. $\geqslant$, $\leqslant$). Dla $n = 1$ warunek podharmoniczności jest równoważny wypukłości. Funkcja $f(x) = -\ln|x - x_0|$ jest nadharmoniczna na $\mathbb{R}^2$, a funkcja $f(x) = |x - x_0|^{2-d}$ nadharmoniczna na $\mathbb{R}^d$ dla $d > 2$.

Fakt 6. *Niech $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)})$ będzie d-wymiarowym procesem Wienera, $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s\colon s \leqslant t)$, zaś $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funkcją harmoniczną (odp. nad-, pod-) taką, że $\mathbb{E}|f(W_t)| < \infty$ dla $t \geqslant 0$. Wówczas $(f(W_t), \mathcal{F}_t^W)$ jest martyngałem (odp. nad-, pod-).*

Dowód. Liczymy dla $t > s$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(W_t)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(f(W_s + (W_t - W_s))|\mathcal{F}_s)\\
&= (2\pi(t-s))^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} f(W_s + x)e^{-\frac{|x|^2}{2(t-s)}}dx\\
&= (2\pi(t-s))^{-d/2}\int_0^\infty r^{d-1}e^{-\frac{r^2}{2(t-s)}}\Big(\int_{S^{d-1}} f(W_s + y)d\sigma(y)\Big)dr\\
&= (2\pi(t-s))^{-d/2}|S^{d-1}|f(W_s)\int_0^\infty r^{d-1}e^{-\frac{r^2}{2(t-s)}}dr\\
&= (2\pi)^{-d/2}|S^{d-1}|\int_0^\infty r^{d-1}e^{-\frac{r^2}{2}}dr f(W_s) = c_d f(W_s) \text{ p.n..}
\end{aligned}$$

By zauważyć, że $c_d = 1$ przeprowadzamy albo bezpośredni rachunek, albo podstawiamy powyżej $f \equiv 1$. $\square$

5.2 Nierówności maksymalne

Zacznijmy od przypomnienia podstawowego lematu dla martyngałów z czasem dyskretnym, pochodzącego od Dooba.

Lemat 7. *Załóżmy, że $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0\leqslant 1\leqslant N}$ jest martyngałem (odp. nad-, pod-), zaś $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma \leqslant N$ dwoma momentami zatrzymania. Wówczas*

$$\mathbb{E}(X_\sigma|\mathcal{F}_\tau) = X_\tau \text{ p.n. (odp. } \leqslant, \geqslant).$$

Dowód. Musimy pokazać, że dla $A \in \mathcal{F}_\tau$, $\mathbb{E}X_\tau \mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{1}_A$. Połóżmy $A_k :=$ $A \cap \{\tau = k\}$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$. Mamy

$$(X_\sigma - X_\tau)\mathbb{1}_{A_k} = (X_\sigma - X_k)\mathbb{1}_{A_k} = \sum_{i=k}^{\sigma-1}(X_{i+1} - X_i)\mathbb{1}_{A_k} = \sum_{i=k}^{N}(X_{i+1} - X_i)\mathbb{1}_{A_k \cap \{\sigma > i\}},$$

zatem

$$\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau)\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{i=k}^{N}\mathbb{E}[(X_{i+1} - X_i)\mathbb{1}_{A_k\cap\{\sigma>i\}}] = 0,$$

gdyż $A_k \cap \{\sigma > i\} \in \mathcal{F}_i$. Stąd

$$\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau)\mathbb{1}_A] = \sum_{k=0}^{N}\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau)\mathbb{1}_{A_k}] = 0.$$

□

Uwaga 8. Lemat 7 nie jest prawdziwy, jeśli nie założymy ograniczoności momentów zatrzymania, np. biorąc $X_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_n$, gdzie ε_n niezależne zmienne losowe takie, że $\mathbb{P}(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\tau = 0$, $\sigma = \inf\{n\colon X_n = 1\}$ widzimy, że $\mathbb{E}X_\tau = 0 \neq 1 = \mathbb{E}X_\sigma$.

Lemat 9. *Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ będzie podmartyngałem, wówczas dla wszystkich $\lambda \geqslant 0$ mamy*

a) $\lambda\mathbb{P}\Big(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant \lambda\Big) \leqslant \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant\lambda\}} \leqslant \mathbb{E}X_N^+,$

b) $\lambda\mathbb{P}\Big(\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \leqslant -\lambda\Big) \leqslant \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > -\lambda\}} - \mathbb{E}X_0 \leqslant \mathbb{E}X_N^+ - \mathbb{E}X_0.$

Dowód. a) Niech $\tau := \inf\{n\colon X_n \geqslant \lambda\}$, z lematu 7 dostajemy (wobec $\tau\wedge N \leqslant N$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_N \geqslant \mathbb{E}X_{\tau\wedge N} &= \mathbb{E}X_\tau \mathbb{1}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant \lambda\}} + \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n < \lambda\}} \\ &\geqslant \lambda\mathbb{P}(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant \lambda) + \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n < \lambda\}}\end{aligned}$$

i po przeniesieniu wartości oczekiwanych na jedną stronę dostajemy postulowaną nierówność.

b) Definiujemy $\tau := \inf\{n\colon X_n \leqslant -\lambda\}$, z lematu 7 dostajemy (wobec $\tau \wedge N \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_0 \leqslant \mathbb{E}X_{\tau\wedge N} &= \mathbb{E}X_\tau \mathbb{1}_{\{\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \leqslant -\lambda\}} + \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > -\lambda\}} \\ &\leqslant -\lambda\mathbb{P}(\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \leqslant -\lambda) + \mathbb{E}X_N \mathbb{1}_{\{\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > -\lambda\}}\end{aligned}$$

i znów wystarczy pogrupować wartości oczekiwane. □

Wniosek 10. *Jeśli $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ jest martyngałem, bądź nieujemnym podmartyngałem, to*

a) $\forall_{p\geqslant 1}\, \forall_{\lambda\geqslant 0}\; \lambda^p \mathbb{P}\Big(\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n| \geqslant \lambda\Big) \leqslant \mathbb{E}|X_N|^p$,

b) $\forall_{p>1}\; \mathbb{E}|X_N|^p \leqslant \mathbb{E}\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|^p \leqslant (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}|X_N|^p$.

Dowód. a) Funkcja $f(t) = |t|^p$ jest wypukła, niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, stąd na mocy Faktu 3 $|X_n|^p$ jest nieujemnym podmartyngałem, zatem z Lematu 9 mamy

$$\lambda^p \mathbb{P}\Big(\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n| \geqslant \lambda\Big) \leqslant \mathbb{E}|X_N|^p \mathbb{1}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|^p \geqslant \lambda^p\}} \leqslant \mathbb{E}|X_N|^p.$$

b) Niech $X^* := \max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|$, z rachunku przeprowadzonego powyżej

$$\lambda\mathbb{P}(X^* \geqslant \lambda) \leqslant \mathbb{E}|X_N| \mathbb{1}_{\{X^*\geqslant\lambda\}}.$$

Stosując kolejno wzór na całkowanie przez części, twierdzenie Fubiniego i nierówność Höldera dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mathbb{P}(X^* \geqslant \lambda)d\lambda &\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-2}\mathbb{E}|X_N|\mathbb{1}_{\{X^*\geqslant\lambda\}}d\lambda \\ &= p\mathbb{E}|X_N|\int_0^{X^*} \lambda^{p-2}d\lambda \leqslant \frac{p}{p-1}\mathbb{E}|X_N|(X^*)^{p-1} \\ &\leqslant \frac{p}{p-1}(\mathbb{E}|X_N|^p)^{1/p}(\mathbb{E}(X^*)^p)^{(p-1)/p}.\end{aligned}$$

Jeśli $\mathbb{E}|X_N|^p < \infty$, to $\mathbb{E}|X_n|^p \leqslant \mathbb{E}|X_N|^p < \infty$ dla $0 \leqslant n \leqslant N$ oraz $\mathbb{E}(X^*)^p \leqslant \mathbb{E}\sum_{n=0}^N |X_n|^p < \infty$. Dzieląc więc otrzymaną poprzednio nierówność stronami przez $(\mathbb{E}(X^*)^p)^{(p-1)/p}$ dostajemy

$$(\mathbb{E}(X^*)^p)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}(\mathbb{E}|X_N|^p)^{1/p}.$$

□

Udowodnimy teraz *nierówność maksymalną Dooba* w przypadku ciągłym.

Twierdzenie 11. *Załóżmy, że $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem, o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Wówczas*

a) $\forall_{p\geqslant 1}\ \forall_{\lambda\geqslant 0}\ \lambda^p \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T}|X_t| \geqslant \lambda\Big) \leqslant \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p,$

b) $\forall_{p>1}\ \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p \leqslant \mathbb{E}\sup_{t\in T}|X_t|^p \leqslant (\frac{p}{p-1})^p \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p.$

Uwaga 12. Oczywiście jeśli T zawiera element maksymalny $t_{\max}$, to przy założeniach twierdzenia $\sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p = \mathbb{E}|X_{t_{\max}}|^p$.

Dowód. Jeśli D jest skończonym podzbiorem T, to na podstawie Wniosku 10 dostajemy

$$\lambda^p \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in D}|X_t| \geqslant \lambda\Big) \leqslant \sup_{t\in D}\mathbb{E}|X_t|^p \leqslant \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p.$$

Niech T_0 będzie gęstym podzbiorem T zawierającym prawy koniec T (o ile taki istnieje), zaś D_n wstępującym ciągiem skończonych podzbiorów T_0 takim, że $\bigcup_n D_n = T_0$. Wówczas dla dowolnego $\tilde{\lambda} > 0$ dostajemy na mocy prawostronnej ciągłości

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}^p \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T}|X_t| > \tilde{\lambda}\Big) &= \tilde{\lambda}^p \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T_0}|X_t| > \tilde{\lambda}\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\tilde{\lambda}^p \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in D_n}|X_t| > \tilde{\lambda}\Big) \leqslant \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p.\end{aligned}$$

Biorąc ciąg $\tilde{\lambda}_n \nearrow \lambda$ dostajemy postulowaną w a) nierówność. Nierówność z punktu b) wynika z Wniosku 10 w podobny sposób. □

Uwaga 13. Punkt b) twierdzenia 11 nie zachodzi dla $p = 1$ – można skonstruować martyngał dla którego $\sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty$, ale $\mathbb{E}\sup_t |X_t| = \infty$. Zachodzi jednak (przy założeniach Twierdzenia 11) nierówność

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} |X_t| \leqslant \frac{e}{e-1}\Big(1 + \sup_{t\in T} \mathbb{E}|X_t| \ln^+ |X_t|\Big).$$

Wniosek 14. *Dla dowolnych $u, s > 0$ zachodzi*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} W_t \geqslant u\Big) \leqslant e^{-\frac{u^2}{2s}}.$$

Dowód. Ustalmy $\lambda > 0$, wówczas $M_t := \exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2})$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_t^W$ generowanej przez proces Wienera. Stąd na mocy Twierdzenia 11 a) i nieujemności M_t dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} W_t \geqslant u\Big) &\leqslant \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} M_t \geqslant e^{\lambda u - \frac{\lambda^2 s}{2}}\Big) \\ &\leqslant e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}} \sup_{0\leqslant t\leqslant s} \mathbb{E}|M_t| = e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}} \mathbb{E}M_0 = e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} W_t \geqslant u\Big) \leqslant \inf_{\lambda>0} e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}} = e^{-\frac{u^2}{2s}}.$$

□

6 Twierdzenia o zbieżności martyngałów

6.1 Przejścia w dół przez przedział

Definicja 1. *Załóżmy, że $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ oraz $\alpha < \beta$. Jeśli I jest skończone, to określamy*

$$\tau_1 := \inf\{t \in I\colon f(t) \geqslant \beta\} \textit{ oraz } \sigma_1 := \inf\{t \in I\colon t > \tau_1, f(t) \leqslant \alpha\}$$

i dalej indukcyjnie dla $i = 1, 2, \ldots$

$$\tau_{i+1} := \inf\{t \in I\colon t > \sigma_i, f(t) \geqslant \beta\} \textit{ oraz } \sigma_{i+1} := \inf\{t \in I\colon t > \tau_{i+1}, f(t) \leqslant \alpha\}.$$

oraz definiujemy

$$D_I(f, [\alpha, \beta]) := \sup\{j\colon \sigma_j < \infty\} \vee 0$$

W przypadku, gdy I jest nieskończone kładziemy

$$D_I(f,[\alpha,\beta]) := \sup\{D_F(f,[\alpha,\beta])\colon F\subset T \text{ skończone}\}.$$

Wielkość $D_I(f,[\alpha,\beta])$ nazywamy liczbą przejść w dół funkcji f przez przedział $[\alpha,\beta]$.

Przypomnijmy fakt z rachunku prawdopodobieństwa wiążący skończoność liczby przejść ciągu przez przedział z istnieniem granicy

Lemat 2. *Ciąg liczbowy x_n jest zbieżny do pewnej, niekoniecznie skończonej granicy wtedy i tylko wtedy, gdy $D_{\mathbb{N}}((x_n),[\alpha,\beta])<\infty$ dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha<\beta$.*

Następny lemat jest niewielką modyfikacją poprzedniego.

Lemat 3. *Jeśli $f\colon[a,b)\to\mathbb{R}$, $b\leqslant\infty$ jest prawostronnie ciągłą funkcją taką, że $D_{[a,b)\cap\mathbb{Q}}(f,[\alpha,\beta])<\infty$ dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha<\beta$, to istnieje (niekoniecznie skończona) granica $\lim_{t\to b}f(t)$.*

Dowód. Załóżmy, że postulowana granica nie istnieje, wtedy można znaleźć liczby wymierne α,β takie, że

$$\liminf_{t\to b} f(t)<\alpha<\beta<\liminf_{t\to b} f(t).$$

Stąd wynika, że istnieje rosnący ciąg liczb wymiernych t_n z przedziału $[a,b)$ taki, że $f(t_{2k-1})\geqslant\beta$ oraz $f(t_{2k})\leqslant\alpha$. Przyjmując $I=\{t_1,t_2,\ldots\}$ widzimy, że $D_{[a,b)\cap\mathbb{Q}}(f,[\alpha,\beta])\geqslant D_I(f,[\alpha,\beta])=\infty$. $\square$

Lemat 4. *Załóżmy, że $X=(X_t)_{t\in T}$ jest podmartyngałem względem pewnej filtracji, a F jest przeliczalnym podzbiorem T, wówczas*

$$\mathbb{E}D_F(X,[\alpha,\beta])\leqslant\sup_{t\in F}\frac{\mathbb{E}(X_t-\beta)^+}{\beta-\alpha}.$$

Dowód. Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej widzimy, że wystarczy udowodnić lemat dla skończonych zbiorów F, dla uproszczenia notacji możemy oczywiście przyjąć, że $F=\{1,2,\ldots,N\}$. Zauważmy, że (przy oznaczeniach jak w Definicji 1)

$$X_{\tau_i\wedge N}-X_{\sigma_i\wedge N}=\begin{cases} X_{\tau_i}-X_{\sigma_i}\geqslant\beta-\alpha & \text{gdy } \sigma_i<\infty,\\ X_{\tau_i}-X_N\geqslant\beta-X_N\geqslant-(X_N-\beta)^+ & \text{gdy } \tau_i<\sigma_i=\infty,\\ X_N-X_N=0 & \text{gdy } \tau_i=\infty.\end{cases}$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^{N}(X_{\tau_i\wedge N}-X_{\sigma_i\wedge N})\geqslant(\beta-\alpha)D_F(X,[\alpha,\beta])-(X_N-\beta)^+.$$

Na mocy Lematu 7, $\mathbb{E}X_{\tau_{i\wedge N}}\leqslant\mathbb{E}X_{\sigma_{i\wedge N}}$, więc

$$0\geqslant\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N}(X_{\tau_i\wedge N}-X_{\sigma_i\wedge N})\geqslant\mathbb{E}(\beta-\alpha)D_F(X,[\alpha,\beta])-\mathbb{E}(X_N-\beta)^+.$$

□

6.2 Zbieżność prawie na pewno

Przypomnijmy twierdzenie dotyczące zbieżności podmartyngałów z czasem dyskretnym:

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest podmartyngałem względem pewnej filtracji takim, że $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}X_n^+<\infty$ (lub nadmartyngałem takim, że $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}X_n^-<\infty$), wówczas $X=\lim_{n\to\infty}X_n$ istnieje i jest skończona p.n., ponadto $\mathbb{E}|X|<\infty$.*

Sformułujemy teraz odpowiednik powyższego twierdzenia dla czasu ciągłego.

Twierdzenie 6. *Załóżmy, że $(X_t)_{t\in[a,b)}$, $b\leqslant\infty$ jest podmartyngałem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że $\sup_{t\in[a,b)}\mathbb{E}X_t^+<\infty$. Wówczas $X=\lim_{t\to b}X_t$ istnieje i jest skończony p.n., ponadto $\mathbb{E}|X|<\infty$.*

Dowód. Dla ustalonego $\alpha<\beta$ na podstawie Lematu 4 mamy

$$\mathbb{E}D_{[a,b)\cap\mathbb{Q}}(X_t,[\alpha,\beta])\leqslant\frac{1}{\beta-\alpha}\sup_{t\in[a,b)}\mathbb{E}(X_t-\beta)^+<\infty,$$

zatem $\mathbb{P}(D_{[a,b)\cap\mathbb{Q}}(X_t,[\alpha,\beta])=\infty)=0$. Niech

$$A:=\bigcap_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q},\alpha<\beta}\{D_{[a,b)\cap\mathbb{Q}}(X_t,[\alpha,\beta])<\infty\},$$

wówczas $\mathbb{P}(A)=1$, bo A jest przecięciem przeliczalnej liczby zbiorów pełnej miary. Jeśli $\omega\in A$, to $D_{[a,b)\cap\mathbb{Q}}(X_t(\omega),[\alpha,\beta])<\infty$ dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha<\beta$, czyli na podstawie Lematu 3 granica $X(\omega):=\lim_{t\to b}X_t(\omega)$

istnieje (choć apriori może być nieskończona). Zauważmy, że $\mathbb{E}|X_t| = 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_t \leqslant 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_0$, zatem $\sup_{t\in[a,b)} \mathbb{E}|X_t| < \infty$. Z Lematu Fatou

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}\lim_{t\to b}|X_t| \leqslant \liminf_{t\to\infty}\mathbb{E}|X_t| \leqslant \sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty,$$

czyli zmienna X jest całkowalna, a więc w szczególności skończona p.n.. $\square$

Wniosek 7. *Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest niedodatnim podmartyngałem (lub nieujemnym nadmartyngałem) o prawostronnie ciągłych trajektoriach, wówczas $X = \lim_{t\to\infty} X_t$ istnieje i jest skończony p.n., ponadto $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

6.3 Jednostajna całkowalność

Definicja 8. *Rodzinę zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$ nazywamy* jednostajnie całkowalną*, jeśli*

$$\lim_{C\to\infty}\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>C\}} = 0.$$

Fakt 9. *Rodzina zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki*
a) $\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i| < \infty$,
b) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\ \mathbb{P}(A) \leqslant \delta \Rightarrow \sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_A \leqslant \varepsilon$.

Dowód. $\Rightarrow$: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy C takie, że $\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>C\}} \leqslant \varepsilon/2$. Wówczas

$$\forall_{i\in I}\ \mathbb{E}|X_i| \leqslant C + \mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>C\}} \leqslant C + \varepsilon/2 < \infty$$

oraz, jeśli $\mathbb{P}(A) < \delta := \frac{\varepsilon}{2C}$, to

$$\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_A \leqslant C\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>C\}} \leqslant C\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Niech $\alpha := \sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|$ oraz $\delta > 0$ będzie takie, że $\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_A \leqslant \varepsilon$ dla $\mathbb{P}(A) \leqslant \delta$. Wówczas, jeśli $C = \alpha/\delta$, to $\mathbb{P}(|X_i| > C) < \alpha/C = \delta$ dla dowolnego $i \in I$, czyli $\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>C\}} \leqslant \varepsilon$. $\square$

Przykłady rodzin jednostajnie całkowalnych

1. Rodzina jednoelementowa $\{Y\}$ taka, że $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

Istotnie $\lim_{C\to\infty}\mathbb{E}|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|>C\}} = 0$.

2. Rodzina wspólnie ograniczona przez zmienną całkowalną tzn. rodzina $(X_i)_{i\in I}$ taka, że $\forall_{i\in I}|X_i| \leqslant Y$ oraz $\mathbb{E}Y < \infty$.

Wynika to z Faktu 9, poprzedniego przykładu i oczywistej obserwację $\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{E}|Y|\mathbb{1}_A$.

3. Rodzina uśrednień ustalonej całkowalnej zmiennej losowej, tzn. rodzina postaci $(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_i))_{i\in I}$, gdzie $\mathbb{E}|X| < \infty$, zaś $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ dowolna rodzina σ-podciał $\mathcal{F}$.

Na podstawie nierówności Jensena $\mathbb{E}|X_i| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_i)| \leqslant \mathbb{E}|X|$, a zatem

$$\mathbb{P}(|X_i| \geqslant C) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X_i|}{C} \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|}{C} \leqslant \delta \text{ dla } C \geqslant \frac{\mathbb{E}|X|}{\delta}.$$

Zbiór $\{|X_i| > C\} \in \mathcal{F}_i$, więc z nierówności Jensena

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>C\}} &= \mathbb{E}|\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{|X_i|>C\}}|\mathcal{F}_i)| \leqslant \mathbb{E}\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{\{|X_i|>C\}}|\mathcal{F}_i)\\ &\leqslant \mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{\{|X_i|>C\}}) \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

jeśli tylko dobierzemy odpowiednio małe δ korzystając z jednostajnej całkowalności $\{|X|\}$.

Fakt 10. *Załóżmy, że $1 \leqslant p < \infty$, a X_n są zmiennymi losowymi takimi, że rodzina $(|X_n|^p)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie całkowalna. Wówczas X_n zbiega do zmiennej X w L_p wtedy i tylko wtedy, gdy X_n zbiega do X według prawdopodobieństwa.*

Dowód. Wystarczy udowodnić, że zbieżność X_n według prawdopodobieństwa implikuje zbieżność w L_p, bo przeciwna implikacja jest zawsze prawdziwa. Załóżmy więc, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, wówczas dla pewnego podciągu n_k, X_{n_k} zbiega do X p.n., stąd na mocy Lematu Fatou

$$\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E}\lim|X_{n_k}|^p \leqslant \liminf \mathbb{E}|X_{n_k}|^p \leqslant \sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty.$$

Zatem rodzina $\{|X_n|^p \colon n = 1, 2, \ldots\} \cup \{|X|^p\}$ jest jednostajnie całkowalna. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ tak by dla $\mathbb{P}(A) < \delta$ zachodziło $\mathbb{E}|X_n|^p\mathbb{1}_A \leqslant \varepsilon$ oraz $\mathbb{E}|X|^p\mathbb{1}_A \leqslant \varepsilon$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_n - X|^p &\leqslant \varepsilon^p + \mathbb{E}|X_n - X|^p\mathbb{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}\\ &\leqslant \varepsilon^p + 2^p\mathbb{E}|X_n|^p\mathbb{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}} + 2^p\mathbb{E}|X|^p\mathbb{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}},\end{aligned}$$

a ponieważ $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, więc $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \delta$ dla dużych n, czyli

$$\mathbb{E}|X_n - X|^p \leqslant \varepsilon^p + 2^{p+1}\varepsilon \text{ dla dostatecznie dużych } n.$$

$\square$

Wniosek 11. *Jeśli rodzina $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie całkowalna oraz X_n zbiega prawie na pewno do zmiennej X, to $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \mathbb{1}_A = \mathbb{E}X\mathbb{1}_A$ dla wszystkich zdarzeń A.*

Dowód. Stosujemy Fakt 10 i oczywiste szacowanie $|\mathbb{E}X_n\mathbb{1}_A - \mathbb{E}X\mathbb{1}_A| \leqslant \mathbb{E}|X_n - X|$. □

Jesteśmy teraz gotowi do dowodu ciągłej wersji Lematu 7.

Twierdzenie 12. *a) Załóżmy, że T jest przedziałem, a $(X_t)_{t\in T}$ martyngałem prawostronnie ciągłym, zaś σ i τ czasami zatrzymania takimi, że $\sigma \leqslant \tau \leqslant t_{\max}$ oraz $t_{\max} \in T$. Wówczas $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ p.n..*
b) Jeśli $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant\infty}$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem z ostatnim elementem X_∞ to dla dowolnych dwu czasów zatrzymania $\sigma \leqslant \tau$, $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ p.n.

Dowód. Udowodnimy część a) (część b) można za pomocą zmiany czasu sprowadzić do a)). Zdefiniujmy

$$\tau_n(\omega) := \begin{cases} t_{\max} - \frac{k}{n} & \text{dla } \tau(\omega) \in (t_{\max} - \frac{k+1}{n}, t_{\max} - \frac{k}{n}], k = 0, 1, \ldots, n^2 \\ t_{\max} - n & \text{dla } \tau(\omega) \leqslant t_{\max} - n \end{cases}$$

oraz

$$\sigma_n(\omega) := \begin{cases} t_{\max} - \frac{k}{n} & \text{dla } \sigma(\omega) \in (t_{\max} - \frac{k+1}{n}, t_{\max} - \frac{k}{n}], k = 0, 1, \ldots, n^2 \\ t_{\max} - n & \text{dla } \sigma(\omega) \leqslant t_{\max} - n \end{cases}.$$

Wówczas $\sigma_n \leqslant \tau_n \leqslant t_{\max}$ są ograniczonymi czasami zatrzymania przyjmującymi jedynie skończenie wiele wartości. Zatem na mocy Lematu 7 mamy $\mathbb{E}(X_{\tau_n}|\mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}$ p.n., $\mathbb{E}(X_{t_{\max}}|\mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}$ p.n. oraz $\mathbb{E}(X_{t_{\max}}|\mathcal{F}_{\tau_n}) = X_{\tau_n}$ p.n., w szczególności więc rodziny $(X_{\tau_n})_{n=1}^{\infty}$ oraz $(X_{\sigma_n})_{n=1}^{\infty}$ są jednostajnie całkowalne. Ponieważ $\tau_n \to \tau+$ oraz $\sigma_n \to \sigma+$, więc z prawostronnej ciągłości X oraz Faktu 10 $X_{\tau_n} \to X_\tau$, $X_{\sigma_n} \to X_\sigma$ p.n. i w L_1. Weźmy $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$, wówczas

$$\mathbb{E}X_\tau\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{\tau_n}\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{\sigma_n}\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_\sigma\mathbb{1}_A,$$

co oznacza, że $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ p.n.. □

Wniosek 13. *Załóżmy, że T jest przedziałem, a $(M_t)_{t\in T}$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Wówczas dla dowolnego momentu zatrzymania τ proces $M^\tau = (M_{\tau\wedge t})_{t\in T}$ jest martyngałem zarówno względem $(\mathcal{F}_{\tau\wedge t})_{t\in T}$, jak i $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.*

Dowód. Niech $s < t$ oraz $s,t \in T$, wówczas $\tau \wedge s \leqslant \tau \wedge t \leqslant t$, więc z Twierdzenia 12 mamy $\mathbb{E}(M_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_{\tau\wedge s}) = M_{\tau\wedge s}$ p.n., czyli $(M_{\tau\wedge t}, \mathcal{F}_{\tau\wedge t})_{t\in T}$ jest martyngałem.

By udowodnić drugą część ustalmy $s < t$ oraz $A \in \mathcal{F}_s$. Nietrudno sprawdzić, że $A\cap\{\tau > s\} \in \mathcal{F}_{\tau\wedge s}$, zatem z poprzednio udowodnionej części wniosku mamy

$$\mathbb{E}M_{\tau\wedge t}\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}} = \mathbb{E}M_{\tau\wedge s}\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}}.$$

Ponadto

$$\mathbb{E}M_{\tau\wedge t}\mathbb{1}_{A\cap\{\tau\leqslant s\}} = \mathbb{E}M_{\tau}\mathbb{1}_{A\cap\{\tau\leqslant s\}} = \mathbb{E}M_{\tau\wedge s}\mathbb{1}_{A\cap\{\tau\leqslant s\}}.$$

Dodając powyższe tożsamości stronami otrzymujemy $\mathbb{E}M_{\tau\wedge t}\mathbb{1}_A = \mathbb{E}M_{\tau\wedge s}\mathbb{1}_A$ dla $A \in \mathcal{F}_s$, zatem $(M_{\tau\wedge t}, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest martyngałem. □

6.4 Zbieżność martyngałów w L_p

Zacznijmy od warunków zbieżności martyngałów z czasem ciągłym w L_1.

Twierdzenie 14. *Załóżmy, że $(X_t)_{t\in[a,b)}$, $b \leqslant \infty$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
a) Rodzina $(X_t)_{t\in[a,b)}$ jest jednostajnie całkowalna.
b) Istnieje całkowalna zmienna losowa X_b taka, że X_t zbiega do X_b w L_1 tzn. $\lim_{t\to b}\mathbb{E}|X_t - X_b| = 0$.
c) Istnieje całkowalna zmienna losowa X_b mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{F}_b := \sigma(\bigcup_{t\in[a,b)}\mathcal{F}_t)$ taka, że $X_t = \mathbb{E}(X_b|\mathcal{F}_t)$ dla $t \in [a,b)$.
W przypadku, gdy zachodzą warunki (a)-(c), to $X_b = \lim_{t\to b} X_t$ p.n..

Dowód. a)⇒b): X_t jest jednostajnie całkowalny, więc $\sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty$, czyli wobec Twierdzenia 6 istnieje zmienna całkowalna X_b taka, że $X_t \to X_b$ p.n. przy $t \to b$. Z jednostajnej całkowalności i Lematu 10 wynika zbieżność w L_1.

b)⇒c): Dla pewnego podciągu $t_k \to b$, $X_{t_k} \to X_b$ p.n., stąd możemy zakładać, że zmienna X_b jest $\mathcal{F}_b$ mierzalna. Ustalmy t i $A \in \mathcal{F}_t$, wówczas dla $s \geqslant t$

$$\mathbb{E}X_t\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_s\mathbb{1}_A \to \mathbb{E}X_b\mathbb{1}_A,\ s \to \infty.$$

Zatem $X_t = \mathbb{E}(X_b|\mathcal{F}_t)$ p.n..

c)⇒a) wiemy, że rodzina uśrednień ustalonej zmiennej jest jednostajnie całkowalna.

Ostatnia część twiedzenia wynika z dowodu implikacji a)⇒b). □

Twierdzenie 15. *Załóżmy, że* $(X_t)_{t\in[a,b)}$ *jest prawostronnie ciągłym martyngałem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
a) $\sup_{t\in[a,b)} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty$.
b) Rodzina $(|X_t|^p)_{t\in[a,b)}$ *jest jednostajnie całkowalna.*
c) Istnieje zmienna losowa $X_b \in L_p$ *taka, że* X_t *zbiega do* X_b *w* L_p *tzn.* $\lim_{t\to b} \mathbb{E}|X_t - X_b|^p = 0$.
d) Istnieje losowa $X_b \in L_p$ *mierzalna względem* $\mathcal{F}_b := \sigma(\bigcup_{t\in[a,b)} \mathcal{F}_t)$ *taka, że* $X_t = \mathbb{E}(X_b|\mathcal{F}_t)$ *dla* $t \in [a,b)$.
W przypadku, gdy zachodzą warunki (a)-(d), to $X_b = \lim_{t\to b} X_t$ *p.n..*

Dowód. a)⇒b): Na podstawie Twierdzenia 11 wiemy, że $\mathbb{E}\sup_{t\in[a,b)} |X_t|^p \leqslant (\frac{p}{p-1})^p \sup_{t\in[a,b)} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty$. Pozostałe implikacje dowodzimy jak w dowodzie Twierdzenia 14. □

6.5 *Regularność trajektorii

W wielu twierdzeniach zakłada się, iż (X_t) jest prawostronnie ciągłym podmartyngałem. Oczywiście modyfikacja podmartyngału jest podmartyngałem – problem jest tylko z mierzalnością, ale znika on, gdy filtracja spełnia zwykłe warunki. Naturalnie jest więc zapytać kiedy dany podmartyngał możemy zmodyfikować tak, by stał się prawostronnie ciągły.

Następny lemat jest prostą modyfikacją Lematu 2, więc przytoczymy go bez dowodu.

Lemat 16. *Jeśli* $f\colon [a,b]\cap\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ograniczoną taką, że dla dowolnych liczb wymiernych* $\alpha < \beta$, $D_{[a,b]\cap\mathbb{Q}}(f,[\alpha,\beta]) < \infty$, *to granice*

$$\forall_{t\in[a,b)}\ f(t+) := \lim_{s\to t+, s\in\mathbb{Q}} f(s) \ \text{i}\ \forall_{t\in(a,b]}\ f(t-) := \lim_{s\to t-, s\in\mathbb{Q}} f(s)$$

istnieją i są skończone.

Będziemy też wykorzystywać prosty fakt.

Fakt 17. *Załóżmy, że* $(X_n)_{n\leqslant 0}$ *jest podmartyngałem z czasem odwróconym o wartościach średnich ograniczonych z dołu, tzn.* $a := \lim_{n\to-\infty} \mathbb{E}X_n > -\infty$. *Wówczas rodzina* $(X_n)_{n\leqslant 0}$ *jest jednostajnie całkowalna.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy k takie, że $\mathbb{E}X_k \leqslant a + \varepsilon/2$, wówczas $\mathbb{E}X_k - \varepsilon/2 \leqslant \mathbb{E}X_n \leqslant \mathbb{E}X_k$ dla $n \leqslant k$. Zatem dla takich n, z własności podmartyngału

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>C\}} &= \mathbb{E}X_n\mathbb{1}_{\{X_n>C\}} - \mathbb{E}X_n\mathbb{1}_{\{X_n<-C\}} \\
&= \mathbb{E}X_n\mathbb{1}_{\{X_n>C\}} + \mathbb{E}X_n\mathbb{1}_{\{X_n\geqslant -C\}} - \mathbb{E}X_n \\
&\leqslant \mathbb{E}X_k\mathbb{1}_{\{X_n>C\}} + \mathbb{E}X_k\mathbb{1}_{\{X_n\geqslant -C\}} - \mathbb{E}X_k + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \mathbb{E}X_k\mathbb{1}_{\{X_n>C\}} - \mathbb{E}X_k\mathbb{1}_{\{X_n<-C\}} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mathbb{E}|X_k|\mathbb{1}_{\{|X_n|>C\}} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Mamy $\mathbb{E}|X_n| = 2\mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n \leqslant 2\mathbb{E}X_0^+ - a$, więc $\alpha := \sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Zatem

$$
\mathbb{P}(|X_n| > C) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X_n|}{C} \leqslant \frac{\alpha}{C} \text{ dla } C := \frac{\alpha}{\delta},
$$

czyli, wobec jednostajnej całkowalności rodziny jednoelementowej, dla odpowiednio małego $\delta > 0$, $\mathbb{E}|X_k|\mathbb{1}_{\{|X_n|>C\}} \leqslant \varepsilon/2$, a więc $\mathbb{E}|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>C\}} \leqslant \varepsilon$ dla $n \leqslant k$ i odpowiednio dużego C. Ponieważ rodzina $\{X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_0\}$ jest skończona, a zatem i jednostajnie całkowalna, więc dla dużych C i wszystkich $n \leqslant 0$, $\mathbb{E}|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>C\}} \leqslant \varepsilon$. □

Twierdzenie 18. *Załóżmy, że T jest przedziałem, a $(X_t)_{t\in T}$ podmartyngałem (lub nadmartyngałem). Wówczas istnieje zbiór A taki, że $\mathbb{P}(A) = 1$ oraz dla wszystkich $\omega \in A$ i $t \in T$ poza odpowiednio lewym i prawym końcami T granice*

$$
X_{t+}(\omega) = \lim_{s\to t+, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ oraz } X_{t-}(\omega) = \lim_{s\to t-, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)
$$

istnieją i są skończone.

Dowód. Bez straty ogólności możemy zakładać, że X_t jest podmartyngałem. Ponieważ możemy znaleźć niemalejący ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$ taki, że $T = \bigcup_n [a_n, b_n]$, więc dowód wystarczy przeprowadzić w przypadku $T = [a, b]$. Zauważmy, że

$$
\sup_{t\in[a,b]}]Ex(X_t - \beta)^+ = \mathbb{E}(X_b - \beta)^+ < \infty,
$$

zatem z Lematu 4 dostajemy

$$
\forall_{\alpha<\beta}\ \mathbb{P}(D_{[a,b]\cap\mathbb{Q}}(X_t, [\alpha, \beta]) = \infty) = 0.
$$

Ponadto, na mocy Lematu 9, dla dowolnego $\lambda > 0$

$$
\lambda\mathbb{P}(\sup_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} X_t \geqslant \lambda) \leqslant \sup_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} \mathbb{E}X_t^+ = \mathbb{E}X_b^+ < \infty
$$

oraz

$$\lambda\mathbb{P}(\inf_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} X_t \leqslant -\lambda) \leqslant \sup_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} \mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_a = \mathbb{E}X_b^+ - \mathbb{E}X_a < \infty.$$

Stąd

$$\mathbb{P}(-\infty < \inf_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} X_t \leqslant \sup_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} X_t < \infty) = 1.$$

Niech

$$A := \bigcap_{\alpha,beta\in\mathbb{Q},\alpha<\beta} \{D_{[a,b]\cap\mathbb{Q}}(X_n,[\alpha,\beta]) < \infty\} \cap \{\sup_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} |X_t| < \infty\},$$

wtedy $\mathbb{P}(A) = 1$. By wykazać, że zbiór A ma postulowane własności wystarczy skorzystać z Lematu 16. $\square$

Definicja 19. *Funkcję $f\colon T \to \mathbb{R}$ określoną na przedziale T nazywamy* PCLG *(często również używa się pochodzącej z francuskiego nazwy* cadlag*) jeśli jest prawostronnie ciągła i w każdym punkcie T (poza ewentualnie lewym końcem) ma skończone lewostronne granice.*

Twierdzenie 20. *Załóżmy, że T jest przedziałem, a $X = (X_t)_{t\in T}$ jest podmartyngałem (odp. nadmartyngałem) względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ spełniającej zwykłe warunki. Wówczas X ma prawostronnie ciągłą modyfikację wtedy i tylko wtedy gdy funkcja $t \to \mathbb{E}X_t$ jest prawostronnie ciągła. Co więcej, jeśli taka modyfikacja istnieje, to istnieje również modyfikacja PCLG i $\mathcal{F}_t$-adaptowalna będąca podmartyngałem (odp. nadmartyngałem) względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.*

Dowód. $\Leftarrow$ Wystarczy rozpatrzeć przypadek podmartyngału oraz $T = [a,b]$. Na mocy Twierdzenia 18 istnieje A takie, że $\mathbb{P}(A) = 1$ oraz dla wszystkich $\omega \in A$ granice $\lim_{s\to t+,s\in\mathbb{Q}} X_s$, $t \in [a,b)$ oraz $\lim_{s\to t-,s\in\mathbb{Q}} X_s$, $t \in (a,b]$ istnieją i są skończone. Połóżmy

$$X_{t+}(\omega) := \begin{cases} \lim_{s\to t+,s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

Niech $t_n \searrow t+$, ponieważ $\mathbb{E}X_{t_n} \geqslant \mathbb{E}X_a$, więc $(X_{t_n})_n$ jest jednostajnie całkowalny jako podmartyngał z czasem odwróconym (Fakt 17). Weźmy $A \in \mathcal{F}_t$, wówczas

$$\mathbb{E}X_t \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{E}X_{t_n}\mathbb{1}_A \to \mathbb{E}X_{t+}\mathbb{1}_A \text{ przy } n \to \infty,$$

stąd $X_{t+} = \mathbb{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t) \geqslant X_t$ p.n.. Co więcej

$$\mathbb{E}(X_{t+} - X_t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{t_n} - \mathbb{E}X_t = 0$$

na mocy prawostronnej ciągłości $t \to \mathbb{E}X_t$, czyli $X_{t+} = X_t$ p.n., a zatem X_{t+} jest szukaną modyfikacją X.

$\Rightarrow$: Zauważmy, że jeśli X_t prawostronnie ciągły, to $X_{t+} = X_t$, biorąc $t_n \searrow t+$ i wykorzystując jednostajną całkowalność $(X_{t_n})_n$ (Fakt 17) dostajemy $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_{t+} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{t_n}$. $\square$

7 Całka Stieltjesa

Podstawowy problem jakim się zajmiemy podczas najbliższych wykładów polega na ścisłym zdefiniowaniu całek $\int_0^t f(s)dW_s$, $\int_0^t X_s dW_s$ lub ogólniej $\int_0^t X_s dY_s$, gdzie $f(s)$ jest „porządną" funkcją, a X_s, Y_s są „porządnymi" procesami stochastycznymi.

Najprostsze podejście polega na zdefiniowaniu osobno całki dla każdej trajektorii, tzn. określeniu dla ustalonego $\omega \in \Omega$, $\int_0^s Y_s(\omega)dX_s(\omega)$. Sposób takiej konstrukcji daje całka Stieltjesa, uogólniająca całkę Riemanna.

7.1 Całka Riemanna-Stieltjesa

W tej części podamy tylko podstawowe fakty i definicje, bez dowodów. Więcej informacji oraz kompletne dowody można znaleźć w [4, 5] i [2].

Definicja 1. Podziałem przedziału $[a, b]$ *nazywamy niemalejący ciąg liczb* $\Pi = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ *taki, że* $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = b$. Średnicę *podziału* Π *definiujemy wzorem* $\operatorname{diam}(\Pi) := \max_i |t_{i+1} - t_i|$.
Mówimy, że podział Π' *jest* podpodziałem Π *(ozn.* $\Pi' \prec \Pi$*) jeśli wszystkie punkty* Π *są punktami* Π'.
Ciąg $\Pi^n = (t_0^n, \ldots, t_{k_n}^n)$ *nazywamy* normalnym ciągiem podziałów*, jeśli* $\operatorname{diam}(\Pi^n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *oraz* $\Pi^{n+1} \prec \Pi^n$.

Definicja 2. *Niech* $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. *Powiemy że* $\int_a^b g\,df$ *istnieje oraz, że* g *jest* całkowalna względem f, *jeśli dla dowolnego normalnego ciągu podziałów* $\Pi^n = (t_0^n, \ldots, t_{k_n}^n)$ *oraz punktów* $s_0^n, \ldots, s_{k_n-1}^n$ *takich, że* $t_j^k \leqslant s_j^k \leqslant t_{j+1}^k$ *istnieje skończona granica*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} g(s_{j-1}^k)[f(t_j^k) - f(t_{j-1}^k)],$$

która nie zależy od wybranego ciągu punktów i podziałów. Granicę tą oznaczamy $\int_a^b g(t)\,df(t)$ *i nazywamy* całką Riemanna-Stjeltjesa.

Uwaga 3. Można udowodnić, że całka $\int_a^b g\,df$ istnieje oraz jest równa S, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego podziału $\Pi^n = (t_0^n, \ldots, t_{k_n}^n)$ o średnicy nie większej niż δ oraz punktów $s_0^n, \ldots, s_{k_n-1}^n$ takich, że $t_j^k \leqslant s_j^k \leqslant t_{j+1}^k$,

$$\Big|S - \sum_{j=1}^{k_n} g(s_{j-1}^k)[f(t_j^k) - f(t_{j-1}^k)]\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Uwaga 4. i) W przypadku $f(t) = t$ całka Riemanna-Stieltjesa jest całką Riemanna.
ii) Jeśli $f \in C^1[a,b]$, to $f(t_{j+1}^n) - f(t_j^n) = f'(\Theta_j^n)$ dla pewnego $t_j^{n+1} \leqslant \Theta_j^n \leqslant t_j^n$, stąd można prosto udowodnić, że w tym przypadku $\int_a^b g(t)\,df(t) = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt$.

Wprost z definicji natychmiast wynika.

Fakt 5. *i) Jeśli g_1 i g_2 są całkowalne względem f, to dla dowolnych liczb c_1 i c_2 funkcja $c_1g_1 + c_2g_2$ jest całkowalna względem f oraz*

$$\int_a^b (c_1g_1 + c_2g_2)df = c_1 \int_a^b g_1 df + c_2 \int_a^b g_2 df.$$

ii) Jeśli g jest całkowalna względem f_1 i f_2, to dla dowolnych liczb c_1 i c_2, g jest całkowalna względem $c_1f_1 + c_2f_2$ oraz

$$\int_a^b g d(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1 \int_a^b g df_1 + c_2 \int_a^b g df_2.$$

Uwaga 6. Może się zdarzyć, że dla $a < b < c$ całki $\int_a^b gdf$ i $\int_b^c gdf$ istnieją, a całka $\int_a^c gdf$ nie istnieje. Jeśli jednak wszystkie trzy całki istnieją, to $\int_a^c gdf = \int_a^b gdf + \int_b^c gdf$.

Oczywiście naturalnie jest zapytać dla jakich funkcji f i g istnieje całka $\int gdf$. By odpowiedzieć na to pytanie musimy zdefiniować funkcje o wahaniu skończonym.

Definicja 7. *Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, to liczbę*

$$\mathrm{Wah}_{[a,b]}(f)\colon = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{a=t_0<\ldots<t_n=b} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

nazywamy wahaniem funkcji f w przedziale $[a,b]$. *Mówimy, że f* ma wahanie skończone na $[a,b]$, *jeśli* $\mathrm{Wah}_{[a,b]}(f) < \infty$.

Oczywiście $0 \leqslant \mathrm{Wah}_{[a,b]}(f) \leqslant \infty$ Wahanie jest addytywną funkcją przedziału, tzn. $\mathrm{Wah}_{[a,c]}(f) = \mathrm{Wah}_{[a,b]}(f) + \mathrm{Wah}_{[b,c]}(f)$ dla $a < b < c$.

Przykłady.
Funkcje lipschitzowskie, funkcje monotoniczne mają wahanie skończone na ograniczonych przedziałach.
Kombinacja liniowa funkcji o wahaniu skończonym ma wahanie skończone.
Funkcja $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ oraz $f(0) = 0$ jest ciągła, ale nie ma wahania skończonego na $[0, 1]$.

Twierdzenie 8. *Jeżeli $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, przy czym g jest ciągła, a f ma wahanie skończone, to $\int_a^b g\, df$ istnieje.*

Twierdzenie to można odwrócić.

Twierdzenie 9. *Jeśli całka Riemanna-Stieltjesa $\int_a^b gdf$ istnieje dla dowolnej funkcji ciągłej g, to funkcja f ma wahanie skończone na $[a, b]$.*

7.2 Całka Lebesgue'a-Stieltjesa

Fakt 10. *Jeśli f ma wahanie skończone na $[a, b]$, to istnieją funkcje niemalejące f_1, f_2 takie, że $f_1(a) = f_2(a) = 0$ oraz $f(t) = f(a) + f_1(t) - f_2(t)$. Co więcej f ma w każdym punkcie granice jednostrone. Ponadto jeśli f jest ciągła (odp. prawostronnie ciągła), to f_1 i f_2 można wybrać ciągłe (odp. prawostronnie ciągłe).*

Szkic dowodu. Określamy $f_1(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{Wah}_{[a,t]}(f) + f(t) - f(a))$ oraz $f_2(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{Wah}_{[a,t]}(f) - f(t) + f(a))$. □

Definicja 11. *Załóżmy, że f jest prawostronnie ciągłą funkcją na $[a, b]$ o wahaniu skończonym. Niech f_1 i f_2 będą prawostronnie ciągłymi funkcjami niemalejącymi takimi, że $f_1(a) = f_2(a) = 0$ oraz $f(t) = f(a) + f_1(t) - f_2(t)$. Istnieją wtedy skończone miary borelowskie μ_1 i μ_2 na $[a, b]$ takie, że $\mu_i[a, t] = f_i(t)$ dla $i = 1, 2$. Dla ograniczonych funkcji mierzalnych g na $[a, b]$ określamy* całkę Lebesgue'a-Stieltjesa *g względem f wzorem*

$$\int_{[a,b]} gdf = \int gd\mu_1 - \int gd\mu_2.$$

Uwaga 12. Można wykazać, że dla funkcji ciągłych g całki Riemanna-Stieltjesa i Lebesgue'a-Stieltjesa g względem f są sobie równe.

7.3 Nieskończone wahanie ciągłych martyngałów

Niestety proces Wienera ma z prawdopodobieństwem jeden nieskończone wahanie na każdym przedziale. Prawdziwy jest znacznie ogólniejszy fakt.

Twierdzenie 13. *Załóżmy, że* $(M_t)_{t\in[a,b]}$ *jest ciągłym martyngałem oraz* $A = \{\omega\colon M_t(\omega)$ *ma wahanie skończone na [a,b]*$\}$*. Wówczas* M_t *ma z prawdopodobieństwem 1 trajektorie stałe na* A*, tzn.*

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in[a,b]}\ M_t\mathbb{1}_A = M_a\mathbb{1}_A) = 1.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że $\mathrm{Wah}_{[a,b]}(M_t) \leqslant C$ oraz $\sup_{t\in[a,b]}|M_t| \leqslant C$. Ustalmy $0 \leqslant u \leqslant b-a$ i rozpatrzmy zmienne losowe

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1}(M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n})^2.$$

Zauważmy, że dla $s < t$,

$$\mathbb{E}M_sM_t = \mathbb{E}\mathbb{E}(M_sM_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_s\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}M_s^2,$$

stąd

$$\mathbb{E}X_n = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}(M^2_{a+(k+1)u/n} - M^2_{a+ku/n}) = \mathbb{E}M^2_{a+u} - \mathbb{E}M^2_a.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}|X_n| &\leqslant \sup_{0\leqslant k\leqslant n-1}|M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n}|\sum_{k=0}^{n-1}|M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n}| \\ &\leqslant \sup_{|s-t|\leqslant u/n}|M_t - M_s|\mathrm{Wah}_{[a,b]}(M_t),\end{aligned}$$

stąd $|X_n| \leqslant 2C^2$ oraz, z ciągłości M, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$. Zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_n = 0$, czyli $\mathbb{E}M^2_{a+u} = \mathbb{E}M^2_a$. Zauważmy jednak, że

$$\begin{aligned}\mathbb{E}M^2_{a+u} &= \mathbb{E}\mathbb{E}((M_a + (M_{a+u} - M_a))^2|\mathcal{F}_a) \\ &= \mathbb{E}M_a^2 + \mathbb{E}(M_{a+u} - M_a)^2 + 2\mathbb{E}[M_a\mathbb{E}((M_{a+u} - M_a)\mathcal{F}_a) \\ &= \mathbb{E}M_a^2 + \mathbb{E}(M_{a+u} - M_a)^2.\end{aligned}$$

Stąd $M_{a+u} = M_a$ p.n., czyli $M_t = M_a$ p.n dla dowolnego $t \in [a,b]$. Z ciągłości M wynika, że $\mathbb{P}(\forall_t\ M_t = M_a) = 1$.

W przypadku ogólnym zdefiniujmy ciąg czasów zatrzymania

$$\tau_n = \inf\{t \geqslant a\colon \sup_{a\leqslant s\leqslant t} |M_s| \geqslant n\} \wedge \inf\{t \geqslant a\colon \mathrm{Wah}_{[0,t]} \geqslant n\},$$

wówczas martyngał M^{τ_n} spełnia założenia pierwszej części dowodu (z $C = n$), więc M^{τ_n} ma stałe trajektorie p.n.. Wystarczy zauważyć, że dla $\omega \in A$, $\tau_n(\omega) = \infty$ dla dostatecznie dużych n. □

8 Całka izometryczna względem procesu Wienera

Podczas kolejnych wykładów zdefiniujemy całkę względem procesu Wienera - zaczniemy od całkowania funkcji deterministycznych, by później przejść do konstrukcji izometrycznej całki stochastycznej Ito.

Konstrukcja całki stochastycznej ma pewne podobieństwa do konstrukcji całki Lebesgue'a. Najpierw określa się, w naturalny sposób, całki najprostszych funkcji/procesów (funkcje schodkowe, procesy elementarne), później pokazuje się własności tak określonej całki (oparte na liczeniu drugich momentów), które pozwalają uogólnić definicję na bardziej złożone funkcje/procesy.

Należy zwrócić uwagę, że całkę stochastyczną definiujemy globalnie na całej przestrzeni probabilistycznej, a nie dla każdej trajektorii z osobna.

Dla uproszczenia notacji będziemy definiowali całki $\int_0^t X_s dW_s$. Całkę $\int_u^t X_s dW_s$ dla $0 < u < t$ można wówczas określić na kilka sposobów - albo w naturalny sposób uogólniając odpowiednie definicje albo np. jako całkę $\int_0^t X_s \mathbb{1}_{[u,\infty)}(s) dW_s$.

Będziemy zakładać, że $0 < T \leqslant \infty$ oraz $\mathcal{F}_t$ jest filtracją spełniającą zwykłe warunki taką, że W_t jest $\mathcal{F}_t$ mierzalne oraz $W_s - W_t$ jest niezależne od $\mathcal{F}_t$ dla $s \geqslant t$ (za $\mathcal{F}_t$ można przyjąć uzupełnienie $\mathcal{F}^W_{t+}$).

8.1 Całka Paleya-Wienera

Definiowanie całki stochastycznej względem procesu Wienera zaczniemy od najprostszego przypadku funkcji deterministycznych.

Dla funkcji schodkowej postaci

$$h = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{(t_{i-1},t_i]}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t,\ \alpha_i \in \mathbb{R},$$

określamy

$$I(h) = \int_0^t h(s)\, dW_s := \sum_{i=1}^k \alpha_i (W(t_i) - W(t_{i-1})).$$

Z podstawowych własności procesu Wienera natychmiast otrzymujemy następujące własności przekształcenia I:

Fakt 1. *Przy powyżej wprowadzonych oznaczeniach mamy*
i) $\mathbb{E}I(h) = 0$,
ii) $\mathbb{E}I(h)^2 = \int_0^t h^2(s)\,ds$,
iii) $I(h)$ *ma rozkład normalny* $\mathcal{N}(0, \int_0^t h^2(s)\,ds)$,
iii) $I(c_1 h_1 + c_2 h_2) = c_1 I(h_1) + c_2 I(h_2)$ *dla* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Oznaczając przez E_1 zbiór funkcji schodkowych na $[a,b]$ widzimy, że przekształcenie I definiuje liniową izometrię $L_2([0,t]) \supset E_1 \to L_2(\Omega)$. Ponieważ funkcje schodkowe są gęste w L_2 izometrię w jednoznaczny sposób możemy rozszerzyć na całe $L_2([0,t])$.

Definicja 2. *Rozszerzenie powyższej izometrii do izometrii na* $L_2([0,t])$ *nazywamy całką Paleya-Wienera z funkcji* h *i oznaczamy* $\int_0^t h(s)\,dW_s$.

Fakt 3. *Dla dowolnej funkcji* $h \in L_2([0,t])$,
i) $\mathbb{E}(\int_0^t h(s)\,dW_s) = 0$,
ii) $\mathrm{Var}(\int_0^t h(s)\,dW_s) = \mathbb{E}(\int_0^t h(s)\,dW_s)^2 = \int_0^t h^2(s)\,ds$,
iii) $\int_0^t h(s)\,dW_s$ *ma rozkład normalny* $\mathcal{N}(0, \int_0^t h^2(s)\,ds)$.

Można też udowodnić następujące proste własności całki Paleya-Wienera

Fakt 4. *i) Jeżeli* $h \in C^1([0,t])$, *to*

$$\int_0^t h(s)\,dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s)W_s\,ds.$$

Ponadto dla dowolnego $h \in L_2[0,t]$
ii) $\mathbb{E}|\int_0^t h(s)\,dW_s|^p = \mathbb{E}|W_1|^p (\int_0^t h^2(s)\,ds)^{p/2}$
oraz
iii) $\int_0^u h(s)dW_s = \int_0^t h(s)\mathbb{1}_{[0,u]}(s)ds$ *p.n. dla dowolnych* $0 < u < t$.

8.2 Procesy elementarne

Starając się przenieść konstrukcję Paleya-Wienera na przypadek całki z procesów, musimy określić stochastyczny odpowiednik funkcji schodkowych - są to tak zwane procesy elementarne.

Definicja 5. *Powiemy, że proces* $X = (X_t)_{t\in[0,T)}$ *należy do* $\mathcal{E}$ *- rodziny* procesów elementarnych *(* elementarnych procesów prognozowalnych*), jeśli* X *jest postaci*

$$X_t = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1} \mathbb{1}_{(t_{k-1},t_k]}(t), \tag{2}$$

gdzie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < T$*, zaś* ξ_k *są ograniczonymi zmiennymi losowymi,* $\mathcal{F}_{t_k}$*-mierzalnymi.*

Oczywiście $\mathcal{E}$ jest przestrzenią liniową.

Definicja 6. *Dla* $X \in \mathcal{E}$ *definiujemy proces*

$$I(X) = (I(X)_t)_{t\leqslant T} = \Big(\int_0^t X_s\,dW_s\Big)_{t\leqslant T}$$

wzorem

$$I(X)_t := \sum_{k=1}^{m} \xi_{k-1}(W_{t_k\wedge t} - W_{t_{k-1}\wedge t}).$$

Uwaga 7. Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od reprezentacji $X \in \mathcal{E}$.

Fakt 8. *Jeśli* X *jest procesem elementarnym, to* $I(X) = (\int_0^t X_s\,dW_s)_{t\leqslant T}$ *jest martyngałem względem* $(\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$*, o ciągłych trajektoriach takim, że* $I(X)_0 = 0$ *oraz*

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^T X_s\,dW_s\Big|^2 = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2\,ds.$$

Dowód. Przyjmijmy, że X_t jest postaci (2). Ciągłość trajektorii i $I(X)_0 = 0$ wynika natychmiast z określenia $I(X)$. Jeżeli $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, to zmienna

$$I(X)_t = \xi_0(W_{t_1} - W_{t_0}) + \xi_1(W_{t_2} - W_{t_1}) + \ldots + \xi_j(W_t - W_{t_j})$$

jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna. Ponadto $I(X)_t = I(X)_{t_m}$ dla $t_m \leqslant t \leqslant T$.

Sprawdzimy teraz, że $I(X)$ jest martyngałem, czyli dla $s < t \leqslant T$ mamy $\mathbb{E}(I(X)_t|\mathcal{F}_s) = I(X)_s$. Wystarczy pokazać to dla $t_j \leqslant s < t \leqslant t_{j+1}$, ale wtedy

$$\mathbb{E}(I(X)_t - I(X)_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_j(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s) = \xi_j\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = 0,$$

wykorzystujemy tu założenie, że ξ_j jest $\mathcal{F}_{t_j} \subset \mathcal{F}_s$ mierzalne. By zakończyć dowód liczymy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}I(X)_T^2\\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}[\xi_{k-1}^2(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2] + 2\sum_{j<k} \mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})]\\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Wykorzystując mierzalność ξ_j oraz niezależność przyrostów procesu Wienera mamy

$$I_1 = \sum_k \mathbb{E}[\xi_{k-1}^2 \mathbb{E}((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{k-1}})] = \sum_k \mathbb{E}\xi_{k-1}^2 (t_k - t_{k-1}) = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2\, ds$$

oraz

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\sum_{j<k} \mathbb{E}[(\xi_{k-1}\xi_{j-1}\mathbb{E}((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{k-1}})] \\ &= 2\sum_{j<k} \mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\mathbb{E}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}})] = 0, \end{aligned}$$

bo $\mathbb{E}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = 0$. □

Uwaga 9. Jedyne własności procesu Wienera jakie wykorzystywaliśmy w dowodzie, to $\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = 0$ oraz $\mathbb{E}((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$ dla $0 \leqslant s < t$. Własności te można formalnie wyprowadzić z faktu, że procesy (W_t) i $(W_t^2 - t)$ są martyngałami względem $(\mathcal{F}_t)$.

8.3 Martyngały ciągłe, całkowalne z kwadratem

Definicja 10. *Przez $\mathcal{M}_T^{2,c}$ oznaczamy przestrzeń martyngałów $M = (M_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ o trajektoriach ciągłych takich, że $\mathbb{E}M_T^2 < \infty$.*

Uwaga 11. i) Jeśli $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, to z nierówności Jensena wynika, że $\mathbb{E}M_t^2 \leqslant \mathbb{E}M_T^2 < \infty$, więc $(M_t^2)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest podmartyngałem.
ii) Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ można utożsamić z przestrzenią martyngałów ciągłych $(M_t)_{0\leqslant t<T}$ takich, że $\sup_{t<T}\mathbb{E}M_t^2 < \infty$. Możemy bowiem określić M_T jako granicę p.n. M_t przy $t \to T$ (zob. Twierdzenie 6.15 dla $p = 2$).
iii) Z nierówności Dooba wynika, że dla $M = (M_t) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$,

$$\mathbb{E}\sup_{t\leqslant T} M_t^2 \leqslant 4\mathbb{E}M_T^2.$$

Fakt 12. *Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest przestrzenią Hilberta (tzn. zupełną przestrzenią euklidesową) z iloczynem skalarnym*

$$(M,N) = (M,N)_T = \mathbb{E}M_T N_T, \quad M,N \in \mathcal{M}_T^{2,c}$$

oraz normą

$$\|M\|_T = \sqrt{(M,M)_T} = \sqrt{\mathbb{E}M_T^2} = \|M_T\|_{L_2(\Omega)}.$$

Uwaga 13. i) Przy rozważaniach dotyczących całki stochastycznej utożsamiamy procesy nieodróżnialne. Formalnie rzecz biorąc elementy $\mathcal{M}_T^{2,c}$ to klasy abstrakcji martyngałów ciągłych względem relacji nieodróżnialności.
ii) Przekształcenie $M \to M_T$ jest izometrycznym włożeniem przestrzeni $\mathcal{M}_T^{2,c}$ w $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dowód Faktu. Oczywiście $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest przestrzenią liniową, zaś (M, N) jest iloczynem skalarnym, bo jeśli $(M, M) = 0$, to $\mathbb{E}M_T^2 = 0$, czyli $M_T = 0$ p.n., co z własności martygału implikuje, że $M_t = 0$ p.n., więc z ciągłości M, $\mathbb{P}(\forall_{t\leqslant T}\ M_t = 0) = 1$.

Musimy jeszcze udowodnić zupełność. Niech $M^{(n)} = (M_t^{(n)}) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ będzie ciągiem Cauchy'ego, czyli

$$\|M^{(n)} - M^{(m)}\|_T^2 = \mathbb{E}(M_T^{(n)} - M_T^{(m)})^2 \to 0 \quad \text{dla } m, n \to \infty.$$

Wówczas $M_T^{(n)}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L_2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, zatem z zupełności L_2 istnieje całkowalna z kwadratem zmienna M_T taka, że $\mathbb{E}|M_T^{(n)} - M_T|^2 \to 0$ przy $n \to \infty$.

Możemy położyć $\tilde{M}_t := \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t)$, ale taka definicja nie gwarantuje ciągłości $\tilde{M}$. Udowodnimy, że można znaleźć martyngał M, który jest ciągłą modyfikację $\tilde{M}$.

Zauważmy, że na mocy nierówności Dooba,

$$\mathbb{E}\sup_{t\leqslant T}(M_t^{(n)} - M_t^{(m)})^2 \leqslant 4\mathbb{E}|M_T^{(n)} - M_T^{(m)}|^2,$$

więc możemy wybrać podciąg n_k taki, że

$$\forall_{l>k}\ \mathbb{E}\sup_{t\leqslant T}(M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_l)})^2 \leqslant 8^{-k}.$$

Wówczas

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\leqslant T}|M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_{k+1})}| \geqslant 2^{-k}\Big) \leqslant 2^{-k}.$$

Zatem, jeśli określimy

$$A_k := \{\sup_{t\leqslant T}|M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_{k+1})}| \geqslant 2^{-k}\},$$

to $\sum_k \mathbb{P}(A_k) < \infty$, czyli na mocy lematu Borela-Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 0$.

Jeśli $\omega \notin \limsup A_k$, to $\omega \notin A_k$ dla $k \geqslant k_0 = k_0(\omega)$, czyli $\sup_{t\leqslant T}|M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_{k+1})}| \leqslant 2^{-k}$ dla $k \geqslant k_0$. Ciąg $(M_t^{n_k}(\omega))_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest zatem zbieżny jednostajnie na $[0, T]$ do pewnej funkcji $M_t(\omega)$. Kładziemy dodatkowo $M(\omega) = 0$ dla $\omega \in \limsup A_k$.

Z ciągłości $M^{(n_k)}$ wynika ciągłość M. Ponieważ $M_T^{(n_k)} \to M_T$ w L^2 więc również w L^1, czyli $M_t^{(n_k)} = \mathbb{E}(M_T^{(n_k)}|\mathcal{F}_t) \to \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t)$ w L^1, a że $M_t^{(n_k)} \to M_t$ p.n., więc $M_t = \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t) = \tilde{M}_t$ p.n., czyli $(M_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest martyngałem ciągłym. □

8.4 Całka izometryczna Ito. Procesy prognozowalne

Każdemu procesowi elementarnemu X przyporządkowaliśmy martyngał ciągły $I(X)$, co więcej przekształcenie I

$$L_2([0,T]\times\Omega, \mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}, \lambda\otimes\mathbb{P}) \hookleftarrow \mathcal{E} \xrightarrow{I} \mathcal{M}_T^{2,c}$$

jest liniową izometrią. Przekształcenie I możemy więc rozszerzyć do liniowej izometrii (którą też będziemy oznaczać literą I) z $\overline{\mathcal{E}}$ w $\mathcal{M}_T^{2,c}$, gdzie $\overline{\mathcal{E}}$ oznacza domknięcie przestrzeni procesów elementarnych w $L_2([0,T]\times\Omega, \mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}, \lambda\otimes\mathbb{P})$.

Definicja 14. *Tak zdefiniowane przekształcenie I przyporządkowujące każdemu procesowi $X = (X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ z przestrzeni $\overline{\mathcal{E}}$ ciągły, całkowalny z kwadratem martyngał $I(X)$ nazywamy* izometryczną całką stochastyczną Ito z procesu X *i oznaczamy*

$$I(X)_t =: \int_0^t X_s dW_s, \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Oczywiście natychmiast powstaje pytanie jak wygląda przestrzeń $\overline{\mathcal{E}}$, czyli jakie procesy stochastyczne umiemy całkować.

Definicja 15. *σ-ciało* zbiorów prognozowalnych $\mathcal{P}$, *to σ-ciało podzbiorów $[0,T)\times\Omega$ generowane przez zbiory postaci $\{0\}\times A$, $(s,t]\times A$, $s<t<T$, $A\in\mathcal{F}_s$.*

Proces $X = (X_t)_{0\leqslant t<T}$ jest prognozowalny, *jeśli traktowany jako funkcja $X : [0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ jest mierzalny względem $\mathcal{P}$.*

Z definicji natychmiast wynika, że $X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_{(u,v]}(t)$ jest prognozowalny, jeśli $A\in\mathcal{F}_u$ oraz $u\leqslant v<T$

Ponieważ każdą ograniczoną zmienną ξ, $\mathcal{F}_u$–mierzalną można aproksymować jednostajnie przez zmienne postaci $\sum a_i\mathbb{1}_{A_i}$, $A_i\in\mathcal{F}_u$, więc proces $\xi(\omega)\mathbb{1}_{(u,v]}(t)$ jest prognozowalny dla dowolnej ograniczonej zmiennej ξ, $\mathcal{F}_u$–mierzalnej. Stąd jest on także prognozowalny dla dowolnej zmiennej ξ nieujemnej $\mathcal{F}_u$– mierzalnej, a zatem dla dowolnej $\mathcal{F}_u$–mierzalnej zmiennej ξ.

Zatem dowolny proces $Y \in \mathcal{E}$ jest prognozowalny, czyli $\mathcal{E} \subset L_2([0,T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$, stąd

$$\overline{\mathcal{E}} \subset L_2([0,T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P}).$$

W szczególności każdy proces z $\overline{\mathcal{E}}$ jest nieodróznialny od procesu prognozowalnego. Okazuje się, że zachodzi również odwrotne zawieranie.

Fakt 16. *Mamy* $\overline{\mathcal{E}} = L^2([0,T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$.

Dowód. Wobec poprzednich rozważań musimy tylko pokazać, że $\overline{\mathcal{E}} \supset L_2([0,T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$. Rozważymy dwa przypadki.

Przypadek I: $T < \infty$.

Najpierw pokażemy, że jeśli $\Gamma \in \mathcal{P}$, to $\mathbb{1}_\Gamma \in \overline{\mathcal{E}}$. W tym celu określmy $\mathcal{A} := \{\Gamma \in \mathcal{P}\colon\ \mathbb{1}_\Gamma \in \overline{\mathcal{E}}\}$ oraz

$$\mathcal{B} := \{\{0\} \times A\colon\ A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{(u,v] \times A\colon\ 0 \leqslant u < v < T,\, A \in \mathcal{F}_u\}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{B}$ jest π-układem, ponadto jeśli $\Gamma \in \mathcal{B}$, to $\mathbb{1}_\Gamma \in \mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{E}}$, a zatem $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Co więcej $\mathcal{A}$ jest λ-układem dla $T < \infty$, bo

i) $\Gamma = [0,T) \times \Omega \in \mathcal{A}$, czyli $\mathbb{1}_\Gamma = 1 \in \overline{\mathcal{E}}$, gdyż biorąc ciąg $T_n \nearrow T$, otrzymujemy $\mathcal{E} \ni \mathbb{1}_{\{0\}\times\Omega} + \mathbb{1}_{(0,T_n]\times\Omega} = \mathbb{1}_{[0,T_n]\times\Omega} \xrightarrow{L_2} \mathbb{1}_{[0,T)\times\Omega} \in \overline{\mathcal{E}}$.

ii) $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{A}$, $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $\mathbb{1}_{\Gamma_2 \setminus \Gamma_1} = \mathbb{1}_{\Gamma_2} - \mathbb{1}_{\Gamma_1} \in \overline{\mathcal{E}}$ z liniowości $\overline{\mathcal{E}}$, czyli $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1 \in \mathcal{A}$.

iii) $\Gamma_n \in \mathcal{A}$ wstępujący, wówczas $\mathbb{1}_{\Gamma_n} \xrightarrow{L_2} \mathbb{1}_{\bigcup \Gamma_n} \in \overline{\mathcal{E}}$, czyli $\bigcup \Gamma_n \in \mathcal{A}$.

Zatem dla $T < \infty$, z twierdzenia o π, $\lambda-$ ukladach $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{P}$.

Dalej, jeśli $\Gamma_i \in \mathcal{P}$, $a_i \in \mathbb{R}$, to $\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{\Gamma_i} \in \overline{\mathcal{E}}$ (z liniowości). Ponadto funkcje proste $\sum_{i \leqslant n} a_i \mathbb{1}_{\Gamma_i}$ są gęste w $L^2([0,T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$, czyli $\overline{\mathcal{E}} = L^2([0,T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$.

Przypadek II: $T = \infty$.

Niech $X \in L_2([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$ oraz $X_t^{(n)}(\omega) := X_t(\omega)\mathbb{1}_{[0,n)\times\Omega}(t,\omega)$. Wówczas $X^{(n)}$ prognozowalne, należace do $L_2([0,n) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$, zatem $X^{(n)} \in \overline{\mathcal{E}}$ na mocy przypadku I.

Ponadto $X^{(n)} \to X$ w $L_2([0,\infty) \times \Omega, \lambda \otimes \mathbb{P})$ (tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej), czyli $X \in \overline{\mathcal{E}}$. □

Określiliśmy zatem $\int_0^t X_s dW_s$ dla procesów prognozowalnych całkowalnych z kwadratem względem miary $\lambda \otimes \mathbb{P}$ na $[0,T) \times \Omega$. Od tej pory przyjmujemy następujące oznaczenie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^T &= L_2([0,T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P}) \\ &= \Big\{X = (X_t)_{0 \leqslant t < T} \text{ prognozowalny }:\ \mathbb{E}\int_0^T X_s^2 ds < \infty\Big\}.\end{aligned}$$

Dobrze by było jeszcze wiedzieć, że klasa procesów prognozowalnych jest dostatecznie duża, wynika to z następującego faktu:

Fakt 17. *Jeśli $X = (X_t)_{t\in[0,T)}$ jest procesem adaptowalnym i lewostronnie ciągłym, to X jest prognozowalny.*

Dowód. Dla $T < \infty$ określmy

$$X_t^{(n)} := X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{2^n-1} X_{\frac{k-1}{2^n}T} \mathbb{1}_{(\frac{k-1}{2^n}T, \frac{k}{2^n}T]},$$

zaś w przypadku $T = \infty$ niech

$$X_t^{(n)} := X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{n2^n} X_{\frac{k-1}{2^n}} \mathbb{1}_{(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}.$$

Łatwo zauważyć, że procesy $X^{(n)}$ są prognozowalne oraz z lewostronnej ciągłości X wynika, że $X_t^{(n)} \to X_t$ punktowo. Prognozowalność X wynika z faktu, że granica punktowa ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna. $\square$

Uwaga 18. Można udowodnić, że dla $(\mathcal{F}_t)$-adaptowalnego procesu $X = (X_t)_{t\in[0,T)}$ takiego, że $\mathbb{E}\int_0^T X_s^2 ds < \infty$ istnieje proces prognozowalny Y taki, że $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ dla $\lambda \otimes \mathbb{P}$ prawie wszystkich $(t, \omega) \in [0, T) \times \Omega$. Pozwala to określić $\int X dW$ dla procesów adaptowalnych z $L_2([0, T) \times \Omega)$.

9 Własności całki izometrycznej. Uogólnienie definicji całki stochastycznej

9.1 Twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej

Zacznijmy od prostej obserwacji.

Fakt 1. *Jeśli $X \in \mathcal{L}_T^2$, to dla dowolnego $u < T$, $\mathbb{1}_{[0,u]}X \in \mathcal{L}_T^2$ i*

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[0,u]}(s) X_s \, dW_s = \int_0^{t\wedge u} X_s \, dW_s \qquad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Dowód. Funkcja $(t, \omega) \to \mathbb{1}_{[0,u]}(t)$ jest deterministyczna, więc prognozowalna, zatem proces $\mathbb{1}_{[0,u]}X$ jest prognozowalny jako iloczyn procesów prognozowalnych, więc $\mathbb{1}_{[0,u]}X \in \mathcal{L}_T^2$.

Jeśli X jest procesem elementarnym postaci $X = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_k \xi_k \mathbb{1}_{(t_{k-1},t_k]}$, to $X\mathbb{1}_{[0,u]} = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_k \xi_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}\wedge u, t_k \wedge u]} \in \mathcal{E}$ oraz

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[0,u]}(s) X_s \, dW_s = \sum \xi_k (W_{t_k \wedge u \wedge t} - W_{t_{k-1}\wedge u \wedge t}) = \int_0^{t\wedge u} X_s \, dW_s.$$

Dla $X \in \mathcal{L}^2_T$ weźmy $X^{(n)} \in \mathcal{E}$ takie, że $X^{(n)} \to X$ w $\mathcal{L}^2_T$. Wówczas oczywiście również $X^{(n)}\mathbb{1}_{[0,u]} \to X\mathbb{1}_{[0,u]}$ w $\mathcal{L}^2_T$. Stąd

$$\int_0^t X_s \mathbb{1}_{[0,u]}(s) dW_s \leftarrow \int_0^t X_s^{(n)} \mathbb{1}_{[0,u]}(s) dW_s = \int_0^{t\wedge u} X_s^{(n)} dW_s \to \int_0^t X_s dW_s.$$

□

Uogólnieniem faktu jest ważne twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej.

Twierdzenie 2. *Niech $X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz τ będzie momentem zatrzymania. Wówczas $\mathbb{1}_{[0,\tau]} X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz*

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) X_s \, dW_s = \int_0^{t\wedge\tau} X_s \, dW_s \qquad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Dowód. Biorąc $\tau \wedge T$ zamiast T możemy zakładać, że $\tau \leqslant T$ p.n..

Proces $\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)$ jest lewostronnie ciągły i adaptowalny, a zatem jest prognozowalny, czyli $\mathbb{1}_{[0,\tau]} X$ jest prognozowalny (iloczyn funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną). Stąd $\mathbb{1}_{[0,\tau]} X \in \mathcal{L}^2_T$.

Wzór (3) udowodnimy w trzech krokach.

Krok 1. $X \in \mathcal{E}$, τ przyjmuje skończenie wiele wartości.

Ewentualnie powiększając ciąg t_i możemy zakładać, że τ przyjmuje wartości $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m \leqslant T$ oraz $X = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k \mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}$. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{1}_{\{\tau = t_k\}} \mathbb{1}_{[0,t_k]}(t) = \sum_{k=0}^{m} \Big(\Big(\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} \mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t) \Big) + \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} \mathbb{1}_{\{0\}} \Big) \\
&= \mathbb{1}_\Omega \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} \mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t) \\
&= \mathbb{1}_\Omega \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{\{\tau > t_j\}} \mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t),
\end{aligned}$$

zatem

$$\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)X = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_j \mathbb{1}_{\{\tau > t_j\}} \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t),$$

czyli $\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)X \in \mathcal{E}$. Liczymy

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) X_s\, dW_s &= \sum_{j=0}^{m-1} \xi_j \mathbb{1}_{\{\tau > t_j\}} (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{k-1} \xi_j \mathbb{1}_{\{\tau = t_k\}} (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{\{\tau = t_k\}} \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{\{\tau = t_k\}} \int_0^{t\wedge t_k} X_s\, dW_s = \int_0^{t\wedge\tau} X_s\, dW_s.
\end{aligned}$$

Krok 2. τ dowolne oraz $X \in \mathcal{E}$.

Weźmy ciąg momentów zatrzymania τ_n przyjmujących skończenie wiele wartości taki, że $\tau_n \searrow \tau$. Na mocy kroku 1, para (τ_n, X) spełnia (3). Z ciągłości trajektorii całki stochastycznej, $\int_0^{t\wedge\tau_n} X_s\, dW_s \to \int_0^{t\wedge\tau} X_s\, dW_s$ p.n.. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s) X_s\, dW_s - \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) X_s\, dW_s\Big)^2 &= \mathbb{E}\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{(\tau,\tau_n]}(s) X_s\, dW_s\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{1}_{(\tau,\tau_n]}(s) X_s^2\, ds \to 0.
\end{aligned}$$

Zbieżność wynika z twierdzenia Lebesgue'a, gdyż proces $\mathbb{1}_{(\tau,\tau_n]}(s)X_s^2$ dąży punktowo do zera i jest majoryzowany przez X_s^2. Stąd

$$\int_0^{t\wedge\tau} X\, dW \xleftarrow{p.n.} \int_0^{t\wedge\tau_n} X\, dW = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X\, dW \xrightarrow{L_2(\Omega)} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]} X\, dW,$$

czyli spełnione jest (3).

Krok 3. τ oraz $X \in \mathcal{L}_T^2$ dowolne.

Weźmy $X^{(n)} \in \mathcal{E}$ takie, że $X^{(n)} \to X$ w $\mathcal{L}_T^2$. Z kroku 2, para $(\tau,\, X^{(n)})$ spełnia (3). Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\int_0^{t\wedge\tau} (X_s - X_s^{(n)})\, dW_s\Big)^2 &\leqslant \mathbb{E}\Big(\int_0^T (X - X^{(n)})\, dW\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}\int_0^T (X - X_s^{(n)})^2\, ds \to 0,
\end{aligned}$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z nierówności Jensena oraz Twierdzenia Dooba 6.12 dla martyngału $(\int (X - X^{(n)})\, dW)$. Ponadto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s)(X_s - X_s^{(n)})\, dW_s\Big)^2 &= \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s)(X_s - X_s^{(n)})^2\, ds \\ &\leqslant \mathbb{E}\int_0^T (X_s - X_s^{(n)})^2\, ds \to 0.\end{aligned}$$

Stąd

$$\int_0^{t\wedge\tau} X_s\, dW_s \xleftarrow{L_2(\Omega)} \int_0^{t\wedge\tau} X_s^{(n)}\, dW_s = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]} X_s^{(n)}\, dW_s \xrightarrow{L_2(\Omega)} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]} X_s\, dW_s,$$

czyli (3) spełnione jest i w tym przypadku. □

Wniosek 3. *Dla $X \in \mathcal{L}_T^2$, proces $M := ((\int_0^t X\, dW)^2 - \int_0^t X^2\, ds)_{t\leqslant T}$ jest martyngałem.*

Dla $X \equiv 1$ otrzymujemy znany fakt, że $W_t^2 - t$ jest martyngałem.
Dowód wniosku oparty jest na następującej prostej obserwacji.

Fakt 4. *Załóżmy, że M jest adaptowalnym, prawostronnie ciągłym procesem takim, że $M_0 = 0$ i dla wszystkich t, $\mathbb{E}|M_t| < \infty$. Wówczas M jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}M_\tau = 0$ dla wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania τ.*

Dowód. $\Rightarrow$: Z Twierdzenia Dooba 6.12, $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0 = 0$.

$\Leftarrow$: Musimy pokazać, że dla $s < t$, $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ p.n., czyli $\mathbb{E}M_t\mathbb{1}_A = \mathbb{E}M_s\mathbb{1}_A$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}_s$. Określmy

$$\tau := \begin{cases} s \text{ dla } \omega \in A \\ t \text{ dla } \omega \notin A. \end{cases}$$

Jak łatwo sprawdzić τ jest momentem zatrzymania, stąd

$$0 = \mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_s\mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_t\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{E}M_s\mathbb{1}_A - \mathbb{E}M_t\mathbb{1}_A,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że

$$\mathbb{E}M_t\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{E}M_t - \mathbb{E}M_t\mathbb{1}_A = 0 - \mathbb{E}M_t\mathbb{1}_A.$$

□

Dowód Wniosku. Jak wiemy $\int X\,dW \in M_T^{2,c}$, czyli M jest ciągły, adaptowalny i całkowalny oraz $M_0 = 0$. Dla ograniczonego momentu zatrzymania $\tau \leqslant T$ otrzymujemy na mocy twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^\tau X\,dW\Big)^2 = \mathbb{E}\Big(\int_0^T \mathbb{1}_{[0,\tau]} X\,dW\Big)^2 = \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) X_s^2\,ds = \mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\,ds.$$

Zatem

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^\tau X\,dW\Big)^2 - \int_0^\tau X_s^2\,ds\Big] = 0.$$

$\square$

9.2 Uogólnienie definicji całki stochastycznej

Definicja 5. *Dla $T \leqslant \infty$ określamy przestrzeń procesów prognozowalnych, lokalnie całkowalnych z kwadratem*

$$\Lambda_T^2 = \Big\{(X_t)_{t<T} - \text{ prognozowalny: } \int_0^t X_s^2\,ds < \infty \text{ p.n. dla } 0 < t < T\Big\}.$$

Zatem proces prognozowalny X należy do przestrzeni Λ_T^2 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbb{P}\Big(\forall_{t<T} \int_0^t X_s^2\,ds < \infty\Big) = 1.$$

Przestrzeń Λ_T^2 jest liniowa, ale nie jest przestrzenią Hilberta. Na Λ_T^2 można wprowadzić metrykę przestrzeni Frecheta generowaną przez ciąg metryk euklidesowych.

Definicja 6. *Jeśli $X = (X_t)_{t\in I}$ jest procesem stochastycznym, a τ momentem zatrzymania, to $X^\tau = (X_t^\tau)_{t\in I}$ - proces X zatrzymany w chwili τ definiujemy wzorem*

$$X_t^\tau := X_{t\wedge\tau}.$$

Lemat 7. *Dla $X \in \Lambda_T^2$ określmy*

$$\tau_n := \inf\Big\{t \geqslant 0 : \int_0^t X_s^2\,ds \geqslant n\Big\} \wedge T \wedge n,\ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Wówczas (τ_n) jest rosnącym ciagiem momentów zatrzymania, $\tau_n \nearrow T$ p.n. Ponadto dla wszystkich n, $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X \in \mathcal{L}_T^2$.

Dowód. τ_n jest momentem zatrzymania jako moment dojścia przez adaptowalny proces ciągły $\int_0^t X_s^2\,ds$ do zbioru domkniętego $[n,\infty)$. Z założenia o skończoności $\int X_s^2\,ds$ wynika, że $\tau_n \nearrow T$ p.n..

Proces $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X$ jest prognozowalny jako iloczyn procesów prognozowalnych, ponadto na mocy nierówności Schwarza i definicji τ_n,

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s)X_s\,ds\Big)^2 = \mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau_n} X_s\,ds\Big)^2 \leqslant \mathbb{E}\Big[\tau_n \int_0^{\tau_n} X_s^2\,ds\Big] \leqslant n^2 < \infty.$$

□

Załóżmy, że mamy dany rosnący ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ p.n. taki, że $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ dla wszystkich n. Niech $M_n(t) := \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW$.

Lemat 8. *Dla $m \geqslant n$, procesy $M_m^{\tau_n}$ i M_n są nierozróżnialne, czyli*

$$\mathbb{P}(\forall_{t\leqslant T}, M_m(t\wedge\tau_n) = M_n(t)) = 1.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej dla ustalonego $t \leqslant T$,

$$\begin{aligned} M_m(\tau_n \wedge t) &= \int_0^{\tau_n\wedge t} \mathbb{1}_{[0,\tau_m]}X\,dW = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}X\,dW \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW = M_n(t). \end{aligned}$$

Zatem M_m^{τ} jest modyfikacją M_n. Teza lematu wynika z ciągłości obu procesów. □

Definicja 9. *Niech $X \in \Lambda_T^2$ oraz τ_n będzie rosnącym do T ciągiem momentów zatrzymania takich, że $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ dla wszystkich n.* Całką stochastyczną *$\int X\,dW$ dla $X \in \Lambda_T^2$ oznaczamy taki proces $(M_t)_{t<T} = (\int_0^t X\,dW)_{t<T}$, że $M_t^{\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} X\,dW = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW$ dla $n = 1,2,\ldots$.*

Fakt 10. *Proces M zdefiniowany powyżej jest jest ciągły i jednoznacznie określony w klasie procesów nieodróżnialnych.*

Dowód. Na mocy Lematu 8 dla każdego $m > n$ istnieje zbiór $N_{n,m}$ taki, że $\mathbb{P}(N_{n,m}) = 0$ oraz dla $\omega \notin N_{n,m}$ zachodzi $M_n(t,\omega) = M_m(t\wedge\tau_n(\omega),\omega)$ dla wszystkich $t < T$. Niech $N := \bigcup_{m>n} N_{n,m}$, wówczas $\mathbb{P}(N) = 0$ oraz dla $\omega \notin N$, $t \leqslant \tau_n(\omega)$ ciąg $(M_m(t,\omega))_{m\geqslant n}$ jest stały. Zatem możemy (i musimy) położyć $M(t,\omega) := M_n(t,\omega)$ dla $t \leqslant \tau_n(\omega)$. □

Fakt 11. *Definicja* $\int X\,dW$ *nie zależy od wyboru ciągu* τ_n *dla* $X \in \Lambda_T^2$. *Dokładniej, jeśli* τ_n, $\overline{\tau}_n$ *- momenty zatrzymania,* $\tau_n \nearrow T$, $\overline{\tau}_n \nearrow T$, $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ *i* $\mathbb{1}_{[0,\overline{\tau}_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ *oraz* $M, \overline{M}$ *zdefiniowane za pomocą* τ_n, $\overline{\tau}_n$ *odpowiednio, to procesy* M *i* $\overline{M}$ *są nierozróżnialne.*

Dowód. Mamy

$$M_{t\wedge\tau_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW, \quad \overline{M}_{t\wedge\overline{\tau}_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\overline{\tau}]}X\,dW.$$

Na mocy twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej,

$$M_{t\wedge\tau_n\wedge\overline{\tau}_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}\mathbb{1}_{[0,\overline{\tau}_n]}X\,dW = \overline{M}_{t\wedge\tau_n\wedge\overline{\tau}_n}.$$

Ponadto $\tau_n \wedge \overline{\tau}_n \nearrow T$, więc $t \wedge \tau_n \wedge \overline{\tau}_n = t$ dla $n \geqslant n(\omega)$ i stąd $M_t = \overline{M}_t$ p.n., a że są to procesy ciągłe, to są nierozróżnialne. □

Definicja 12. *Jeżeli dla procesu adaptowalnego* $M = (M_t)_{t<T}$, *istnieje ciąg momentów zatrzymania* $\tau_n \nearrow T$ *taki, że* M^{τ_n} *jest martyngałem, to* M *nazywamy* martyngałem lokalnym. *Jeśli dodatkowo* $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, *to mówimy, że* M *jest* ciągłym martyngałem lokalnym całkowalnym z kwadratem. *Klasę takich procesów oznaczamy* $\mathcal{M}_{T,\mathrm{loc}}^{2,c}$ *(*$\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$ *jeśli wartość* T *jest jasna z kontekstu).*

Uwaga 13. $M \in \mathcal{M}_{T,\mathrm{loc}}^{c}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M - M_0 \in \mathcal{M}_{T,\mathrm{loc}}^{2,c}$, gdzie $\mathcal{M}_{T,\mathrm{loc}}^{c}$ oznacza rodzinę ciągłych martyngałów lokalnych.

Fakt 14. *Załóżmy, że* $M = \int X dW$ *dla* $X \in \Lambda_2^T$. *Wówczas*
i) M *jest procesem ciągłym,* $M_0 = 0$,
ii) $M \in \mathcal{M}_{T,\mathrm{loc}}^{2,c}$,
iii) Przekształcenie $X \to \int X dW$ *jest liniowe.*

Dowód. Punkty i), ii) wynikają z definicji. By udowodnić iii) weźmy $X, Y \in \Lambda_T^2$. Istnieją wówczas momenty zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ i $\overline{\tau}_n \nearrow T$ takie, że $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $\mathbb{1}_{[0,\overline{\tau}_n]}Y \in \mathcal{L}_T^2$. Przyjmując $\sigma_n := \overline{\tau}_n \wedge \tau_n \nearrow T$ otrzymujemy $\mathbb{1}_{[0,\sigma_n]}X$, $\mathbb{1}_{[0,\sigma_n]}Y \in \mathcal{L}_T^2$, a zatem $\mathbb{1}_{[0,\sigma_n]}(aX + bY) \in \mathcal{L}_T^2$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$. Stąd na mocy definicji otrzymujemy, że $\int_0^{t\wedge\sigma_n}(aX + bY)\,dW = a\int_0^{t\wedge\sigma_n} X\,dW + b\int_0^{t\wedge\sigma_n} Y\,dW$ i biorąc granicę $n \to \infty$, $\int(aX + bY)\,dW = a\int X dW + b\int Y dW$. □

Sformułujemy teraz uogólnienie twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej.

Fakt 15. *Jeśli* $X \in \Lambda^2_T$*, to dla dowolnego momentu zatrzymania* τ*,* $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \Lambda^2_T$ *oraz*

$$\int_0^{t\wedge\tau} X\,dW = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,dW.$$

Dowód. Proces $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X$ jest prognozowalny jako iloczyn procesów prognozowalnych i majoryzowany przez X, stąd $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \Lambda^2_T$. Proces $X \in \Lambda^2_T$, więc istnieje ciąg $\tau_n \nearrow T$ taki, że $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}^2_T$. Wtedy też $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}^2_T$. Niech

$$M := \int X\,dW, \quad N := \int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,dW.$$

Na mocy definicji,

$$M_{t\wedge\tau_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X, dW, \quad N_{t\wedge\tau_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,dW.$$

Z udowodnionego wcześniej twierdzenia 2 o zatrzymaniu całki izometrycznej,

$$M_{t\wedge\tau\wedge\tau_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW = N_{t\wedge\tau_n}.$$

Biorąc $n \to \infty$ dostajemy $M^\tau_t = M_{t\wedge\tau} = N_t$, czyli $M^\tau = N$. □

Uwaga 16. Martyngał lokalny $M = \int X\,dW$ dla $X \in \Lambda^2_T$ *nie musi być* martyngałem, M_t nie musi być nawet całkowalne. Ale, jeśli $\mathbb{E}\int_0^t X_s^2\,ds < \infty$ dla wszystkich $t < T$, to M jest martyngałem, bo możemy przyjąć $\tau_n = t_n$, gdzie t_n jest ciągiem rosnącym zbieżnym do T i wtedy $M_{t\wedge\tau_n} = M_{t\wedge t_n} \in \mathcal{M}^{2,c}_T$.

Mimo, że w przypadku ogólnym $\int X\,dW$ nie musi być martyngałem, to zachodzi dla tego procesu nierówność Dooba.

Twierdzenie 17 (Nierówność Dooba)**.** *Dla dowolnego procesu* $X \in \Lambda^T_2$ *oraz momentu zatrzymania* $\tau \leqslant T$*,*

$$\mathbb{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^t X\,dW\Big)^2 \leqslant 4\mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\,ds.$$

Dowód. Weźmy $\tau_n \nearrow T$ takie, że $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}^2_T$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} X\,dW\Big)^2 &= \mathbb{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2 = \mathbb{E}\sup_{t<T}\Big(\int_0^{t\wedge\tau} \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2\\ &= \mathbb{E}\sup_{t\leqslant T}\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2\end{aligned}$$

($\mathbb{1}_{[0,\tau]}\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, więc $t < T$ można zamienić na $t \leqslant T$). Na mocy nierówności Dooba dla martyngałów,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\leqslant T}\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,T]}\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2 &\leqslant 4\mathbb{E}\Big(\int_0^T \mathbb{1}_{[0,\tau]}\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2\\ &= 4\mathbb{E}\int_0^T (\mathbb{1}_{[0,\tau]}\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X_s)^2\,ds = 4\mathbb{E}\int_0^{\tau\wedge\tau_n} X_s^2\,ds \leqslant 4\mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\,ds.\end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że

$$\mathbb{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} X\,dW\Big)^2 \leqslant 4\mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\,ds.$$

Ponieważ

$$\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} X\,dW\Big)^2 = \sup_{t<\tau\wedge\tau_n}\Big(\int_0^t X\,dW\Big)^2 \nearrow \sup_{t<\tau}\Big(\int_0^t X\,dW\Big)^2,$$

więc teza wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej. □

10 Całka względem ciągłych martyngałów

Podczas wcześniejszych wykładów zdefiniowaliśmy całkę $\int X dW$. Okazuje się, że bez większych trudności definicję tę daje się uogólnić na $\int X dM$, gdzie M jest ciągłym martyngałem (a nawet ciągłym martyngałem lokalnym).

Podczas tego i kolejnych wykładów zakładamy, że $T \leqslant \infty$ oraz $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ jest filtracją spełniającą zwykłe warunki.

10.1 Rozkład Dooba-Meyera

Podstawą konstrukcji całki stochastycznej względem procesu Wienera jest to, że W_t i $W_t^2 - t$ są martyngałami. Okazuje się, że dla dowolnego całkowalnego z kwadratem ciągłego martyngału M znajdzie się proces niemalejący X taki, że $M^2 - X$ jest martyngałem.

Twierdzenie 1 (rozkład Dooba-Meyera)**.** *Dla $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ istnieje proces $\langle M\rangle = (\langle M\rangle_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ o trajektoriach ciągłych, niemalejących taki, że $\langle M\rangle_0 = 0$ oraz $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest martyngałem. Co więcej proces $\langle M\rangle$ jest wyznaczony jednoznacznie.*

Udowodnimy jednoznaczność rozkładu, dowód istnienia znajduje się w Dodatku B.

Dowód Jednoznaczności. Załóżmy, że $M_t^2 - Y_t$ i $M_t^2 - Z_t$ dwa martyngały o ciągłych trajektoriach oraz Y_t, Z_t niemalejące, ciągłe. Trajektorie procesu $Y_t - Z_t$ mają wahanie skończone, ponadto $Y_t - Z_t = (M_t^2 - Z_t) - (M_t^2 - Y_t)$ jest martyngałem ciągłym. Stąd, na podstawie twierdzenia 7.13 $Y - Z \equiv 0$. $\square$

Przykłady.
Dla procesu Wienera $\langle W \rangle_t = t$.
Ogólniej, Wniosek 3 implikuje, że $\langle \int X_s \, dW_s \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \, ds$ dla $X \in \mathcal{L}_T^2$.

10.2 Całka izometryczna

Ponieważ dla wszystkich ω, $t \to \langle M \rangle_t(\omega)$ jest niemalejące, zatem ma wahanie skończone, czyli można określić skończoną miarę $d\langle M \rangle_t(\omega)$ na $[0, T]$. Z uwagi na ciągłość $\langle M \rangle$ miara ta jest bezatomowa. Następna definicja jest naturalnym uogólnieniem definicji dla procesu Wienera.

Definicja 2. *Dla procesu elementarnego X postaci*

$$X = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]},$$

gdzie $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m < T$, ξ_k ograniczone, $\mathcal{F}_{t_k}$- mierzalne oraz $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ określamy

$$\int_0^t X \, dM := \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k (M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t}) \text{ dla } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Definiujemy też dla $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$

$$\mathcal{L}_T^2(M) = \Big\{ X = (X_t)_{t<T} \text{ prognozowalne takie, że } \mathbb{E} \int_0^T X_s^2 \, d\langle M \rangle_s < \infty \Big\}.$$

Fakt 3. *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ oraz $X \in \mathcal{E}$. Wówczas $I(X) := \int X \, dM \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $I(X)_0 = 0$ oraz*

$$\|I(X)\|_T^2 = \mathbb{E}\Big(\int_0^T X_s \, dM_s \Big)^2 = \mathbb{E} \int_0^T X_s^2 \, d\langle M \rangle_s = \|X\|_{\mathcal{L}_T^2(M)}^2.$$

Dowód. Ciągłość $I(X)$, warunek $I(X)_0 = 0$ oraz to, że $I(X)_t \in L_2$ dla wszystkich t są oczywiste. Dla $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ mamy

$$I(X)_t = \xi_0 (M_{t_1} - M_{t_0}) + \xi_1 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \ldots + \xi_j (M_t - M_{t_j}).$$

Dla $t_j \leqslant t \leqslant s \leqslant t_{j+1}$ otrzymujemy zatem

$$\mathbb{E}(I(X)_s|\mathcal{F}_t) - I(X)_t = \mathbb{E}(\xi_j(M_s - M_t)|\mathcal{F}_t) = \xi_j(\mathbb{E}(M_s|\mathcal{F}_t) - M_t) = 0,$$

czyli $I(X)$ jest martyngałem. Ponadto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}I(X)_T^2 = &\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}[\xi_k^2(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2] \\ &+ 2\sum_{j<k} \mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})] = I + II.\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $s < t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_t^2 - \langle M\rangle_t|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(\langle M\rangle_t|\mathcal{F}_s) - 2M_s\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) + M_s^2 \\ &= M_s^2 - \langle M\rangle_s + \mathbb{E}(\langle M\rangle_t|\mathcal{F}_s) - M_s^2 = \mathbb{E}(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s|\mathcal{F}_s).\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}I &= \sum_k \mathbb{E}[\xi_k^2\mathbb{E}((M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2|\mathcal{F}_{t_k})] = \sum_k \mathbb{E}[\xi_k^2\mathbb{E}(\langle M\rangle_{t_{k+1}} - \langle M\rangle_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k})] \\ &= \mathbb{E}\sum_k \xi_k^2(\langle M\rangle_{t_{k+1}} - \langle M\rangle_{t_k}) = \mathbb{E}\sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \xi_k^2\, d\langle M\rangle_s = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2\, d\langle M\rangle_s.\end{aligned}$$

Ponadto

$$II = 2\sum_{j<k} \mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})\mathbb{E}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}})] = 0.$$

□

Tak jak dla procesu Wienera dowodzimy, że domknięcie $\mathcal{E}$ w przestrzeni $L_2([0,T) \times \Omega, d\langle M\rangle \otimes \mathbb{P})$ jest równe $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_T^2(M)$. Izometrię $I(X)$ możemy przedłużyć do $\overline{\mathcal{E}}$, w ten sposób otrzymujemy izometryczną definicję całki $I(X) = \int X\, dM$ dla $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$. Mamy zatem następujący fakt.

Fakt 4. *Niech $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$. Wówczas*
a) Dla $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$ proces $\int XdM \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ oraz

$$\Big\| \int XdM\Big\|^2_{\mathcal{M}_T^{2,c}} = \mathbb{E}\Big(\int_0^T X_s dM_s\Big)^2 = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s = \|X\|_{\mathcal{L}_T^2(M)}.$$

b) Jeśli $X, Y \in \mathcal{L}_T^2(M)$, to $aX + bY \in \mathcal{L}_T^2(M)$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\int(aX + bY)dM = a\int XdM + b\int YdM$.

10.3 Uogólnienie definicji całki

Zacznijmy od prostego faktu.

Fakt 5. *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, wówczas dla dowolnego momentu zatrzymania τ, $M^\tau \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ oraz $\langle M^\tau\rangle = \langle M\rangle^\tau$.*

Dowód. Wiemy, że M^τ jest ciągłym martyngałem. Na mocy nierówności Jensena

$$\mathbb{E}|M_T^\tau|^2 = \mathbb{E}M_{\tau\wedge T}^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_{\tau\wedge T})]^2 \leqslant \mathbb{E}M_T^2,$$

zatem $M^\tau \in \mathcal{M}_T^{2,c}$. Proces $\langle M\rangle^\tau$ startuje z zera, ma trajektorie ciągłe, ponadto $(M^\tau)^2 - \langle M\rangle^\tau = (M^2 - \langle M\rangle)^\tau$ jest martyngałem, więc $\langle M\rangle^\tau$ spełnia wszystkie warunki definicji $\langle M^\tau\rangle$. □

Możemy uogólnić rozkład Dooba-Meyera na przypadek ciągłych martyngałów lokalnych.

Wniosek 6. *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$, wówczas istnieje dokładnie jeden proces $\langle M\rangle = (\langle M\rangle_t)_{0\leqslant t<T}$ o trajektoriach ciągłych, niemalejących taki, że $\langle M\rangle_0 = 0$ oraz $M^2 - \langle M\rangle \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$.*

Dowód. **Istnienie.** Niech τ_n będzie rosnącym do T ciągiem momentów zatrzymania takim, że $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$. Określmy $Y_n := \langle M^{\tau_n}\rangle$, wówczas dla $n \leqslant m$

$$Y_m^{\tau_n} = \langle M^{\tau_m}\rangle^{\tau_n} = \langle (M^{\tau_m})^{\tau_n}\rangle = \langle M^{\tau_n\wedge\tau_m}\rangle = \langle M^{\tau_n}\rangle = Y_n.$$

Stąd istnieje proces ciągły $Y = (Y_t)_{0\leqslant t<T}$ taki, że $Y^{\tau_n} = Y_n$, oczywiście $Y_0 = Y_{n,0} = 0$, ponadto Y ma trajektorie niemalejące oraz

$$(M^2 - Y)^{\tau_n} = (M^{\tau_n})^2 - Y^{\tau_n} = (M^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}\rangle \in \mathcal{M}^c,$$

zatem $M^2 - Y$ jest ciągłym martyngałem lokalnym na $[0, T)$.

Jednoznaczność. Niech Y i $\bar{Y}$ procesy ciągłe o niemalejących trajektoriach takie, że $Y_0 = \bar{Y}_0 = 0$ oraz $M^2 - Y$ i $M^2 - \bar{Y}$ są martyngałami lokalnymi. Wówczas istnieją momenty zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ i $\bar{\tau}_n \nearrow T$ takie, że $(M^2 - Y)^{\tau_n}$ oraz $(M^2 - \bar{Y})^{\bar{\tau}_n}$ są martyngałami. Biorąc $\sigma_n = \tau_n \wedge \bar{\tau}_n \nearrow T$ dostajemy martyngały $(M^2 - Y)^{\sigma_n} = ((M^2 - Y)^{\tau_n})^{\bar{\tau}_n}$ oraz $(M^2 - \bar{Y})^{\sigma_n} = ((M^2 - \bar{Y})^{\bar{\tau}_n})^{\tau_n}$, proces $(Y - \bar{Y})^{\sigma_n}$ jest więc martyngałem o ograniczonym wahaniu, czyli jest stały, zatem $Y^{\sigma_n} = \bar{Y}^{\sigma_n}$. Przechodząc z $n \to \infty$ otrzymujemy $Y = \bar{Y}$. □

Podbnie jak dla procesu Wienera dowodzimy twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej względem martyngałów całkowalnych z kwadratem.

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$ oraz τ będzie momentem zatrzymania. Wówczas $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}_T^2(M)$, $X \in \mathcal{L}_T^2(M^\tau)$ oraz*

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) X_s \, dM_s = \int_0^{t\wedge\tau} X_s \, dM_s = \int_0^t X_s dM_s^\tau \qquad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Definicja 8. *Dla $T \leqslant \infty$, $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$ określamy przestrzeń procesów prognozowalnych, lokalnie całkowalnych z kwadratem względem $\langle M \rangle$*

$$\Lambda_T^2(M) = \Big\{(X_t)_{t<T} - \text{ prognozowalny: } \int_0^t X_s^2 \, d\langle M\rangle_s < \infty \text{ p.n. dla } t < T\Big\}.$$

Ponieważ $\int XdM = \int Xd(M - M_0)$ oraz $\langle M - M_0 \rangle = \langle M \rangle$, więc bez straty ogólności przy uogólnianiu definicji całki będziemy zakładać, że $M_0 = 0$.

Definicja 9. *Niech $M = (M_t)_{t<T} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$, $M_0 = 0$, $X = (X_t)_{t<T} \in \Lambda_T^2(M)$ oraz τ_n będzie rosnącym do T ciągiem momentów zatrzymania takich, że $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ i $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2(M^{\tau_n})$ dla wszystkich n.* Całką stochastyczną $\int X \, dM$ *nazywamy taki proces $(N_t)_{t<T} = (\int_0^t X \, dM)_{t<T}$, że $N_t^{\tau_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X \, dM^{\tau_n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$.*

Nietrudno udowodnić (naśladując dowód dla całki względem procesu Wienera), że całka $\int X \, dM$ dla $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$ i $X \in \Lambda_T^2(M)$ jest zdefiniowana poprawnie i jednoznacznie (z dokładnością do nieodróżnialności procesów) oraz nie zależy od wyboru ciągu momentów zatrzymania τ_n.

Następujący fakt przedstawia podstawowe własności $\int XdM$.

Fakt 10. *Niech $M, N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$. Wówczas*
a) Dla $X \in \Lambda_T^2(M)$ proces $\int XdM \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$.
b) Jeśli $X, Y \in \Lambda_T^2(M)$, to $aX + bY \in \Lambda_T^2(M)$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\int (aX + bY)dM = a\int XdM + b\int YdM$.
c) Jeśli $X \in \Lambda_T^2(M) \cap \Lambda_T^2(N)$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, to $X \in \Lambda_T^2(aM + bN)$ oraz $\int Xd(aM + bN) = a\int XdM + b\int XdN$.

Można również sformułować twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej w ogólnym przypadku.

Twierdzenie 11. *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$, $X \in \Lambda_T^2(M)$ oraz τ będzie momentem zatrzymania. Wówczas $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \Lambda_T^2(M)$, $X \in \Lambda_T^2(M^\tau)$ oraz*

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) \, dM_s = \int_0^{t\wedge\tau} X_s \, dM_s = \int_0^t X_s dM_s^\tau \qquad \text{dla } 0 \leqslant t < T.$$

11 Własności nawiasu skośnego

Podczas tego wykładu zajmiemy się interpretacją procesu $\langle M\rangle$.

Niech $\Pi = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ będzie podziałem $[0,t]$ takim, że $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = t$. Definiujemy wówczas

$$V^M_{\Pi,t} := \sum_{i=1}^{k} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2.$$

Będziemy też czasem pisać $V_{\Pi,t}(M)$ zamiast $V^M_{\Pi,t}$. Pokażemy, że $\langle M\rangle_t$ jest granicą $V^M_{\Pi,t}$ przy $\mathrm{diam}(\Pi) \to 0$, dlatego też $\langle M\rangle$ nazywa się często *wariacją kwadratową* M.

Zacznijmy od najprostszej sytuacji martyngałów ograniczonych, tzn. takich, że $\sup_t \|M_t\|_\infty < \infty$.

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że M jest ograniczonym martyngałem ciągłym Wówczas $V^M_{\Pi,t} \to \langle M\rangle_t$ w $L_2(\Omega)$ dla $t \leqslant T$, gdy* $\mathrm{diam}(\Pi) \to 0$.

Dowód. Możemy założyć, rozpatrując zamiast M proces $M - M_0$, że $M_0 = 0$, bo $V_{\Pi,t}(M - M_0) = V_{\Pi,t}(M)$ oraz $\langle M - M_0\rangle = \langle M\rangle$ ($(M - M_0)^2 - \langle M\rangle = (M^2 - \langle M\rangle) - 2MM_0 + M_0^2$ jest martyngałem, czyli, z jednoznaczności $\langle\cdot\rangle$, mamy $\langle M - M_0\rangle = \langle M\rangle$).

Niech $\Pi_n = (0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = t)$ będzie ciągiem podziałów $[0,t]$ takim, że $\mathrm{diam}(\Pi_n) \to 0$.

Połóżmy $C = \sup_{s\leqslant T} \|M_s\|_\infty$. Liczymy

$$\begin{aligned}
M_t^2 &= \Big(\sum_{k=1}^{k_n} (M_{t_k^{(n)}} - M_{t_{k-1}^{(n)}})\Big)^2 \\
&= \sum_k (M_{t_k^{(n)}} - M_{t_{k-1}^{(n)}})^2 + 2\sum_{k<j} (M_{t_k^{(n)}} - M_{t_{k-1}^{(n)}})(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}}) \\
&= V^M_{\Pi_n,t} + 2\sum_j (M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}}) M_{t_{j-1}^{(n)}} = V^M_{\Pi_n,t} + 2N_n(t).
\end{aligned}$$

Niech

$$X_n(s) := \sum_{j=1}^{k_n} M_{t_{j-1}^{(n)}} \mathbb{1}_{(t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]} \in \mathcal{E},$$

wówczas $N_n(t) = \int_0^t X_n(s)\, dM_s$. Z ciągłości M dostajemy $X_n(s) \to M_s$ dla wszystkich $s \leqslant t$. Ponadto $|X_n| \leqslant C$, stąd $|X_n - M|^2 \leqslant 4C^2$ i na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej,

$$\mathbb{E}\int_0^t |X_n - M|^2\, d\langle M\rangle_s \to 0.$$

Zatem $X_n \to M$ w $\mathcal{L}^2_t(M)$, czyli $N_n \to \int M\,dM$ w $\mathcal{M}^{2,c}_t$, to znaczy $N_n(t) \to \int_0^t M_s\,dM_s$ w $L_2(\Omega)$. Wykazaliśmy zatem, iż

$$V^M_{\Pi_n,t} = M_t^2 - 2N_n(t) \to M_t^2 - 2\int M\,dM \quad \text{w } L_2(\Omega).$$

Proces $Y := M^2 - 2\int M\,dM$ jest ciągły, $Y_0 = 0$ oraz $M^2 - Y = 2\int M\,dM$ jest martyngałem. By zakończyć dowód, że $Y = \langle M\rangle$ musimy wykazać monotoniczność trajektorii Y. Wybierzmy $s < t$ i rozpatrzmy taki ciąg podziałów Π_n odcinka $[0,t]$, że s jest jednym z punktów każdego z podziałów. Wówczas Π_n można też traktować jako ciąg podziałów $[0,s]$ i określić $V^M_{\Pi_n,s}$. Mamy

$$Y_s \xleftarrow{L_2} V^M_{\Pi_n,s} \leqslant V^M_{\Pi_n,t} \xrightarrow{L_2} Y_t,$$

czyli proces Y ma trajektorie monotoniczne. $\square$

Uwaga 2. W szczególności przedstawiony dowód pokazuje, że dla martyngału jednostajnie ograniczonego M, takiego, że $M_0 = 0$, zachodzi $M^2 = 2\int M\,dM + \langle M\rangle$.

By uogólnić Twierdzenie 1 na przypadek martyngałów całkowalnych z kwadratem będziemy potrzebowali dwóch faktów.

Lemat 3. *Niech (ξ_n) będzie ciągiem zmiennych losowych, a (A_k) wstępującym ciągiem zdarzeń takim, że $\mathbb{P}(\bigcup A_k) = 1$. Załóżmy, że dla wszystkich k, zmienne $\xi_n \mathbb{1}_{A_k}$ zbiegają według prawdopodobieństwa (przy $n \to \infty$) do zmiennej η_k. Wówczas ξ_n zbiega według prawdopodobieństwa do zmiennej η takiej, że $\eta\mathbb{1}_{A_k} = \eta_k$ p.n. dla $k = 1, 2, \ldots$.*

Dowód. Dla $k \leqslant l$ mamy $\eta_l \mathbb{1}_{A_k} = \eta_k$ p.n., gdyż pewien podciąg $\xi_{n_s}\mathbb{1}_{A_l} \to \eta_l$ p.n., a zatem $\xi_{n_s}\mathbb{1}_{A_l} = \xi_{n_s}\mathbb{1}_{A_l}\mathbb{1}_{A_k} \to \eta_l\mathbb{1}_{A_k}$ p.n. (czyli również wg $\mathbb{P}$). Stąd istnieje zmienna losowa η taka, że $\eta\mathbb{1}_{A_k} = \eta_k$ p.n..

Zauważmy, że $\mathbb{P}(A_k^c) \leqslant \varepsilon/2$ dla dużego k oraz przy ustalonym k, $\mathbb{P}(|\xi_n\mathbb{1}_{A_k} - \eta_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon/2$ dla dużych n, stąd

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \eta| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(A_k^c) + \mathbb{P}(|\xi_n\mathbb{1}_{A_k} - \eta\mathbb{1}_{A_k}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych n. $\square$

Kolejny lemat pokazuje, że przy pewnych prostych założeniach można ze zbieżności według prawdopodobieństwa wyprowadzić zbieżność w L_1.

Lemat 4. *Załóżmy, że $\xi_n \geqslant 0$, $\xi_n \to \xi$ według $\mathbb{P}$ oraz dla wszystkich n, $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi < \infty$. Wówczas $\xi_n \to \xi$ w L_1.*

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\xi-\xi_n| &= \mathbb{E}(|\xi-\xi_n|-(\xi-\xi_n)) = 2\mathbb{E}(\xi-\xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi\geqslant\xi_n\}}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2\mathbb{E}(\xi-\xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi\geqslant\xi_n+\frac{\varepsilon}{4}\}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2\mathbb{E}\xi\mathbb{1}_{\{\xi\geqslant\xi_n+\frac{\varepsilon}{4}\}}.\end{aligned}$$

Na mocy zbieżności według prawdopodobieństwa, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi\geqslant\xi_n+\varepsilon/4)=0$. Ponadto $\mathbb{E}|\xi|=\mathbb{E}\xi<\infty$, zatem $\{\xi\}$ jest jednostajnie całkowalna , czyli $|\mathbb{E}\xi\mathbb{1}_A|\leqslant\varepsilon/2$ dla odpowiednio małego $\mathbb{P}(A)$. Stąd $\mathbb{E}\xi\mathbb{1}_{\{\xi\geqslant\xi_n+\varepsilon/4\}}\leqslant\varepsilon/2$ dla dużych n, a więc $\mathbb{E}|\xi-\xi_n|\leqslant\varepsilon$. □

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że* $M\in\mathcal{M}_T^{2,c}$*, wówczas dla* $t<T$*,* $V_{\Pi,t}^M\to\langle M\rangle_t$ *w* $L_1(\Omega)$*, gdy* $\operatorname{diam}(\Pi)\to 0$.

Dowód. Jak poprzednio możemy zakładać, że $M_0=0$. Ustalmy ciąg podziałów Π_n taki, że $\operatorname{diam}(\Pi_n)\to 0$.

Istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_k\nearrow T$ taki, że M^{τ_k} jest jednostajnie ograniczony (np. $\tau_k=\inf\{t\colon |M_t|\leqslant k\}$). Na mocy Twierdzenia 1, dla ustalonego k, mamy przy $n\to\infty$

$$V_{\Pi_n,t}(M^{\tau_k})\xrightarrow{L_2}\langle M^{\tau_k}\rangle_t=\langle M\rangle_t^{\tau_k}.$$

Stąd

$$\mathbb{1}_{\{t\leqslant\tau_k\}}V_{\Pi_n,t}(M)=\mathbb{1}_{\{t\leqslant\tau_k\}}V_{\Pi_n,t}(M^{\tau_k})\xrightarrow{L_2}\mathbb{1}_{\{t\leqslant\tau_k\}}\langle M\rangle_t^{\tau_k}=\mathbb{1}_{\{t\leqslant\tau_k\}}\langle M\rangle_t.$$

Zbieżność w L_2 implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa, zatem możemy stosować Lemat 3 do $\xi_n=V_{\Pi_n,t}(M)$ i $A_k=\{t\leqslant\tau_k\}$, by otrzymać $V_{\Pi_n,t}(M)\to\langle M\rangle_t$ według $\mathbb{P}$. Mamy jednak

$$\mathbb{E}\langle M\rangle_t=\mathbb{E}M_t^2=\mathbb{E}[V_{\Pi_n,t}(M)+2\sum_j M_{t_{j-1}^{(n)}}(M_{t_j^{(n)}}-M_{t_{j-1}^{(n)}})]=\mathbb{E}V_{\Pi_n,t}(M),$$

a zatem na mocy Lematu 4, $V_{\Pi_n,t}(M)\to\langle M\rangle_t$ w L_1. □

Dla martyngałów lokalnych zachodzi zbliżone twierdzenie, tylko zbieżność w L_1 musimy zastąpić zbieżnością według prawdopodobieństwa.

Wniosek 6. *Załóżmy, że* $M\in\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$*, wówczas dla* $t<T$*,* $V_{\Pi,t}^M\to\langle M\rangle_t$ *według prawdopodobieństwa, gdy* $\operatorname{diam}(\Pi)\to 0$.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $M_0 = 0$, wówczas $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$. Niech Π_n będą podziałami $[0,t]$ o średnicy zbieżnej do zera oraz $\tau_k \nearrow T$ takie, że $M^{\tau_k} \in \mathcal{M}^{2,c}$. Na podstawie Twierdzenia 5 otrzymujemy, że dla ustalonego k,

$$V_{\Pi_n,t}(M^{\tau_k}) \xrightarrow{L_1} \langle M^{\tau_k}\rangle = \langle M\rangle^{\tau_k}.$$

Stąd

$$V_{\Pi_n,t}(M)\mathbb{1}_{\{\tau_k \geqslant t\}} = V_{\Pi_n,t}(M^{\tau_k})\mathbb{1}_{\{\tau_k \geqslant t\}} \xrightarrow{L_1} \langle M\rangle^{\tau_k}\mathbb{1}_{\{\tau_k \geqslant t\}} = \langle M\rangle\mathbb{1}_{\{\tau_k \geqslant t\}}.$$

Teza wynika z Lematu 3. □

Nawias skośny określa się nie tylko dla pojedynczego martyngału, ale też i dla pary martyngałów.

Definicja 7. *Nawiasem skośnym dwóch ciągłych martyngałów lokalnych M i N nazywamy proces $\langle M,N\rangle$ zdefiniowany wzorem*

$$\langle M,N\rangle = \frac{1}{4}[\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle].$$

Fakt 8. *a) Załóżmy, że $M,N \in \mathcal{M}^{2,c}_T$, wówczas $\langle M,N\rangle$ to jedyny proces o trajektoriach ciągłych mających wahanie skończone na $[0,T]$ taki, że $\langle M,N\rangle_0 = 0$ oraz $MN - \langle M,N\rangle$ jest martyngałem na $[0,T]$.*
b) Załóżmy, że $M,N \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, wówczas $\langle M,N\rangle$ to jedyny proces o trajektoriach ciągłych mających wahanie skończone na $[0,t]$ dla $t < T$ taki, że $\langle M,N\rangle_0 = 0$ oraz $MN - \langle M,N\rangle$ jest martyngałem lokalnym na $[0,T)$.

Dowód. Jednoznaczność dowodzimy jak dla $\langle M\rangle$, zaś wymienione własności wynikają z tożsamości

$$MN - \langle M,N\rangle = \frac{1}{4}\Big[\Big((M+N)^2 - \langle M+N\rangle\Big) - \Big((M-N)^2 - \langle M-N\rangle\Big)\Big].$$

□

Fakt 9. *Niech $\Pi_n = (t^{(n)}_0, t^{(n)}_1, \ldots, t^{(n)}_{k_n})$ będzie ciągiem podziałów $[0,t]$ takim, że $0 = t^{(n)}_0 \leqslant t^{(n)}_1 \leqslant \ldots \leqslant t^{(n)}_{k_n} = t$ oraz $\mathrm{diam}(\Pi_n) \to 0$.*
a) Jeśli $M,N \in \mathcal{M}^{2,c}_T$, to dla $t < T$,

$$\sum_{k=0}^{k_n}(M_{t^{(n)}_{k+1}} - M_{t^{(n)}_k})(N_{t^{(n)}_{k+1}} - N_{t^{(n)}_k}) \xrightarrow{L_1} \langle M,N\rangle_t.$$

b) Jeśli $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$, to dla $t < T$,

$$\sum_{k=0}^{k_n} (M_{t^{(n)}_{k+1}} - M_{t^{(n)}_k})(N_{t^{(n)}_{k+1}} - N_{t^{(n)}_k}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M, N\rangle_t.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$(M_t - M_s)(N_t - N_s) = \frac{1}{4}[((M_t+N_t)-(M_s+N_s))^2 - ((M_t-N_t)-(M_s-N_s))^2]$$

i skorzystać z Twierdzenia 1 i Wniosku 6. □

Fakt 10. *a) $\langle M, M\rangle = \langle M\rangle = \langle -M\rangle$,*
b) $\langle M, N\rangle = \langle N, M\rangle$,
c) $\langle M - M_0, N\rangle = \langle M, N - N_0\rangle = \langle M - M_0, N - N_0\rangle = \langle M, N\rangle$,
d) $(N, M) \to \langle M, N\rangle$ jest przekształceniem dwuliniowym,
e) $\langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M^\tau, N\rangle = \langle M, N^\tau\rangle = \langle M, N\rangle^\tau$,
f) Jeśli $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$, $X, Y \in \Lambda^2_T(M)$ oraz $N_1 = \int X\,dM$, $N_2 = \int Y\,dM$, to $\langle N_1, N_2\rangle = \int XY d\langle M\rangle$.

Dowód. Punkty a), b) i c) wynikają natychmiast z definicji, punkt d) z Wniosku 6. To, że $\langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M, N\rangle^\tau$ dowodzimy jak w Fakcie 5 (wykorzystując Fakt 8). Pozostałe równości w e) wynikają z Faktu 9. By wykazać f) wystarczy wykazać, że $\langle \int X dM\rangle = \int X^2 d\langle M\rangle$. Poprzez własność e) i lokalizacje można sprowadzić to do przypadku gdy $M \in \mathcal{M}^{2,c}_T$ oraz $X \in \mathcal{L}^2_T(M)$. Z twierdzenia o zatrzymaniu całki można wtedy wykazać, że $\langle \int X dM\rangle - \int X^2 d\langle M\rangle$ jest martyngałem (zob. dowód Wniosku 3). □

12 Dalsze własności całki stochastycznej

Zacznijmy od wersji stochastycznej twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$ oraz X_n są procesami prognozowalnymi takimi, że $\lim_{n\to\infty} X_{n,t}(\omega) = X_t(\omega)$ dla wszystkich $t < T, \omega \in \Omega$. Jeśli dla wszystkich $t < T$ i $\omega \in \Omega$, $|X_{n,t}(\omega)| \leqslant Y_t(\omega)$ dla pewnego procesu $Y \in \Lambda^2_T(M)$, to $X_n, X \in \Lambda^2_T(M)$ oraz*

$$\int_0^t X_n dM \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t X dM \text{ przy } n \to \infty.$$

Dowód. Proces X jest prognozowalny jako granica procesów prognozowalnych. Ponadto dla $t < T$,

$$\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s, \int_0^t X_{n,s}^2 d\langle M\rangle_s \leqslant \int_0^t Y_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty \text{ p.n.},$$

więc $X_n, X \in \Lambda_T^2(M)$. Bez straty ogólności możemy też założyć, że $M_0 = 0$.

Niech $\tau_k \nearrow T$ takie, że $M^{\tau_k} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ oraz $\mathbb{1}_{[0,\tau_k]} Y \in \mathcal{L}_T^2(M^{\tau_k})$. Ponieważ $\mathbb{1}_{[0,\tau_k]} X_n \leqslant \mathbb{1}_{[0,\tau_k]} Y$, więc $\mathbb{1}_{[0,\tau_k]} X_n \in \mathcal{L}_T^2(M^{\tau_k})$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej łatwo wykazać, że $\mathbb{1}_{[0,\tau_k]} X_n \to \mathbb{1}_{[0,\tau_k]} X$ w $\mathcal{L}_T^2(M^{\tau_k})$. Stąd dla ustalonego k,

$$\int_0^{t\wedge\tau_k} X_n dM = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_k]} X_n dM^{\tau_k} \xrightarrow{L_2(\Omega)} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_k]} X dM^{\tau_k} = \int_0^{t\wedge\tau_k} X dM,$$

czyli

$$\mathbb{1}_{\{\tau_k \geqslant t\}} \int_0^t X_n dM \xrightarrow{L_2} \mathbb{1}_{\{\tau_k \geqslant t\}} \int_0^t X dM \text{ przy } n \to \infty.$$

Zbieżność w L_2 implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa, by zakończyć dowód wystarczy skorzystać z Lematu 11.3. $\square$

Definicja 2. *Mówimy, że proces X jest lokalnie ograniczony, jeśli istnieją momenty zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ takie, że procesy $X^{\tau_n} - X_0$ są ograniczone.*

Uwaga 3. Każdy proces ciągły, adaptowalny jest lokalnie ograniczony.

Kolejne twierdzenie podaje wzór na całkowanie przez podstawienie.

Twierdzenie 4. *a) Niech $N \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $X \in \mathcal{L}_T^2(N)$, Y - proces prognozowalny ograniczony oraz $M = \int X dN$. Wówczas $Y \in \mathcal{L}_T^2(M), XY \in \mathcal{L}_T^2(N)$ oraz $\int Y dM = \int XY dN$.*
b) Niech $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$, $X \in \Lambda_T^2(N)$, Y - proces prognozowalny lokalnie ograniczony oraz $M = \int X dN$. Wówczas $Y \in \Lambda_T^2(M), XY \in \Lambda_T^2(N)$ oraz $\int Y dM = \int XY dN$.

Dowód. a) Załóżmy wpierw, że Y jest procesem elementarnym postaci

$$Y = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]},$$

gdzie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < T$, zaś ξ_k są ograniczonymi zmiennymi $\mathcal{F}_{t_k}$-mierzalnymi. Wówczas

$$\begin{aligned}\int_0^t Y dM &= \sum_j \xi_j (M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j \wedge t}) = \sum_j \xi_j (\int_0^t \mathbb{1}_{[0,t_{j+1}]} X dN - \int_0^t \mathbb{1}_{[0,t_j]} X dN) \\ &= \sum_j \xi_j \int_0^t \mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]} X dN = \sum_j \int_0^t \xi_j \mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]} X dN \\ &= \int_0^t \sum_j \xi_j \mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]} X dN = \int_0^t Y X dN.\end{aligned}$$

Jeśli Y jest dowolnym ograniczonym procesem prognozowalnym, to

$$\mathbb{E}\int_0^T Y_s^2 d\langle M\rangle_s \leqslant \|Y\|_\infty^2 \mathbb{E}\int_0^T d\langle M\rangle_s = \|Y\|_\infty^2 \mathbb{E}\langle M\rangle_T = \|Y\|_\infty^2 \mathbb{E} M_T^2 < \infty,$$

więc $Y \in \mathcal{L}_T^2(M)$. Nietrudno też sprawdzić, że $XY \in \mathcal{L}_T^2(N)$. Możemy znaleźć procesy elementarne Y_n zbieżne do Y w $\mathcal{L}_T^2(M)$, co więcej możemy założyć, że $\|Y_n\|_\infty \leqslant \|Y\|_\infty$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\|XY - XY_n\|_{\mathcal{L}_T^2(N)}^2 &= \mathbb{E}\int_0^T (XY - XY_n)_s^2 d\langle N\rangle_s = \mathbb{E}\int_0^T (Y - Y_n)_s^2 X_s^2 d\langle N\rangle_s \\ &= \mathbb{E}\int_0^T (Y - Y_n)_s^2 d\langle M\rangle_s \to 0 = \|Y - Y_n\|_{\mathcal{L}_T^2(M)}^2,\end{aligned}$$

więc $Y_n X \to YX$ w $\mathcal{L}_T^2(N)$. Stąd dla $t \leqslant T$,

$$\int_0^t XY dN \xleftarrow{L_2} \int_0^t XY_n dN = \int Y_n dM \xrightarrow{L_2} \int_0^t Y dM.$$

b) Mamy $\int_0^t Y_0 dM = Y_0 M_t = Y_0 \int_0^t X dN = \int_0^t Y_0 X dN$, zatem rozpatrując $Y - Y_0$ zamiast Y możemy zakładać,że $Y_0 = 0$. Niech $\tau_n \nearrow T$ takie, że Y^{τ_n} jest ograniczone, $N^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ oraz $X\mathbb{1}_{[0,\tau_n]} \in \mathcal{L}_T^2(N^{\tau_n})$. Zauważmy, że

$$M^{\tau_n} = (\int X dN)^{\tau_n} = \int X \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} dN^{\tau_n},$$

zatem na mocy części a),

$$\begin{aligned}(\int Y dM)^{\tau_n} &= \int Y \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} dM^{\tau_n} = \int Y \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} dN^{\tau_n} \\ &= \int XY \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} dN^{\tau_n} = (\int XY dN)^{\tau_n}.\end{aligned}$$

Biorąc $n \to \infty$ dostajemy tezę. $\square$

Sformułujemy teraz pierwsze twierdzenie o całkowaniu przez części.

Twierdzenie 5. *Niech $M, N \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, wówczas*

$$M_tN_t = M_0N_0 + \int_0^t M_s dN_s + \int_0^t N_s dM_s + \langle M, N\rangle_t. \tag{4}$$

Stosując twierdzenie do $M = N$ dostajemy natychmiast.

Wniosek 6. *Jeśli $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, to*

$$\int_0^t M_s dM_s = \frac{1}{2}(M_t^2 - M_0^2) - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t.$$

Wniosek 7. *Niech $X, Y \in \Lambda^2_T$, $M = \int X dW$ oraz $N = \int Y dW$, wówczas*

$$\begin{aligned} M_tN_t &= \int_0^t M_s dN_s + \int_0^t N_s dM_s + \langle M, N\rangle_t \\ &= \int_0^t M_s Y_s dW_s + \int_0^t N_s X_s dW_s + \int_0^t X_s Y_s ds. \end{aligned}$$

Dowód. Pierwsza równość wynika z Twierdzenia 5, druga z Twierdzenia 4 oraz tego, że $\langle M, N\rangle = \int XY ds$. □

Dowód Twierdzenia 5. Całki $\int M dN$ i $\int N dM$ są dobrze określone, gdyż procesy M i N są ciągłe, zatem lokalnie ograniczone.

Możemy założyć, iż $M_0 = N_0 = 0$, gdyż $\langle M, N\rangle = \langle M - N_0, N - N_0\rangle$,

$$\begin{aligned} \int M dN &= \int M d(N - N_0) = \int (M - M_0) d(N - N_0) + \int M_0 d(N - N_0) \\ &= \int (M - M_0) d(N - N_0) + M_0(N - N_0), \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned} \int_0^t M dN + \int_0^t N dM = \int_0^t (M - M_0) d(N - N_0) + \int_0^t (N - M_0) d(M - M_0) \\ + M_0N_t + N_0M_t - 2N_0M_0. \end{aligned}$$

Wystarczy udowodnić, że teza zachodzi dla $M = N$, tzn.

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s dM_s + \langle M\rangle_t \text{ dla } M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}},\ M_0 = 0. \tag{5}$$

Jeśli bowiem zastosujemy (5) dla $M + N$ i $M - N$, odejmiemy stronami i podzielimy przez 4, to dostaniemy (4).

Wiemy (zob Uwaga 11.11), że (5) zachodzi przy dodatkowym założeniu ograniczoności M. W ogólnym przypadku określamy

$$\tau_n := \inf\{t > 0\colon |M_t| \geqslant n\} \wedge T,$$

wtedy $\tau_n \nearrow T$. Ponadto M^{τ_n} jest ograniczonym martyngałem lokalnym, zatem ograniczonym martyngałem, więc

$$\begin{aligned}(M^2)^{\tau_n} &= (M^{\tau_n})^2 = 2\int M^{\tau_n} dM^{\tau_n} + \langle M^{\tau_n}\rangle \\ &= 2\int M^{\tau_n}\mathbb{1}_{[0,\tau_n]} dM + \langle M\rangle^{\tau_n} = 2\int M\mathbb{1}_{[0,\tau_n]} dM + \langle M\rangle^{\tau_n} \\ &= (2\int M dM + \langle M\rangle)^{\tau_n}.\end{aligned}$$

Przechodząc z $n \to \infty$ dostajemy (5). □

Definicja 8. *Przez $\mathcal{V}^c$ oznaczamy procesy ciągłe, adaptowalne, których trajektorie mają wahanie skończone na każdym przedziale $[0, t]$ dla $t < T$.*

Udowodnimy teraz kolejne twierdzenie o całkowaniu przez części.

Fakt 9. *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}, A \in \mathcal{V}^c$, wówczas*

$$M_t A_t = M_0 A_0 + \int_0^t A_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s.$$

Dowód. Jak w dowodzie Twierdzenia 5 możemy założyć, że $M_0 = A_0 = 0$.

Załóżmy wpierw, że M i N są ograniczone. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}M_t A_t &= \sum_{j=1}^n (M_{tj/n} - M_{t(j-1)/n}) \sum_{k=1}^n (A_{tk/n} - A_{t(k-1)/n} \\ &= \sum_{j=1}^n (M_{tj/n} - M_{t(j-1)/n})(A_{tj/n} - A_{t(j-1)/n}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n M_{t(j-1)/n}(A_{tj/n} - A_{t(j-1)/n}) + \sum_{j=1}^n (M_{tj/n} - M_{t(j-1)/n})A_{t(j-1)/n} \\ &= I_n + II_n + III_n.\end{aligned}$$

Składnik II_n dąży prawie na pewno do $\int_0^t M dA$ (definicja całki Riemanna-Stieltjesa). Nietrudno sprawdzić, że procesy elementarne

$$A_n = \sum_{j=1}^n A_{t(j-1)/n}\mathbb{1}_{(t(j-1)/n, tj/n]}$$

zbiegają w $\mathcal{L}^2_t(M)$ do A, stąd $III_n = \int_0^t A_n dM$ zbiega w L^2 do $\int_0^t AdM$. Zauważmy też, że

$$|I_n|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n (M_{tj/n} - M_{t(j-1)/n})^2 \sum_{j=1}^n (A_{tj/n} - A_{t(j-1)/n})^2$$

pierwszy składnik powyżej dąży do $\langle M\rangle_t$ w L_2 (w szczególności jest więc ograniczony w L_2), drugi dąży do zera p.n. (proces A jest ciągły i ma ograniczone wahanie na $[0,t]$), stąd I_n dąży do 0 według prawdopodobieństwa. Zatem

$$M_t A_t = I_n + II_n + III_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t M dA + \int_0^t AdM.$$

Jeśli M i A nie są ograniczone, to określamy

$$\tau_n = \inf\{t > 0\colon |M_t| \geqslant n\} \wedge \inf\{t > 0\colon |A_t| \geqslant n\} \wedge T.$$

Mamy $|A^{\tau_n}| \leqslant n$, $|M^{\tau_n}| \leqslant n$, więc z poprzednio rozważonego przypadku

$$(MA)^{\tau_n} = \int A^{\tau_n} dM^{\tau_n} + \int M^{\tau_n} dA^{\tau_n} = (\int AdM + \int MdA)^{\tau_n},$$

przechodząc z $n \to \infty$ dostajemy tezę. □

Ostatnie twierdzenie o całkowaniu przez części jest nietrudną konsekwencją definicji całki Riemanna-Stieltjesa.

Fakt 10. *Załóżmy, że $A, B \in \mathcal{V}^c$, wówczas*

$$A_t B_t = A_0 B_0 + \int_0^t A_s dB_s + \int_0^t B_s dA_s.$$

Definicja 11. *Proces $Z = (Z_t)_{t<T}$ nazywamy* ciągłym semimartyngałem, *jeśli da się przedstawić w postaci $Z = Z_0 + M + A$, gdzie Z_0 jest zmienną $\mathcal{F}_0$-mierzalna, $M \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$, $A \in \mathcal{V}^c$ oraz $A_0 = M_0 = 0$.*

Uwaga 12. Rozkład semimartyngału jest jednoznaczny (modulo procesy nieodróżnialne).

Dowód. Jeśli $Z = Z_0 + M + A = Z_0 + M' + A'$, to $M - M' = A' - A$ jest ciągłym martyngałem lokalnym, startującym z zera o ograniczonym wahaniu na $[0,t]$ dla $t < T$, zatem jest stale równy 0. □

Przykłady.

Proces Itô, tzn. proces postaci $Z = Z_0 + \int XdW + \int Yds$, gdzie $X \in \Lambda_T^2$, Y prognozowalny taki, że $\int_0^t |Y_s|ds < \infty$ p.n. dla $t < T$ jest semimartyngałem. Z twierdzenia Dooba-Meyera wynika, że kwadrat martyngału jest semimartyngałem.

Definicja 13. *Jeśli $Z = Z_0 + M + A$ jest ciągłym semimartyngałem, to określamy $\int XdZ := \int XdM + \int XdA$, gdzie pierwsza całka to całka stochastyczna, a druga całka Stieltjesa.*

Twierdzenie 14. *Jeśli $Z = Z_0 + M + A$ oraz $Z' = Z'_0 + M' + A'$ są ciągłymi semimartyngałami, to ZZ' też jest semimartyngałem oraz*

$$ZZ' = Z_0 Z'_0 + \int ZdZ' + \int Z'dZ + \langle M, M' \rangle.$$

Dowód. Mamy $ZZ' = Z_0 Z'_0 + MM' + MA' + AM' + AA'$ i stosujemy twierdzenia o całkowaniu przez części (Twierdzenie 12.5, Fakty 12.9 i 12.10). □

13 Wzór Itô

Podczas tego wykładu udowodnimy fundamentalne twierdzenie dla analizy stochastycznej. Pokazuje ono, że klasa semimartyngałów ciągłych jest zamknięta ze względu na funkcje gładkie oraz podaje wzór na różniczkę stochastyczną $df(X)$.

Twierdzenie 1 (Wzór Itô)**.** *Załóżmy, że $Z = Z_0 + M + A$ jest ciągłym semimartyngałem, f funkcją klasy C^2 na $\mathbb{R}$. Wówczas $f(Z)$ też jest semimartyngałem oraz*

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s)d\langle M \rangle_s. \tag{6}$$

Dowód. Wszystkie całki w (6) są dobrze zdefiniowane, bo procesy $f'(Z_s)$ i $f''(Z_s)$ są ciągłe, zatem $f'(Z_s) \in \Lambda_T^2(M)$ oraz $f''(Z_s)$ jest całkowalne względem $\langle M \rangle$.

Dowód wzoru Itô będzie polegał na redukcji (6) do coraz prostszych przypadków.

i) Możemy założyć, że zmienna Z_0 jest ograniczona.

Istotnie połóżmy $Z_0^{(n)} := (Z_0 \wedge n) \vee -n$ oraz $Z^{(n)} := Z_0^{(n)} + M + A$. Zauważmy, że $\int XdZ = \int XdZ^{(n)}$, więc, jeśli wiemy, iż (6) zachodzi, gdy Z_0

ograniczone, to

$$f(Z_t^{(n)}) = f(Z_0^{(n)}) + \int_0^t f'(Z_s^{(n)})dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s^{(n)})d\langle M\rangle_s. \tag{7}$$

Mamy

$$|f'(Z_s^{(n)})| \leqslant \sup_n |f'(Z_s^{(n)})| := Y_s,$$

proces Y jest prognozowalny jako supremum procesów prognozowalnych, ponadto

$$\sup_n \sup_{s\leqslant t} |Z_s^{(n)}| \leqslant |Z_0| + \sup_{s\leqslant t}|M_s| + \sup_{s\leqslant t}|A_s| < \infty \text{ p.n.}.$$

Zatem z ciągłości f', $\sup_{s\leqslant t}|Y_s| < \infty$ p.n., skąd $Y \in \Lambda_T^2(M)$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dla całek stochastycznych,

$$\int_0^t f'(Z_s^{(n)})dM_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t f'(Z_s)dM_s$$

ponadto z twierdzenia Lebesgue'a dla zwykłej całki,

$$\int_0^t f'(Z_s^{(n)})dA_s \xrightarrow{\text{p.n.}} \int_0^t f'(Z_s)dA_s.$$

Podobnie $\sup_n \sup_{s\leqslant t}|f''(Z_s^{(n)})| < \infty$ p.n. i ponownie stosując twierdzenie Lebesgue'a dostajemy

$$\int_0^t f''(Z_s^{(n)})d\langle M\rangle_s \xrightarrow{\text{p.n.}} \int_0^t f''(Z_s)d\langle M\rangle_s.$$

Oczywiście $f(Z_t^{(n)}) \to f(Z_t)$ p.n., więc możemy przejść w (7) z n do ∞, by dostać (6).

ii) Możemy założyć że Z ograniczony.

Istotnie niech Z semimartyngał taki, że Z_0 ograniczony, połóżmy

$$\tau_n := \inf\{t > 0\colon |Z_t| \geqslant n\} \wedge T,$$

wówczas $Z^{(n)} := Z_0 + M^{\tau_n} + A^{\tau_n}$ jest ciągłym ograniczonym semimartyngałem oraz $Z_t^{(n)} \to Z_t$ p.n.. Jeśli (6) zachodzi w przypadku ograniczonym, to

$$
\begin{aligned}
f(Z_t^{(n)}) &= f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s^{(n)}) dZ_s^{(n)} + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s^{(n)}) d\langle M^{\tau_n}\rangle_s \\
&= f(Z_0) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_s^{(n)}) \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z_s^{(n)}) \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} d\langle M\rangle_s^{\tau_n} \\
&= f(Z_0) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_s) \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z_s) \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} d\langle M\rangle_s \\
&= f(Z_0) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_s) dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z_s) d\langle M\rangle_s.
\end{aligned}
$$

Biorąc $n \to \infty$ dostajemu (6).

iii) Możemy założyć że Z ograniczony, a f jest wielomianem.

Możemy zakładać, że $\|Z\|_\infty \leqslant C < \infty$. Jeśli $f \in C^2$, to istnieje ciąg wielomianów f_n taki, że

$$
|f_n(x) - f(x)|, |f_n'(x) - f'(x)|, |f_n''(x) - f''(x)| \leqslant \frac{1}{n} \text{ dla } x \in [-C, C].
$$

Wtedy $f_n(Z_s) \to f(Z_s), f_n'(Z_s) \to f'(Z_s), f_n''(Z_s) \to f''(Z_s)$ jednostajnie oraz $|f_n'(Z_s)| \leqslant \sup_n \sup_{|x|\leqslant C} |f_n'(x)| \leqslant \sup_{|x|\leqslant C} |f'(x)| + 1 < \infty$, więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej,

$$
\begin{aligned}
f(Z_s) \leftarrow f_n(Z_s) &= f_n(Z_0) + \int_0^t f_n'(Z_s) dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(Z_s) d\langle M\rangle_s \\
&\to f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s) dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s) d\langle M\rangle_s.
\end{aligned}
$$

iv) Z liniowości obu stron (6) wystarczy zatem rozpatrywać przypadek Z ograniczonych oraz $f(x) = x^n$. Pokażemy ten wzór przez indukcję po n.

Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy więc, że (6) zachodzi dla $f(x) = x^n$ pokażemy go dla $g(x) = xf(x)$. Zauważmy, że $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ oraz $g''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$. Ze wzoru na całkowanie przez części,

$$
\begin{aligned}
g(Z_t) = Z_t f(Z_t) &= Z_0 f(Z_0) + \int_0^t Z_s df(Z)_s + \int_0^t f(Z) dZ_s \\
&\quad + \Big\langle \int f'(Z) dM, M \Big\rangle_t \\
&= g(Z_t) + \int_0^t (Z_s f'(Z_s) dZ_s + \frac{1}{2} Z_s f''(Z_s) d\langle M\rangle_s) + \int_0^t f(Z) dZ_s \\
&\quad + \int_0^t f'(Z_s) d\langle M\rangle_s \\
&= g(Z_t) + \int_0^t g'(Z_t) dZ_t + \frac{1}{2}\int_0^t g''(Z_t) d\langle M\rangle_s.
\end{aligned}
$$

$\square$

Wniosek 2. *Dla $f \in C^2(\mathbb{R})$,*

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds.$$

W podobny sposób jak w przypadku jednowymiarowym możemy udowodnić wielowymiarową wersję twierdzenia Itô.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2 oraz $Z = (Z^{(1)}, \ldots, Z^{(d)})$, gdzie $Z^{(i)} = Z_0^{(i)} + M^{(i)} + A^{(i)}$ są ciągłymi semimartyngałami dla $i = 1, \ldots, d$. Wówczas $f(Z)$ jest semimartyngałem oraz*

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(Z_s)dZ_s^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(Z_s)d\langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle_s.$$

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że M jest ciągłym martyngałem lokalnym takim, że $M_0 = 0$ oraz $M_t^2 - t$ jest martyngałem lokalnym. Wówczas M jest procesem Wienera.*

Dowód. Musimy wykazać, że dla $s < t$, $M_t - M_s$ jest niezależne od $\mathcal{F}_s$ oraz ma rozkład $\mathcal{N}(0, t-s)$. W tym celu wystarczy wykazać, że

$$\mathbb{E}(e^{ih(M_t - M_s)}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2} \text{ dla } t > s \geqslant 0,\ h \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Itotnie (8) implikuje, że $\mathbb{E}e^{ih(M_t-M_s)} = \exp(-\frac{1}{2}(t-s)h^2)$ dla $h \in \mathbb{R}$, czyli $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Ponadto dla dowolnej $\mathcal{F}_s$-mierzalnej zmiennej η oraz $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{ih_1(M_t-M_s)+ih_2\eta} &= \mathbb{E}[e^{ih_2\eta}\mathbb{E}(e^{ih_1(M_t-M_s)}|\mathcal{F}_s)] \\ &= \mathbb{E}[e^{ih_2\eta}e^{-\frac{1}{2}(t-s)h_1^2}] = \mathbb{E}e^{ih_2\eta}\mathbb{E}e^{ih_1(M_t-M_s)}.\end{aligned}$$

Zatem $M_t - M_s$ jest niezależne od zmiennych $\mathcal{F}_s$-mierzalnych, czyli jest niezależne od $\mathcal{F}_s$.

Zastosujmy wzór Itô dla $f(x) = e^{ihx}$ (wzór Itô zachodzi też dla funkcji zespolonych, wystarczy dodać odpowiednie równości dla części rzeczywistej i urojonej),

$$\begin{aligned}e^{ihM_t} &= f(M_t) = f(M_0) + \int_0^t f'(M_u)dM_u + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_u)d\langle M\rangle_u \\ &= 1 + ih\int_0^t e^{ihM_u}dM_u - \frac{h^2}{2}\int_0^t e^{ihM_u}du \\ &= e^{ihM_s} + ih\int_s^t e^{ihM_u}dM_u - \frac{h^2}{2}\int_s^t e^{ihM_u}du.\end{aligned}$$

Niech $N := \int_0^t e^{ihM} dM$, wówczas N jest martyngałem lokalnym oraz z nierówności Dooba,

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} N_s^2 \leqslant 4\mathbb{E} \int_0^t |e^{ihM_u}|^2 du = 4t,$$

czyli N jest na każdym przedziale skończonym majoryzowany przez zmienną całkowalną, zatem jest martyngałem. Ustalmy $A \in \mathcal{F}_s$, wtedy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{ihM_t} \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[e^{ihM_s} \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[(N_t - N_s)\mathbb{1}_A] - \frac{h^2}{2}\mathbb{E}[\int_s^t e^{ihM_u} du \mathbb{1}_A] \\ &= \mathbb{E}[e^{ihM_s} \mathbb{1}_A] - \frac{h^2}{2} \int_s^t \mathbb{E}[e^{ihM_u} \mathbb{1}_A] du.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy $g(u) = \mathbb{E}[e^{ihM_{s+u}} \mathbb{1}_A]$, wtedy

$$g(t-s) = g(0) - \frac{h^2}{2} \int_s^t g(u-s) du,$$

czyli

$$g(r) = g(0) - \frac{h^2}{2} \int_0^r g(u) du.$$

Funkcja g jest ciągła, a zatem z powyższego wzoru jest różniczkowalna i spełnia równanie różniczkowe

$$g'(r) = -\frac{h^2}{2} g(r)$$

Zatem $g(r) = g(0) \exp(-\frac{1}{2}h^2 r)$ dla $r \geqslant 0$, czyli

$$\mathbb{E}[e^{ihM_t} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[e^{ihM_s} \mathbb{1}_A] e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)} = \mathbb{E}[e^{ihM_s - \frac{1}{2}h^2(t-s)} \mathbb{1}_A],$$

stąd $\mathbb{E}(e^{ihM_t} | \mathcal{F}_s) = \exp(ihM_s - \frac{1}{2}h^2(t-s))$ p.n. i

$$\mathbb{E}(e^{ih(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s) = e^{-ihM_s} \mathbb{E}(e^{ihM_t} | \mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)}.$$

$\square$

Uwaga 5. Równoważnie Twierdzenie Levy'go można sformułować w następujący sposób:
Jeśli $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$ oraz $\langle M \rangle = t$, to $M - M_0$ jest procesem Wienera.

Uwaga 6. Założenie ciągłości M jest fundamentalne. Jeśli położymy $M_t = N_t - t$, gdzie N jest procesem Poissona z parametrem 1, to $M_t^2 - t$ jest martyngałem, a oczywiście M nie jest procesem Wienera.

Można też udowodnić wielowymiarową wersję twierdzenia Levy'ego.

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że $M^{(1)},\ldots,M^{(d)}$ są ciągłymi martyngałami lokalnymi takim, że $M_0^{(i)}=0$ oraz $M_t^{(i)}M_t^{(j)}-\delta_{i,j}t$ są martyngałami lokalnymi dla $1\leqslant i,j\leqslant d$. Wówczas $M=(M^{(1)},\ldots,M^{(d)})$ jest d-wymiarowym procesem Wienera.*

13.1 *Charakteryzacja procesu Wienera za pomocą martyngałów wykładniczych

Twierdzenie 8. *Załóżmy, że M jest ciągły, adaptowalny oraz $M_0=0$. Wówczas M jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy gdy dla wszystkich $\lambda\in\mathbb{R}$, $\exp(\lambda M_t-\lambda^2 t/2)$ jest martyngałem lokalnym.*

Dowód. To, że $\exp(\lambda W_t-\lambda^2 t/2)$ jest martyngałem jest prostym i dobrze znanym faktem. Wystarczy więc udowodnić implikację "$\Leftarrow$".

Określmy $\tau_n:=\inf\{t>0\colon |M_t|\geqslant n\}\wedge n$, wówczas $\tau_n\nearrow\infty$ oraz dla wszystkich λ proces $X_t(\lambda)=\exp(\lambda M_{t\wedge\tau_n}-\lambda^2 t\wedge\tau_n/2)$ jest ograniczonym martyngałem lokalnym (z dołu przez 0, z góry przez $e^{|\lambda|n}$), a więc martyngałem. Stąd

$$\mathbb{E}[X_t(\lambda)\mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[X_s(\lambda)\mathbb{1}_A],\qquad \text{dla } s<t,\ A\in\mathcal{F}_s.$$

Zauważmy, że $X_t(0)=1$ oraz

$$|\frac{dX_t(\lambda)}{d\lambda}|=|X_t(\lambda)(M_{t\wedge\tau_n}-\lambda t\wedge\tau_n)|\leqslant e^{\lambda_0 n}(n+\lambda_0 n),\qquad \text{dla } |\lambda|\leqslant\lambda_0.$$

Stąd z Twierdzenia Lebesque'a o zbieżności zmajoryzowanej dla $t<s$, $A\in\mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t(\lambda)(M_{t\wedge\tau_n}-\lambda t\wedge\tau_n)\mathbb{1}_A]&=\lim_{h\to 0}\mathbb{E}[\frac{1}{h}(X_t(\lambda+h)-X_t(\lambda))\mathbb{1}_A]\\&=\lim_{h\to 0}\mathbb{E}[\frac{1}{h}(X_s(\lambda+h)-X_s(\lambda))\mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[X_s(\lambda)(M_{s\wedge\tau_n}-\lambda s\wedge\tau_n)\mathbb{1}_A].\end{aligned}$$

Biorąc $\lambda=0$ dostajemy $\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau_n}\mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[M_{s\wedge\tau_n}\mathbb{1}_A]$, czyli M^{τ_n} jest martyngałem, a więc $M\in\mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$.

By skorzystać z twierdzenia Levy'ego i zakończyć dowód musimy jeszcze wykazać, że $M_t^2-t\in\mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$. Szacujemy dla $|\lambda|\leqslant\lambda_0$,

$$|\frac{d^2X_t(\lambda)}{d\lambda^2}|=|X_t(\lambda)[(M_{t\wedge\tau_n}-t\wedge\tau_n)^2-t\wedge\tau_n]|\leqslant e^{\lambda_0 n}[(n+\lambda_0 n)^2+n],$$

skąd w podobny sposób jak dla pierwszych pochodnych dowodzimy, że dla $t<s$, $A\in\mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}[X_t(\lambda)((M_{t\wedge\tau_n}-\lambda t\wedge\tau_n)^2-t\wedge\tau_n)\mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[X_s(\lambda)((M_{s\wedge\tau_n}-\lambda s\wedge\tau_n)^2-s\wedge\tau_n)\mathbb{1}_A].$$

Podstawiając $\lambda = 0$ dostajemy

$$\mathbb{E}[(M_{t\wedge\tau_n}^2 - t\wedge\tau_n)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[(M_{s\wedge\tau_n}^2 - s\wedge\tau_n)\mathbb{1}_A],$$

czyli $(M_t^2 - t)^{\tau_n}$ jest martyngałem, więc $M_t^2 - t \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$. □

14 Stochastyczne Równania Różniczkowe

14.1 Jednorodne równania stochastyczne

Definicja 1. *Załóżmy, że $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, a ξ zmienną losową $\mathcal{F}_s$-mierzalną. Mówimy, że proces $X = (X_t)_{t\in[s,T)}$ rozwiązuje* jednorodne równanie stochastyczne

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_s = \xi, \tag{9}$$

jeśli

$$X_t = \xi + \int_s^t b(X_r)dr + \int_s^t \sigma(X_r)dW_r, \quad t \in [s,T).$$

Uwaga 2. Przyjeliśmy, że b i σ są funkcjami ciągłymi, by uniknąć problemów związanych z mierzalnością i lokalną ograniczonością procesów $b(X_r)$ i $\sigma(X_r)$. Rozważa się jednak również stochastyczne równania różniczkowe z nieciągłymi współczynnikami.

Uwaga 3. Wprowadzając nowy proces $\tilde{X}_t := X_{t+s}$, $t \in [0, T-s)$ oraz filtrację $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{t+s}$ zamieniamy równanie różniczkowe (9) na podobne równanie dla $\tilde{X}$ z warunkiem początkowym $\tilde{X}_0 = \xi$.

Definicja 4. *Proces X rozwiązujący równanie* (9) *nazywamy* dyfuzją startująca z ξ*. Funkcję σ nazywamy* współczynnikiem dyfuzji*, a funkcję b* współczynnikiem dryfu*.*

Przypomnijmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest lipschitzowska ze stałą L, jeśli $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|$ dla wszystkich x, y. Lipschitzowskość implikuje też, że

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + L|x| \leqslant \tilde{L}\sqrt{1+x^2}$$

gdzie można przyjąć np. $\tilde{L} = 2\max\{|f(0)|, L\}$.

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że funkcje b i σ są lipschitzowskie na $\mathbb{R}$, wówczas równanie stochastyczne* (9) *ma co najwyżej jedno rozwiązanie (z dokładnością do nierozróżnialności).*

Dowód. Bez straty ogólności możemy zakładać, że $s = 0$ oraz σ, b są lipschitzowskie z tą samą stałą L.

Załóżmy, że X_t i Y_t są rozwiązaniami, wówczas

$$X_t - Y_t = \int_0^t (b(X_r) - b(Y_r))dr + \int_0^t (\sigma(X_r) - \sigma(Y_r))dW_r.$$

Krok I. Załóżmy dodatkowo, że funkcja $u \mapsto \mathbb{E}|X_u - Y_u|^2$ jest skończona i ograniczona na przedziałach $[0, t]$, $t < T$.

Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t - Y_t)^2 &\leqslant 2\mathbb{E}\Big(\int_0^t (b(X_r) - b(Y_r))dr\Big)^2 + 2\mathbb{E}\Big(\int_0^t (\sigma(X_r) - \sigma(Y_r)dW_r\Big)^2 \\ &= I + II.\end{aligned}$$

Z warunku Lipschitza i nierówności Schwarza

$$I \leqslant 2L^2\mathbb{E}\Big(\int_0^t |X_r - Y_r|dr\Big)^2 \leqslant 2L^2 t \int_0^t \mathbb{E}(X_r - Y_r)^2 dr.$$

By oszacować II zauważmy, że $|\sigma(X_r) - \sigma(Y_r)| \leqslant L|X_r - Y_r|$, więc $\sigma(X_r) - \sigma(Y_r) \in \mathcal{L}_t^2$. Stąd

$$II = 2\mathbb{E}\int_0^t (\sigma(X_r) - \sigma(Y_r))^2 \leqslant 2L^2 \int_0^t \mathbb{E}(X_r - Y_r)^2 dr.$$

Ustalmy $t_0 < T$, wówczas z powyższych oszacowań wynika, że

$$\mathbb{E}(X_t - Y_t)^2 \leqslant C\int_0^t \mathbb{E}(X_r - Y_r)^2 dr \quad \text{dla } t \leqslant t_0,$$

gdzie $C = C(t_0) = 2L^2(t_0 + 1)$. Iterując powyższą nierówność dostajemy dla $t \leqslant t_0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t - Y_t)^2 &\leqslant C\int_0^t \mathbb{E}(X_{r_1} - Y_{r_1})^2 dr_1 \leqslant C^2 \int_0^t \int_0^{r_1} \mathbb{E}(X_{r_2} - Y_{r_2})^2 dr_2 \\ &\leqslant \ldots \leqslant C^k \int_0^t \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_{k-1}} \mathbb{E}(X_{r_k} - Y_{r_k})^2 dr_k \ldots dr_1 \\ &\leqslant C^k \sup_{r \leqslant t} \mathbb{E}(X_r - Y_r)^2 \int_0^t \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_{k-1}} dr_k \ldots dr_1 \\ &= C^k \sup_{r \leqslant t} \mathbb{E}(X_r - Y_r)^2 \frac{t^k}{k!} \overset{k\mapsto\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Stąd dla wszystkich $t < T$, $\mathbb{E}(X_t - Y_t)^2 = 0$, czyli $X_t = Y_t$ p.n., a więc z ciągłości obu procesów, X i Y są nieodróżnialne.

Krok II. X i Y dowolne. Określmy

$$\tau_n := \inf\{t \geqslant s \colon |X_t| + |Y_t| \geqslant n\}$$

i zauważmy, że $|X_t|\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}, |X'_t|\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \leqslant n$. Ponieważ w zerze oba procesy się pokrywają, więc $|X_t^{\tau_n} - Y_t^{\tau_n}| \leqslant 2n$, stąd $|\sigma(X_t^{\tau_n}) - \sigma(Y_t^{\tau_n})| \leqslant 2Ln$ i $\sigma(X^{\tau_n}) - \sigma(Y^{\tau_n}) \in \mathcal{L}_t^2$ dla $t < T$. Mamy

$$\begin{aligned} X_{t\wedge\tau_n} - Y_{t\wedge\tau_n} &= \int_0^{t\wedge\tau_n} (b(X_r) - b(Y_r))dr + \int_0^{t\wedge\tau_n} (\sigma(X_r) - \sigma(Y_r))dW_r \\ &= \int_0^{t\wedge\tau_n} (b(X_r^{\tau_n}) - b(Y_r^{\tau_n}))dr + \int_0^{t\wedge\tau_n} (\sigma(X_r^{\tau_n}) - \sigma(Y_r^{\tau_n}))dW_r. \end{aligned}$$

Naśladując rozumowanie z kroku I dostajemy $X_{t\wedge\tau_n} = Y_{t\wedge\tau_n}$ p.n., przechodząc z $n \to \infty$ mamy $X_t = Y_t$ p.n.. □

Twierdzenie 6. *Załóżmy, że funkcje b i σ są lipschitzowskie na $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, wówczas równanie stochastyczne* (9) *ma dokładnie jedno rozwiązanie $X = (X_t)_{t\geqslant s}$. Co więcej $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ oraz funkcja $t \to \mathbb{E}X_t^2$ jest ograniczona na przedziałach ograniczonych.*

Dowód. Jak w poprzednim twierdzeniu zakładamy, że $s = 0$. Jednoznaczność rozwiązania już znamy. By wykazać jego istnienie posłużymy się konstrukcją z użyciem *metody kolejnych przybliżeń*. Określamy $X_t^{(0)}(\omega) := \xi(\omega)$ oraz indukcyjnie

$$X_t^{(n)} := \xi + \int_0^t b(X_r^{(n-1)})dr + \int_0^t \sigma(X_r^{(n-1)})dW_r. \tag{10}$$

Definicja jest poprawna (tzn. całki są dobrze określone), gdyż $X_t^{(n)}$ są procesami ciągłymi, adaptowalnymi. Ponadto indukcyjnie pokazujemy, że funkcja $r \to \mathbb{E}|X_r^{(n)}|^2$ jest ograniczona na przedziałach skończonych:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_t^{(n)}|^2 &\leqslant 3\Big[\mathbb{E}\xi^2 + \mathbb{E}\Big(\int_0^t |b(X_r^{(n-1)})|dr\Big)^2 + \mathbb{E}\Big(\int_0^t \sigma(X_r^{(n-1)})dW_r\Big)^2\Big] \\ &\leqslant 3\Big[\mathbb{E}\xi^2 + t\mathbb{E}\int_0^t |b(X_r^{(n-1)})|^2 dr + \mathbb{E}\int_0^t |\sigma(X_r^{(n-1)})|^2 dr\Big] \\ &\leqslant 3\Big[\mathbb{E}\xi^2 + \tilde{L}^2(1+t)\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\mathbb{E}|X_r^{(n-1)}|^2\Big]. \end{aligned}$$

Zatem $X^{(n)} \in \mathcal{L}_t^2$, a więc również $\sigma(X^{(n)}) \in \mathcal{L}_t^2$.

Zauważmy, że wobec nierówności $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ i niezależności ξ i W_t, dla $t \leqslant t_0$ zachodzi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^2 &= \mathbb{E}\Big(\int_0^t b(\xi)dr + \int_0^t \sigma(\xi)dW_r\Big)^2 = \mathbb{E}(b(\xi)t + \sigma(\xi)W_t)^2 \\ &\leqslant 2t^2\mathbb{E}b(\xi)^2 + 2\mathbb{E}\sigma(\xi)^2\mathbb{E}W_t^2) \leqslant 2\tilde{L}^2(1+\mathbb{E}\xi^2)(t+t^2) \leqslant C,\end{aligned}$$

gdzie $C = C(t_0) = 2\tilde{L}^2(1+\mathbb{E}\xi^2)(t_0+t_0^2)$. Podobnie szacujemy dla $t \leqslant t_0$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^t (b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)}))dr + \int_0^t (\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r\Big]^2 \\ &\leqslant 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t |b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)})|dr\Big]^2 + 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t (\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r\Big]^2 \\ &\leqslant 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t L|X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|dr\Big]^2 + 2\mathbb{E}\int_0^t |\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)})|^2 dr \\ &\leqslant 2L^2(t+1)\mathbb{E}\int_0^t |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2 dr \leqslant C_1 \int_0^t \mathbb{E}|X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2 dr,\end{aligned}$$

gdzie $C_1 = C_1(t_0) = 2L^2(t_0+1)$. Iterując to szacowanie dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 &\leqslant C_1^2 \int_0^t \int_0^{r_1} \mathbb{E}|X_{r_2}^{(n-1)} - X_{r_2}^{(n-2)}|^2 dr_2 dr_1 \\ &\leqslant \dots \leqslant C_1^n \int_0^t \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_{n-1}} \mathbb{E}|X_{r_n}^{(1)} - X_{r_n}^{(0)}|^2 dr_n \dots dr_1 \\ &\leqslant C_1^n C \int_0^t \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_{n-1}} dr_n \dots dr_1 = CC_1^n \frac{t^n}{n!},\end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że $\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\|_{L_2}^2 \leqslant CC_1^n \frac{t^n}{n!}$ dla $t \leqslant t_0$. Ponieważ szereg $\sum_n (CC_1^n \frac{t^n}{n!})^{1/2}$ jest zbieżny, więc $(X_t^{(n)})_{n\geqslant 0}$ jest ciągiem Cauchy'ego w L^2, czyli jest zbieżny. Z uwagi na jednostajność szacowań wykazaliśmy istnienie X_t takiego, że

$$X_t^{(n)} \to X_t \text{ w } L^2 \text{ jednostajnie na przedziałach ograniczonych.}$$

Stąd też wynika, że $t \mapsto \mathbb{E}X_t^2$ jest ograniczona na przedziałach ograniczonych.

Wykażemy teraz, że $X_t^{(n)}$ z prawdopodobieństwem 1 zbiega do X_t niemal jednostajnie. Zauważmy, że dla $t_0 < \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\leqslant t_0}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2^n}\Big) &\leqslant \mathbb{P}\Big(\sup_{t\leqslant t_0}\int_0^t |b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)})|dr \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\Big) \\ &+ \mathbb{P}\Big(\sup_{t\leqslant t_0}\Big|\int_0^t (\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r\Big| \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\Big) = I + II.\end{aligned}$$

Mamy

$$
\begin{aligned}
I &\leqslant \mathbb{P}\Big(\int_0^{t_0} |b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)})|dr \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\\
&\leqslant 4^{n+1}\mathbb{E}\Big(\int_0^{t_0} |b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)})|dr\Big)^2\\
&\leqslant 4^{n+1}L^2\mathbb{E}\Big(\int_0^{t_0} |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|dr\Big)^2 \leqslant 4^{n+1}L^2 t_0\mathbb{E}\int_0^{t_0} |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2 dr\\
&\leqslant 4^{n+1}L^2 t_0 \int_0^{t_0} CC_1^{n-1}\frac{r^{n-1}}{(n-1)!}dr = 4^{n+1}L^2 CC_1^{n-1}t_0^{n+1}\frac{1}{n!}.
\end{aligned}
$$

Z nierówności Dooba dla martyngału $\int(\sigma(X^{(n)}) - \sigma(X^{(n-1)}))dW$ dostajemy

$$
\begin{aligned}
II &\leqslant 4^{n+1}\mathbb{E}\sup_{t\leqslant t_0}\Big|\int_0^{t}(\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r\Big|^2\\
&\leqslant 4^{n+2}\mathbb{E}\Big|\int_0^{t_0}(\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r\Big|^2\\
&= 4^{n+2}\mathbb{E}\int_0^{t_0}(\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))^2 dr \leqslant 4^{n+2}L^2\mathbb{E}\int_0^{t_0} |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2 dr\\
&\leqslant 4^{n+2}L^2 CC_1^{n-1}t_0^{n}\frac{1}{n!}.
\end{aligned}
$$

Przyjmując

$$
A_n := \Big\{\sup_{t\leqslant t_0}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2^n}\Big\}
$$

dostajemy

$$
\sum_n \mathbb{P}(A_n) \leqslant \sum_n 4^{n+1}(4+t_0)L^2 CC_1^{n-1}t_0^{n}\frac{1}{n!} < \infty,
$$

więc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Zatem dla $t_0 < \infty$ $X^{(n)}$ zbiega jednostajnie na $[0, t_0]$ z prawdopodobieństwem 1, czyli z prawdopodobieństwem 1 zbiega niemal jednostajnie. Ewentualnie modyfikując X i $X^{(n)}$ na zbiorze miary zero widzimy, że X jest granicą niemal jednostajną $X^{(n)}$, czyli X ma trajektorie ciągłe.

Ze zbieżności $X_r^{(n)}$ do X_r w L^2 jednostajnej na $[0,t]$ oraz lipschitzowskości b i σ łatwo wynika zbieżność w L^2, $\int_0^t b(X_r^{(n)})dr$ i $\int_0^t \sigma(X_r^{(n)})dr$ do odpowiednio $\int_0^t b(X_r)dr$ i $\int_0^t \sigma(X_r)dW_r$, zatem możemy przejść w (10) do granicy by otrzymać dla ustalonego $t < T$

$$
X_t := \xi + \int_0^t b(X_r)dr + \int_0^t \sigma(X_r)dW_r \text{ p.n.}
$$

Oba procesy X i $\xi + \int b(X)dr + \int \sigma(X)dW$ są ciągłe, zatem są nierozróżnialne. $\square$

Przykład 1. Stosując wzór Itô łatwo sprawdzić, że proces $X_t = \xi \exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t)$ jest rozwiązaniem równania

$$dX_t = \lambda X_t dW_t, \quad X_0 = \xi.$$

Jest to jedyne rozwiązanie tego równania, gdyż $b = 0$ oraz $\sigma(x) = \lambda x$ są funkcjami lipschitzowskimi.

Przykład 2. Proces

$$X_t = e^{bt} xi + s \int_0^t e^{b(t-s)} dW_s$$

jest rozwiązaniem równania

$$dX_t = bX_t dt + s^2 dW_t, \quad X_0 = \xi.$$

Jest to jedyne rozwiązanie, gdyż funkcje $b(x) = bx$ oraz $\sigma(x) = s^2$ są lipschitzowskie. Jeśli $b < 0$ oraz ξ ma rozkład $\mathcal{N}(0, -\frac{1}{2b}s^2)$, to proces X jest stacjonarny (proces Ornsteina-Uhlenbecka).

14.2 Równania niejednorodne

Często współczynniki równania zależą nie tylko od x, ale i od czasu.

Definicja 7. *Załóżmy, że $b, \sigma \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, a ξ zmienną losową $\mathcal{F}_s$-mierzalną. Mówimy, że proces $X = (X_t)_{t \in [s,T)}$ rozwiązuje* równanie stochastyczne

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_s = \xi, \tag{11}$$

jeśli

$$X_t = \xi + \int_s^t b(r, X_r)dr + \int_s^t \sigma(r, X_r)dW_r, \quad t \in [s, T).$$

Dla równania niejednorodnego naturalne są następujące warunki Lipschitza

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leqslant L|x - y|, \quad |b(t,x)| \leqslant \tilde{L}\sqrt{1 + x^2},$$
$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant L|x - y|, \quad |\sigma(t,x)| \leqslant \tilde{L}\sqrt{1 + x^2}.$$

Twierdzenie 8. *Załóżmy, że funkcje b i σ spełniają warunki lipschitza. Wówczas dla dowolnej zmiennej ξ, $\mathcal{F}_s$-mierzalnej takiej, że $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie* (11). *Co więcej rozwiązanie to daje się otrzymać metodą kolejnych przybliżeń jak w przypadku jednorodnym.*

Przykład 3. Równanie

$$dX_t = \sigma(t)X_t dW_t, \quad X_0 = \xi. \tag{12}$$

spełnia założenia twierdzenia, jeśli $\sup_t |\sigma(t)| < \infty$. By znaleźć jego rozwiązanie sformułujmy ogólniejszy fakt.

Fakt 9. *Załóżmy, że M jest ciągłym martyngałem lokalnym, zaś Z_0 zmienną $\mathcal{F}_0$-mierzalną. Wówczas proces $Z_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$ jest martyngałem lokalnym takim, że $dZ_t = Z_t dM_t$, tzn. $Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_s dM_s$.*

Dowód. Z wzoru Itô dla semimartyngału $X_t = M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t$ dostajemy

$$dZ_t = d(Z_0 e^{X_t}) = Z_0 e^{X_t} dX_t + \frac{1}{2} Z_0 e^{X_t} d\langle M\rangle_t = Z_0 e^{X_t} dM_t = Z_t dM_t.$$

Proces Z jest martyngałem lokalnym na mocy konstrukcji całki stochastycznej. $\square$

Wracając do Przykładu 3 zauważamy, że $M_t = \int_0^t \sigma(s)dW_s$ jest martyngałem lokalnym, więc rozwiązanie równania (12) ma postać

$$X_t = \xi\exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t) = \xi\exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s)^2 ds).$$

Przykład 4. Rozpatrzmy niejednorodne równanie liniowe postaci

$$dY_t = b(t)Y_t dt + \sigma(t)Y_t dW_t, \quad X_0 = \xi.$$

Współczynniki $b(t, y) = b(t)y$ i $\sigma(t, y) = \sigma(t)y$ spełniają warunki lipschitza, jeśli $\sup_t |b(t)|, \sup_t |\sigma(t)| < \infty$. By znaleźć rozwiązanie załóżmy, że jest postaci $X_t = g(t)Y_t$, gdzie $dY_t = \sigma(t)Y_t dW_t$, $Y_0 = \xi$, postać Y znamy z Przykładu 3. Wówczas, z dwuwymiarowego wzoru Itô

$$dX_t = g'(t)Y_t dt + g(t)dY_t = g'(t)Y_t dt + \sigma(t)X_t dW_t.$$

Wystarczy więc rozwiązać równanie

$$g'(t) = \sigma(t)g(t), \quad g(0) = 1$$

by dostać

$$X_t = Y_t g(t) = \xi\exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s)^2 ds + \int_0^t \sigma(s)ds).$$

14.3 Przypadek wielowymiarowy

Zanim sformułujemy odpowiednik wcześniejszych wyników dla przypadku wielowymiarowego wprowadzimy wygodne ustalenia notacyjne.

Definicja 10. *Niech $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ będzie d-wymiarowym procesem Wienera. Dla $X = [X^{(i,j)}]_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant d}$ macierzy $m \times d$ złożonej z procesów z Λ_T^2 określamy m-wymiarowy proces*

$$M_t = (M_t^{(1)}, \ldots, M_t^{(m)}) = \int_0^t X_s dW_s, \quad 0 \leqslant t < T$$

wzorem

$$M_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t X_s^{(i,j)} dW_s^{(j)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Przy powyżej wprowadzonej notacji możemy zdefiniować wielowymiarowe równania stochastyczne.

Definicja 11. *Załóżmy, że $b \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \sigma \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m \times d}$ są funkcjami ciągłymi, $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ jest d-wymiarowym procesem Wienera, a $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, m-wymiarowym, $\mathcal{F}_s$-mierzalnym wektorem losowym. Mówimy, że m-wymiarowy proces $X = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(m)})_{t \in [s,T)}$ rozwiązuje* jednorodne wielowymiarowe równanie stochastyczne

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_s = \xi,$$

jeśli

$$X_t = \xi + \int_s^t b(X_r)dr + \int_s^t \sigma(X_r)dW_r, \quad t \in [s, T).$$

Tak jak w przypadku jednowymiarowym dowodzimy:

Twierdzenie 12. *Załóżmy, że $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ jest m-wymiarowym, $\mathcal{F}_s$-mierzalnym wektorem losowym takim, że $\mathbb{E}\xi_j^2 < \infty$ dla $1 \leqslant j \leqslant m$, $b \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \sigma \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{d \times m}$ są funkcjami lipschitzowskimi oraz W jest d-wymiarowym procesem Wienera. Wówczas równanie*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_s = \xi$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $X = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(m)})_{t \geqslant s}$. Ponadto

$$\mathbb{E} \sup_{s \leqslant t \leqslant u} \mathbb{E}|X_t^{(i)}|^2 < \infty \qquad \text{dla } u < \infty.$$

14.4 Generator procesu dyfuzji.

W tej części zakładamy, że $b = (b_i)_{i\leqslant m} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\sigma = (\sigma_{i,j})_{i\leqslant m, j\leqslant d} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times d}$ są funkcjami ciągłymi, zaś $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ jest d-wymiarowym procesem Wienera

Definicja 13. *Generatorem m-wymiarowego procesu dyfuzji spełniającego stochastyczne równanie różniczkowe*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

nazywamy operator różniczkowy drugiego rzędu dany wzorem

$$Lf(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^m).$$

Definicja ta jest motywowana przez poniższy prosty, ale bardzo ważny fakt.

Fakt 14. *Załóżmy, że L jest generatorem procesu dyfuzji spełniającego równanie $dX_t = b(X_t)dt+\sigma(X_t)dW_t$. Wówczas dla dowolnej funkcji $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$ takiej, że $f(X_0)$ jest całkowalne, proces $M_t^f := f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ jest ciągłym martyngałem lokalnym. Ponadto, jeśli f ma dodatkowo nośnik zwarty, to M_t^f jest martyngałem.*

Dowód. Ze wzoru Itô łatwo sprawdzić, że

$$M_t^f = f(X_0) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_{i,j}(X_t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t)dW_t^{(j)} \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}.$$

Jeśli $f \in C^2_{\mathrm{zw}}(\mathbb{R}^m)$, to funkcje $\sigma_{i,j}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ są ciągłe i mają nośnik zwarty w $\mathbb{R}^m$, więc są ograniczone, zatem procesy $\sigma_{i,j}(X_t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t)$ należą do $\mathcal{L}^2_T$ dla dowolnego $T < \infty$, więc M_t^f jest martyngałem (a nawet martyngałem całkowalnym z kwadratem). □

Uwaga 15. Założenie o zwartym nośniku f można w wielu przykładach istotnie osłabić. Załóżmy, że współczynniki b i σ są lipschitzowskie oraz $X_0 \in L^2$. Wówczas jak wiemy X_t jest w L^2 oraz $\sup_{t\leqslant T}\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ dla $T < \infty$. Stąd nietrudno sprawdzić (używając lipschitzowskości $\sigma_{i,j}$, że jeśli pochodne f są ograniczone, to $\sigma_{i,j}(X_t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t) \in \mathcal{L}^2_T$ dla $T < infty$, zatem M_t^f jest martyngałem.

Przykłady
Generatorem d-wymiarowego procesu Wienera jest operator $Lf = \frac{1}{2}\triangle f$. Jeśli $X = (X_1, \ldots, X_d)$ spełnia

$$dX_t^(i) = bX_t^{(i)}dt + \sigma dW_t^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, m$$

(m-wymiarowy proces Ornsteina-Uhlenbecka), to $Lf(x) = b\langle x, \nabla f(x)\rangle + \frac{1}{2}\sigma^2\triangle f$.

Wykład zakończymy przykładem pokazującym związek między stochastycznymi równaniami różniczkowymi a równaniami cząstkowymi. Dokładna analiza takich związków jest ważną dziedziną łączącą rozumowania analityczne i probabilistyczne. Nieco więcej na ten temat można się będzie dowiedzieć na przedmiocie Procesy Stochastyczne.

Przykład
Dla $x \in \mathbb{R}^m$ niech X_t^x będzie rozwiązaniem równania stochastycznego

$$dX_t^x = b(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dW_t, \quad X_t^0 = x,$$

zaś L odpowiadającym mu generatorem. Załóżmy, że D jest obszarem ograniczonym oraz f spełnia równanie cząstkowe

$$Lf(x) = 0,\ x \in D, \quad f(x) = h(x)x \in \partial D.$$

Załóżmy dodatkowo, że f daje się rozszerzyć do funkcji klasy C^2 na pewnym otoczeniu D. Wówczas f się rozszerza też do funkcji klasy $C^2_{\mathrm{zw}}(\mathbb{R}^m)$. Wybierzmy $x \in D$ i określmy

$$\tau = \inf\{t > 0\colon X_t^x \notin D\}.$$

Wiemy, że proces $M_t = f(X_t^x) - \int_0^t Lf(X_s^x)ds$ jest martyngałem, zatem martyngałem jest również $M_{t\wedge\tau}$, ale

$$M_{t\wedge\tau} = f(X_{t\wedge\tau}^x) - \int_0^{\wedge\tau} tLf(X_s^x)ds = f(X_{t\wedge\tau}^x),$$

w szczegóności

$$\mathbb{E}f(X_{t\wedge\tau}^x) = \mathbb{E}M_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}M_0 = f(x).$$

Jeśli dodatkowo $\tau < \infty$ p.n. (to założenie jest spełnione np. dla procesu Wienera), to z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$f(x) = \mathbb{E}f(X_{t\wedge\tau}^x) \to \mathbb{E}f(X_\tau^x) = \mathbb{E}h(X_\tau^x).$$

Otrzynaliśmy więc stochastyczną reprezentację rozwiązania eliptycznego równania cząstkowego.

Podobne rozumowanie pokazuje, że (przy pewnych dodatkowych założeniach) rozwiązanie równania

$$Lf(x) = g(x), \ x \in D, \quad f(x) = h(x)x \in \partial D$$

ma postać

$$f(x) = \mathbb{E}h(X_\tau^x) = \mathbb{E}\int_0^\tau g(X_s^x)ds, \quad x \in D.$$

15 Twierdzenie Girsanowa

W czasie tego wykładu przyjmujemy jak zwykle, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest ustaloną przestrzenią probabilistyczną. Będziemy konstruowali inne miary probabilistyczne na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F})$ względem których proces Wienera z dryfem ma taki rozkład jak zwykły proces Wienera. Przez $\mathbb{E}X$ będziemy rozumieli zawsze wartość oczekiwaną względem $\mathbb{P}$, wartość oczekiwaną X względem innej miary $\mathbb{Q}$ będziemy oznaczać $\mathbb{E}_\mathbb{Q}X$. Zauważmy, że jeśli $d\mathbb{Q} = Zd\mathbb{P}$, tzn. $\mathbb{Q}(A) = \int_A Zd\mathbb{P}$, to

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}X = \int Xd\mathbb{Q} = \int XZd\mathbb{P} = \mathbb{E}(XZ).$$

15.1 Przypadek Dyskretny

Załóżmy, że zmienne $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ są niezależne i mają standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$. Wprowadźmy nową miarę $\mathbb{Q}$ na $((\Omega, \mathcal{F})$ wzorem $d\mathbb{Q} = \exp(\sum_{i=1}^n \mu_i Z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2)d\mathbb{P}$, tzn.

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \exp(\sum_{i=1}^n \mu_i Z_i(\omega) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2)d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{dla } A \in \mathcal{F}.$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}\exp(\sum_{i=1}^n \mu_i Z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\exp(\mu_i Z_i - \frac{1}{2}\mu_i^2) = 1,$$

więc $\mathbb{Q}$ jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F})$. Ponadto dla dowolnego zbioru $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}((Z_1, \ldots, Z_n) \in \Gamma) &= \mathbb{E}\exp(\sum_{i=1}^n \mu_i Z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2)\mathbb{1}_{\{(Z_1,\ldots,Z_n)\in\Gamma\}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_\Gamma e^{\sum_{i=1}^n \mu_i z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n z_i^2} dz_1 \ldots dz_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_\Gamma e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (z_i-\mu_i)^2} dz_1 \ldots dz_n.\end{aligned}$$

Zatem względem miary $\mathbb{Q}$ zmienne $Z_i - \mu_i$ są niezależne oraz mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.

Definiując $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ widzimy, że względem $\mathbb{Q}$ zmienne $(S_k - \sum_{i=1}^k \mu_i)_{k\leqslant n}$ są sumami niezależnych standardowych zmiennych normalnych (czyli mają ten sam rozkład co $(S_k)_k$ względem $\mathbb{P}$). Podczas dalszej części wykładu pokażemy, że można podobny fakt sformułować w przypadku ciągłym, gdy S_k zastąpimy procesem Wienera, a sumy $\sum_{i=1}^k \mu_i$ całką $\int_0^t Y_s ds$.

15.2 Twierdzenie Girsanowa dla procesu Wienera

Załóżmy, że $T < \infty$, proces $Y = (Y_t)_{t<T}$ jest prognozowalny oraz $\int_0^T Y_t^2 < \infty$ p.n., wówczas $Y \in \Lambda_T^2$, proces $M_t = \int Y dW$ jest martyngałem lokalnym na $[0, T)$ oraz $\langle M\rangle = \int Y^2 dt$. Co więcej można też określić wartość M i Z w punkcie T. Zatem jak wiemy (zob. Fakt 9) proces

$$Z_t := \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t) = \exp(\int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds)$$

jest martyngałem lokalnym na $[0, T]$

Lemat 1. *Jeśli M jest ciągłym martyngałem lokalnym na $[0, T]$, to proces $Z_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$ jest martyngałem na przedziale skończonym $[0, T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}Z_T = 1$.*

Dowód. Implikacja "$\Rightarrow$" jest oczywista, bo $\mathbb{E}Z_T = \mathbb{E}Z_0 = 1$. Wystarczy więc udowodnić "$\Leftarrow$".

Wiemy, że Z jest nieujemnym martyngałem lokalnym, zatem jest nadmartyngałem. Ustalmy $t \in [0, T]$, wówczas $Z_t \geqslant \mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_t)$ p.n.. Ponadto $1 = \mathbb{E}Z_0 \geqslant \mathbb{E}Z_t \geqslant \mathbb{E}Z_T$, czyli, jeśli $\mathbb{E}Z_T = 1$, to $\mathbb{E}Z_t = 1$ i

$$\mathbb{E}(Z_t - \mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}Z_t - \mathbb{E}Z_T = 0,$$

a więc $Z_t = \mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_t)$ p.n.. $\square$

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że $T < \infty$, proces Y jest prognozowalny oraz $\int_0^T Y_s^2 ds < \infty$¿. Niech $Z_t = \exp(\int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds)$, wówczas, jeśli $\mathbb{E}Z_T = 1$ (czyli Z jest martyngałem na $[0,T]$), to proces*

$$V_t = W_t - \int_0^t Y_s ds, \quad t \in [0,T]$$

jest procesem Wienera względem wyjściowej filtracji na zmodyfikowanej przestrzeni propabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_T)$, gdzie $d\mathbb{Q}_T = Z_T d\mathbb{P}$, tzn.

$$\mathbb{Q}_T(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Dowód. Zmienna Z_T jest nieujemna i $\mathbb{E}Z_T = 1$, więc $\mathbb{Q}_T$ jest miarą probabilistyczną. Zauważmy też, że jeśli $\mathbb{P}(A) = 0$, to $\mathbb{Q}_T(A) = 0$, czyli zdarzenia, które zachodzą $\mathbb{P}$ prawie na pewno, zachodzą też $\mathbb{Q}_T$ prawie na pewno. Proces V jest ciągły, adaptowalny względem $\mathcal{F}_t$ oraz $V_0 = 0$. Wystarczy zatem wykazać, że dla $\lambda \in \mathbb{R}$, proces $U_t = U_t(\lambda) =:= \exp(\lambda V_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ jest martyngałem lokalnym względem $\mathbb{Q}_T$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
U_t Z_t &= \exp(\lambda V_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)\exp(\int_0^t Y_s dW_s - \int_0^t Y_s^2 ds) \\
&= \exp(\lambda W_t + \int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (2\lambda Y_s + \lambda^2 + Y_s^2) ds) \\
&= \exp(\int_0^t (\lambda + Y_s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\lambda + Y_s)^2 ds) = \exp(N_t - \frac{1}{2}\langle N\rangle_t),
\end{aligned}$$

gdzie $N = \int(\lambda + Y)dW \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$. Zatem proces UZ jest martyngałem lokalnym względem $\mathbb{P}$, czyli istnieją $\tau_n \nearrow T$ takie, że $U^{\tau_n} Z^{\tau_n}$ jest martyngałem. Ustalmy n, wtedy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} U_0 &= \mathbb{E}(U_0 Z_T) = \mathbb{E}(U_0 \mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(U_0 Z_0) = \mathbb{E}(U_{\tau_n\wedge\tau} Z_{\tau_n\wedge\tau}) \\
&= \mathbb{E}(U_{\tau_n\wedge\tau}\mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_{\tau_n\wedge\tau}) = \mathbb{E}(U_{\tau_n\wedge\tau} Z_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} U_{\tau_n\wedge\tau},
\end{aligned}$$

zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Dooba wynika, że U^{τ_n} jest martyngałem względem $\mathbb{Q}_T$, czyli U jest $\mathbb{Q}_T$-martyngałem lokalnym. □

W pewnych zastosowaniach wygodnie jest mieć miarę względem której proces $W - \int Y ds$ jest procesem Wienera na całej półprostej $[0, \infty)$.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że $Y \in \Lambda^2_\infty$, zaś proces Z_t i miary $\mathbb{Q}_T$ dla $T < \infty$ są jak poprzednio. Wówczas, jeśli $\mathbb{E}Z_t = 1$ dla wszystkich t (czyli Z jest martyngałem na $[0,\infty)$), to istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F}^W_\infty)$ taka, że $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}_T(A)$ dla $A \in \mathcal{F}^W_T$ i $T < \infty$. Proces $V = W - \int Y ds$ jest względem $\mathbb{Q}$ procesem Wienera na $[0, \infty)$.*

Szkic Dowodu.. Na zbiorach postaci $A = \{(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_k}) \in \Gamma\}$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant T$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ kładziemy $\mathbb{Q}(A); = \mathbb{Q}_T(A)$. Otrzymujemy w ten sposób zgodną rodzinę miar probabilistycznych i na mocy twierdzenia Kołmogorowa $\mathbb{Q}$ przedłuża się w sposób jednoznaczny do miary na $\mathcal{F}^W_\infty$. □

Uwaga 4. O ile miara $\mathbb{Q}_T$ jest absolutnie ciągła względem $\mathbb{P}$ (tzn. $\mathbb{Q}_T(A) = 0$, jeśli $\mathbb{P}(A) = 0$), to miara $\mathbb{Q}$ zadana przez ostatnie twierdzenie taka być nie musi. Istotnie określmy $Y_t \equiv \mu \neq 0$, czyli $V_t = W_t - \mu t$. Niech

$$A := \{\omega\colon \limsup \frac{1}{t} W_t(\omega) = 0\},$$
$$B := \{\omega\colon \limsup \frac{1}{t} V_t(\omega) = 0\} = \{\omega\colon \limsup \frac{1}{t} W_t(\omega) = \mu\}.$$

Wówczas z mocnego prawa wielkich liczb dla proceseu Wienera $\mathbb{P}(A) = 1$ oraz $\mathbb{P}(B) = 0$, z drugiej strony $\mathbb{Q}(B) = 1$, zatem miary $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ są wzajemnie singularne na $\mathcal{F}^W_\infty$, mimo, że po odbcięciu do $\mathcal{F}^W_T$ dla $T < \infty$ są względem siebie absolutnie ciągłe. Można pokazać, że albsolutna ciągłość $\mathbb{Q}$ względem $\mathbb{P}$ wiąże się z jednostajną całkowalnością martyngału Z.

Naturalne jest pytanie kiedy spełnione są założenia twierdzenia Girsanowa, czyli kiedy Z jest martyngałem. Użyteczne jest następujące kryterium.

Twierdzenie 5 (Kryterium Nowikowa). *Jeśli Y jest procesem prognozowalnym spełniającym warunek $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T Y_s^2 ds) < \infty$, to spełnione są założenia twierdzenia Girsanowa, tzn. proces $Z = \exp(\int Y dW - \frac{1}{2}\int Y^2 dt)$ jest martyngałem na $[0, T]$.*

Kryterium Nowikowa jest konsekwencją silniejszego twierdzenia.

Twierdzenie 6. *Załóżmy, że M jest ciągłym martyngałem lokalnym takim, że dla wszystkich t, $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\langle M\rangle_t) < \infty$. Niech $Z_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle)$, wówczas $\mathbb{E}Z_t = 1$ dla wszystkich t, czyli Z jest martyngałem.*

Twierdzenie Girsanowa można sformułować też w przypadku wielowymiarowym.

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że $Y = (Y^{(1)}, \ldots, Y^{(d)})$ proces d-wymiarowy taki, że $Y^{(j)} \in \Lambda^2_T$ oraz $T < \infty$. Niech $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ będzie d-wymiarowym procesem Wienera oraz*

$$Z_t = \exp(\sum_{i=1}^d \int Y_s^{(i)} dW_t^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t |Y_s|^2 ds).$$

Wówczas, jeśli $\mathbb{E}Z_T = 1$ *(czyli* Z_t *jest martyngałem na* $[0, T]$*), to proces*

$$V_t = W_t - \int_0^t Y_s ds = (W_t^{(1)} - \int_0^t Y^{(1)} ds, \ldots, W_t^{(d)} - \int_0^t Y_s^{(d)} ds)$$

jest procesem Wienera na $[0, T]$ *względem miary probabilistycznej* $\mathbb{Q}_t$ *takiej, że* $d\mathbb{Q}_T = Z_T d\mathbb{P}$*.*

Kryterium Nowikowa w przypadku d-wymiarowym ma postać

Twierdzenie 8. *Jeśli* Y *jest* d*-wymiarowym procesem prognozowalnym spełniającym warunek* $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T |Y_s|^2 ds) < \infty$*, to spełnione są założenia twierdzenia Girsanowa.*

A Wybrane Fakty z z Rachunku Prawdopodobieństwa i Analizy Matematycznej

W części tej zebraliśmy kilka stwierdzeń, na które się wcześniej powoływaliśmy. Fakty te, choć nieco mniej standardowe, są zwykle dowodzone w czasie kursowych wykładów z analizy matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa.

Definicja 1. *Rodzinę* $\mathcal{S}$ *podzbiorów zbioru* X *nazywamy* π-układem*, jeśli dla dowolnych* $A, B \in \mathcal{S}$*, zbiór* $A \cap B \in \mathcal{S}$*.*

Definicja 2. *Rodzinę* $\mathcal{A}$ *podzbiorów zbioru* X *nazywamy* λ-układem*, jeśli spełnione są następujące waruki*
(i) $X \in \mathcal{A}$*.*
(ii) Jeśli $A, B \in \mathcal{A}$ *i* $A \subset B$*, to* $B \setminus A \in \mathcal{A}$*.*
(iii) Jeśli $A_i \in \mathcal{A}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots$ *oraz* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$*, to* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$*.*

Uwaga 3. Rodzina podzbiorów X jest σ-ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy jest π- i λ-układem.

Twierdzenie 4 (O π- i λ- układach)**.** *Jeśli* $\mathcal{A}$ *jest* λ*-układem zawierającym* π*-układ* $\mathcal{S}$*, to* $\mathcal{A}$ *zawiera również* σ*-ciało* $\sigma(\mathcal{S})$ *generowane przez* $\mathcal{S}$*.*

Twierdzenie 5 (Caratheodory'ego o przedłużaniu miary)**.** *Załóżmy, że* $\mathcal{A}$ *jest ciałem podzbiorów* X*, a* μ_0 *skończenie addytywną funkcją z* $\mathcal{A}$ *w* $\mathbb{R}_+$*. Wówczas* μ_0 *przedłuża się do miary* μ *na* σ*-ciele* $\sigma(\mathcal{A})$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* μ_0 *jest ciągła w* $\emptyset$*, tzn*

$$\textit{jeśli } (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, A_1 \supset A_2 \supset \ldots \textit{ oraz } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset, \textit{ to } \lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = 0. \tag{C}$$

B Dowody wybranych twierdzeń

B.1 Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu

Dowód Twierdzenia 2.8. W dowodzie wykorzystamy twierdzenie Caratheodory'ego o przedłużaniu miary (zob. Twierdzenie A.5). Niech $\mathcal{A}$ oznacza algebrę zbiorów cylindrycznych. Dla $C = \{x\colon (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A\},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ połóżmy $\mu_0(C) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A)$. Zauważmy, że

- z warunków zgodności wynika, że μ_0 jest dobrze zdefiniowane, tzn. $\mu_0(C)$ nie zależy od wyboru $t_1, \ldots, t_n$ i A reprezentujących C.
- μ_0 jest skończenie addytywna. Istotnie jeśli $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{A}$, to można dobrać odpowiednio duży zbiór indeksów $t_1, \ldots, t_n \in T$ taki, że zbiory $C_1, \ldots, C_k$ zależą tylko od $t_1, \ldots, t_n$, tzn.

  $$C_i = \{x\colon (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A_i\},\ A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

  Załóżmy, że zbiory zbiory $C_1, \ldots, C_k$ są rozłączne. Wówczas zbiory $A_1, \ldots, A_k$ są również rozłączne, a zatem

  $$\mu_0\Big(\bigcup_{i=0}^{k} C_i\Big) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}\Big(\bigcup_{i=0}^{k} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{k} \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_i) = \sum_{i=0}^{k} \mu_0(C_i).$$

By zakończyć dowód musimy wykazać warunek (C) z twierdzenia Caratheodory'ego, czyli

$$\text{jeśli } C_n \in \mathcal{A},\ C_1 \supset C_2 \supset \ldots,\ \mu_0(C_n) \geqslant \varepsilon > 0,\ \text{to } \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset.$$

Każda miara μ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ jest regularna (zob. Twierdzenie A.?), tzn. dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset A, K \text{ zwarte}\}.$$

Zbiory C_n są cylindryczne, czyli zależą tylko od skończonego zbioru indeksów. Możemy założyć, że te zbiory indeksów rosną, co więcej (ewentualnie powtarzając zbiory C_i lub dodając indeksy) możemy zakładać, że istnieje ciąg $t_1, t_2, \ldots$ taki, że

$$C_n = \{x\colon (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A_n\} \text{ dla pewnego } A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Na mocy regularności miary $\mu_{t_1,\dots,t_n}$, istnieją zbiory zwarte $K_n \subset A_n$ takie, że

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(A_n \setminus K_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ n = 1, 2, \dots.$$

Oznaczając $D_n = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in K_n\}$, mamy $\mu_0(C_n \setminus D_n) \leqslant 2^{-n-1}\varepsilon$. Niech

$$\widetilde{D}_n = D_1 \cap \dots \cap D_n = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in \widetilde{K}_n\},\ \text{gdzie}$$

$$\widetilde{K}_n = (K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap (K_2 \times \mathbb{R}^{n-2}) \cap \dots \cap (K_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap K_n.$$

Ponieważ $C_n \setminus \widetilde{D}_n = \bigcup_{k=1}^{n}(C_n \setminus D_k) \subset \bigcup_{k=1}^{n}(C_k \setminus D_k)$, więc

$$\mu_0(C_n \setminus \widetilde{D}_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mu_0(C_k \setminus D_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1}\varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem $\mu_0(\widetilde{D}_n) \geqslant \mu_0(C_n) - \mu_0(C_n \setminus \widetilde{D}_n) \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} > 0$ i w szczególności $\widetilde{D}_n \neq \emptyset$. Niech $x^{(n)} \in \widetilde{D}_n$, wówczas

$$(x_{t_1}^{(n)}, \dots, x_{t_k}^{(n)}) \in K_k,\ k = 1, \dots, n.$$

Zbiory K_k są zwarte, co implikuje, że dla dowolnego k, ciąg $(x_{t_k}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony. Za pomocą metody przekątniowej możemy wybrać podciąg (n_i) taki, że $\lim_{i\to\infty} x_{t_k}^{(n_i)} = x_{t_k}^{\infty}$ dla $k = 1, 2, \dots$. Ale wówczas, z domkniętości K_k,

$$(x_{t_1}^{\infty}, \dots, x_{t_k}^{\infty}) = \lim_{n_i\to\infty}(x_{t_1}^{(n_i)}, \dots, x_{t_k}^{(n_i)}) \in K_k.$$

Określmy $y \in \mathbb{R}^T$ wzorem

$$y_t = \begin{cases} x_t^{\infty} & \text{dla } t \in \{t_1, t_2, \dots\}, \\ 0 & \text{dla } t \notin \{t_1, t_2, \dots\}. \end{cases}$$

Wówczas $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, czyli $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$, co chcieliśmy dowieść.

Wiemy zatem, że na $\Omega = \mathbb{R}^T$ istnieje miara probabilistyczna μ rozszerzająca μ_0. Wtedy dla $t_1, \dots, t_n \in T$ oraz $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\mu(\{x\colon (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}) = \mu_{t_1,\dots,t_n}(A).$$

Zatem na przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T), \mu)$ wystarczy zdefiniować proces X wzorem $X_t(x) = x_t$. $\square$

B.2 Twierdzenie o ciągłej modyfikacji

Dowód Twierdzenia 3.14. Ustalmy $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ i niech

$$D = \{t \in [a,b] \colon t = 2^{-n}k, n = 1, 2, \ldots, k \in \mathbb{Z}\}$$

oznacza zbiór liczb dwójkowo wymiernych z $[a,b]$. Wówczas

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, \text{ gdzie } D_n = \{t \in [a,b] \colon t = 2^{-n}k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Na mocy nierówności Czebyszewa,

$$\mathbb{P}(|X_t - X_s| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-\alpha}\mathbb{E}|X_t - X_s|^{\alpha} \leqslant C\varepsilon^{-\alpha}|t-s|^{1+\beta},$$

w szczególności

$$\mathbb{P}\big(\big|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}\big| \geqslant 2^{-\gamma n}\big) \leqslant C2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}.$$

Zatem, dla ustalonego n,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\max_{a \leqslant \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \leqslant b} \big|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}\big| \geqslant 2^{-\gamma n}\Big) &\leqslant \sum_{a \leqslant \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \leqslant b} \mathbb{P}\big(\big|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}\big| \geqslant 2^{-\gamma n}\big) \\ &\leqslant 2^n(b-a)C2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)} = C(b-a)2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy $A = \limsup A_n$, gdzie

$$A_n = \Big\{\max_{a \leqslant 2^{-n}k < 2^{-n}(k+1) \leqslant b} \big|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}\big| \geqslant 2^{-\gamma n}\Big\}.$$

Nierówność $\gamma\alpha < \beta$ implikuje, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} C(b-a)2^{-n(\beta-\alpha\gamma)} < \infty.$$

zatem, na mocy lematu Borela-Cantelliego, $\mathbb{P}(A) = 0$, czyli $\mathbb{P}(B) = 1$, gdzie

$$B = \Omega \setminus A = \Big\{\omega \colon \exists_{n_0(\omega)} \forall_{n \geqslant n_0(\omega)} \forall_{a \leqslant 2^{-n}k < 2^{-n}(k+1) \leqslant b}\ \big|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}\big| < 2^{-\gamma n})\Big\}.$$

Załóżmy, że $\omega \in B$, pokażemy wpierw, indukcyjnie po m, że

$$\forall_{n \geqslant n_0(\omega)} \forall_{m \geqslant n} \forall_{s,t \in D_m}\ |s-t| \leqslant 2^{-n} \Rightarrow |X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leqslant 2\sum_{j=n}^{m} 2^{-\gamma j}. \quad (13)$$

Dla $m = n$, jeśli $|s-t| \leqslant 2^{-n}$, to możemy przyjąć, że $s = \frac{k}{2^n}, t = \frac{k+1}{2^n}$ i $|X_s - X_t| = |X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| < 2^{-\gamma n}$ na mocy definicji B.

Załóżmy zatem, że (13) jest udowodnione dla $m = n, n+1, \ldots, M-1$, pokażemy, że zachodzi również dla $m = M$. Niech $s, t \in D_M, s < t$, możemy założyć, że $|s-t| > 2^{-M}$, bo inaczej działa argument przedstawiony w pierwszym kroku indukcji. Połóżmy

$$\tilde{s} = \min\{u \in D_{M-1}, u > s\}, \ \tilde{t} = \max\{u \in D_{M-1}, u < t\},$$

wówczas $s \leqslant \tilde{s} \leqslant \tilde{t} \leqslant t$, czyli $|\tilde{s} - \tilde{t}| \leqslant |s-t| \leqslant 2^{-n}$. Stąd, wobec założenia indukcyjnego, $|X_{\tilde{s}}(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| \leqslant 2\sum_{j=n}^{M-1} 2^{-\gamma j}$. Ponadto, $|s - \tilde{s}| \leqslant 2^{-M}$, $|t - \tilde{t}| \leqslant 2^{-M}$, czyli

$$\begin{aligned}|X_s(\omega) - X_t(\omega)| &\leqslant |X_{\tilde{s}}(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| + |X_{\tilde{s}}(\omega) - X_s(\omega)| + |X_t(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| \\ &\leqslant 2\sum_{j=n}^{M-1} 2^{-\gamma j} + 2^{-\gamma M} + 2^{-\gamma M} = 2\sum_{j=n}^{M} 2^{-\gamma j},\end{aligned}$$

co kończy dowód (13).

Wiemy zatem, że dla $\omega \in B$,

$$s, t \in D, |s-t| \leqslant 2^{-n}, n \geqslant n_0(\omega) \Rightarrow |X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leqslant 2\sum_{j=n}^{\infty} 2^{-\gamma j} = C_\gamma 2^{-\gamma n},$$

gdzie C_γ jest stałą zależną tylko od γ. Weźmy teraz dowolne $s, t \in D$ takie, że $|s-t| \leqslant 2^{-n_0(\omega)}$, wówczas istnieje $n \geqslant n_0(\omega)$ spełniające $2^{-n-1} < |s-t| \leqslant 2^{-n}$ i

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leqslant C_\gamma 2^{-\gamma n} \leqslant 2^\gamma C_\gamma |s-t|^\gamma.$$

W końcu, dla dowolnych $s, t \in D$, możemy dobrać ciąg $s = s_0 < s_1 < \ldots < s_k = t$, $k \leqslant 2^{n_0(\omega)}(b-a)$ taki, że $s_i \in D$, $|s_{i+1} - s_i| \leqslant 2^{-n_0(\omega)}$ i otrzymamy

$$\begin{aligned}|X_s(\omega) - X_t(\omega)| &\leqslant \sum_{i=1}^{k} |X_{s_i}(\omega) - X_{s_{i+1}}(\omega)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} 2^\gamma \tilde{C}_\gamma |s_i - s_{i-1}|^\gamma \\ &\leqslant (b-a) 2^{n_0(\omega)} 2^\gamma \tilde{C}_\gamma |t-s|^\gamma.\end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem, że dla $\omega \in B$, funkcja $t \to X_t(\omega)$ jest hölderowsko ciągła na D, w szczególności jest jednostajnie ciągła i w każdym punkcie z $[a, b]$ ma granicę. Połóżmy

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{s \to t, s \in D} X_s(\omega) & \text{dla } \omega \in B \\ 0 & \text{dla } \omega \notin B. \end{cases}$$

Wówczas wszystkie trajektorie $\widetilde{X}$ są ciągłe (a nawet hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ). Z nierówności Czebyszewa łatwo wynika, że dla dowolnego ciągu $(t_n) \subset D$, zbieżnego do $t \in [a, b]$, $X_{t_n} \to X_t$ według prawdopodobieństwa. Z drugiej strony $X_{t_n} \to \widetilde{X}_t$ p.n., a więc również według prawdopodobieństwa. Z jednoznaczności granicy wynika, że $\widetilde{X}_t = X_t$ p.n., czyli proces $\widetilde{X}$ jest modyfikacją X.

Na koniec zauważmy, że trajektorie $\widetilde{X}$ są hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ, a skoro wiemy, ze wszystkie ciągłe modyfikacje X są nierozróżnialne, to wszystkie ciągłe modyfikacje X mają, z prawdopodobieństwem 1, hölderowsko ciągłe trajektorie z dowolnym wykładnikiem $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$. □

B.3 Rozkład Dooba-Meyera

Proces $(M_t, \mathcal{F}_t)$ jest ciągłym martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy proces $(M_{\mathrm{arctgt}}, \mathcal{F}_{\mathrm{arctgt}})$ jest ciągłym martyngałem, zatem bez straty ogólności będziemy zakładać, że $T < \infty$. Przypomnijmy też, że $(\mathcal{F}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ jest ustaloną filtracją spełniającą zwykłe warunki.

Dla procesu $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ i podziału $\Pi = (0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T)$ odcinka $[0, T]$ określamy proces $V_\Pi^X = (V_{\Pi,t}^X)_{t \in [0,T]}$ wzorem

$$V_{\Pi,t}^X = \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t \wedge t_{i+1}} - X_{t \wedge t_i})^2.$$

Będziemy też czasem dla wygody pisać $V_{\Pi,t}(X)$ zamiast $V_{\Pi,t}^X$.

Idea dowodu twierdzenia Dooba-Meyera polega na wykazaniu, że $\langle M, M\rangle$ można określić jako granicę $V_{\Pi,t}^X$ przy $\mathrm{diam}(\Pi) \to 0$. Dowód rozbijemy na kilka lematów.

Lemat 1. *Dla $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ proces $(M_t^2 - V_{\Pi,t}^M)_{t \in [0,T]}$ jest ciągłym martyngałem.*

Dowód. Niech $t_i \leqslant s < t \leqslant t_{i+1}$ dla pewnego $i \leqslant n - 1$. Wówczas

$$V_{\Pi,t}^M - V_{\Pi,s}^M = (M_t - M_{t_i})^2 - (M_s - M_{t_i})^2 = (M_t - M_s)^2 + 2(M_t - M_s)(M_s - M_{t_i}),$$

stąd

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_{\Pi,t}^M - V_{\Pi,s}^M | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) - 2(M_s - M_{t_i})\mathbb{E}((M_t - M_s)|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_t^2 | \mathcal{F}_s) - 2M_s \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) + M_s^2 = \mathbb{E}(M_t^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2 \\
&= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s).
\end{aligned}$$

□

Lemat 2. *Załóżmy, że $M = (M_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest ciągłym, jednostajnie ograniczonym martyngałem. Wówczas dla dowolnego podziału Π,*

$$\mathbb{E}(V^M_{\Pi,t})^2 \leqslant 48\sup_t \|M_t\|^4_\infty < \infty.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}(V^M_{\Pi,t})^2 &= (\sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2)^2\\ &= \sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + 2\sum_{k=1}^{n-1}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \sum_{j=k+1}^n (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2\\ &= \sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + 2\sum_{k=1}^{n-1}(V^M_{\Pi,t_k} - V^M_{\Pi,t_{k-1}})(V^M_{\Pi,T} - V^M_{\Pi,t_k}).\end{aligned}$$

Z poprzedniego lematu mamy $\mathbb{E}(V^M_{\Pi,T} - V^M_{\Pi,t_k}|\mathcal{F}_{t_k}) = \mathbb{E}((M_T - M_{t_k})^2|\mathcal{F}_{t_k})$, zatem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V^M_{\Pi,t})^2 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}[(V^M_{\Pi,t_k} - V^M_{\Pi,t_{k-1}})(V^M_{\Pi,T} - V^M_{\Pi,t_k})]\\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}[(V^M_{\Pi,t_k} - V^M_{\Pi,t_{k-1}})(M_T - M_{t_k})^2]\\ &\leqslant \mathbb{E}(\max_k (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 + 2\max_k (M_T - M_{t_k})^2)V^M_{\Pi,T}\\ &\leqslant 12C^2\mathbb{E}V^2_{\Pi,T} = 12C^2\mathbb{E}(M_T - M_0)^2 \leqslant 48C^4,\end{aligned}$$

gdzie $C = \sup_t \|M_t\|_\infty$. □

Lemat 3. *Załóżmy, że $M = (M_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest ciągłym, jednostajnie ograniczonym martyngałem. Wówczas istnieje $N \in \mathcal{M}^{2,c}_T$ taki, że $M^2 - V^M_\Pi$ zbiega do N w $\mathcal{M}^{2,c}_T$, gdy* $\mathrm{diam}(\Pi) \to 0$.

Dowód. Wystarczy udowodnić zbieżność (przy $\mathrm{diam}(\Pi) \to 0$) $M^2_T - V^M_{\Pi,T}$ w $L_2(\Omega)$, czyli zbieżność $V^M_{\Pi,T}$ w $L_2(\Omega)$.

Niech Π i Π' będą podziałami $[0,T]$, zaś $\Pi\Pi'$ podziałem wyznaczonym przez wszystkie punkty z Π i Π'. Na mocy Lematu 1 proces $X = V^M_\Pi - V^M_{\Pi'}$ jest martyngałem, więc

$$\mathbb{E}|V^M_{\Pi,T} - V^M_{\Pi',T}|^2 = \mathbb{E}(X^2_T - X^2_0) = \mathbb{E}V_{\Pi\Pi',T}(X),$$

gdzie ostatnia równość wynika stąd, że $X^2 - V_{\Pi\Pi'}(X)$ jest martyngałem (znów stosujemy Lemat 1). Ponieważ $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$, więc

$$V_{\Pi\Pi',T}(X) \leqslant 2(V_{\Pi\Pi',T}(V_{\Pi}^M) + V_{\Pi\Pi',T}(V_{\Pi'}^M).$$

Wystarczy więc udowodnić, że

$$\mathbb{E}V_{\Pi\Pi',T}(V_{\Pi}^M) \to 0, \text{ jeśli } \operatorname{diam}(\Pi) + \operatorname{diam}(\Pi') \to 0. \tag{14}$$

Załóżmy, że s_k i s_{k+1} są kolejnymi punktami podziału $\Pi\Pi'$, a t_l, t_{l+1} kolejnymi punktami z Π takimi, że $t_l \leqslant s_k < s_{k+1} \leqslant t_{l+1}$, wówczas

$$\begin{aligned} V_{\Pi',s_{k+1}}^M - V_{\Pi',s_k}^M &= (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 \\ &= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} - M_{s_k} + 2M_{t_l}). \end{aligned}$$

Stąd

$$V_{\Pi\Pi',T}(V_{\Pi'}^M) \leqslant \max_k |M_{s_{k+1}} - M_{s_k} + 2M_{t_l}|^2 V_{\Pi\Pi',T}^M$$

i z nierówności Schwarza

$$\mathbb{E}V_{\Pi\Pi',T}(V_{\Pi'}^M) \leqslant (\mathbb{E}\max_k |M_{s_{k+1}} - M_{s_k} + 2M_{t_l}|^4)^{1/2}(\mathbb{E}(V_{\Pi\Pi',T}^M)^2)^{1/2}.$$

Pierwszy składnik dąży do zera, gdy $\operatorname{diam}(\Pi) + \operatorname{diam}(\Pi') \to 0$ na mocy ciągłości i ograniczoności M (stosujemy twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmiajoryzowanej), drugi na mocy poprzedniego lematu jest ograniczony przez wielkość zależną tylko od M. Zatem spełnione jest (14). □

Dowód Twierdzenia 8.1. Przypomnijmy, że zakładamy iż $T < \infty$.

Przypadek I Martyngał M jest jednostajnie ograniczony.

Niech $Y = M^2 - N$, gdzie N jest procesem zadanym przez Lemat 3. Wówczas $M^2 - Y$ jest ciągłym martyngałem oraz dla $t \leqslant T$, Y_t jest granicą w $L_2(\Omega)$ zmiennych $V_{\Pi,t}^M$ przy $\operatorname{diam}(\Pi) \to 0$, stąd $Y_0 = 0$ p.n.. Ustalmy $s < t \leqslant T$ i niech Π_n będzie ciągiem podziałów $[0,T]$ zawierających punkty t i s o średnicy dążącej do zera. Przechodząc do podciągów możemy zakładać, że $V_{\Pi_n,t}^M \to Y_t$ i $V_{\Pi_n,s}^M \to Y_s$ p.n., ale $V_{\Pi_n,s} \leqslant \Pi_n, t$, więc $Y_t \leqslant Y_s$ p.n.. Z ciągłości Y ma z prawdopodobieństwem 1 trajektorie niemalejące, czyli Y jest szukanym procesem $\langle M \rangle$.

Przypadek II $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ i $M_0 = 0$.

Wybierzmy ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ taki, że M^{τ_n} jest jednostajnie ograniczonym martyngałem (np. $\tau_n := \inf\{t \geqslant 0 \colon |M_t| \geqslant n\} \wedge T$). Niech $Y_n = \langle M^{\tau_n} \rangle$ oraz $N_n = |M^{\tau_n}|^2 - Y_n$. Ponieważ dla $m \geqslant n$,

$Y_m^{\tau_n} = \langle M^{\tau_m}\rangle^{\tau_n} = \langle (M^{\tau_m})^{\tau_n}\rangle = Y_n$, więc da się określić taki proces ciągły $(Y_t)_{0\leqslant t<T}$, że $Y^{\tau_n} = Y_n$ p.n.. Wówczas $Y_t = Y_{n,t}$ dla $t \leqslant \tau_n$, więc Y jest niemalejący i $Y_0 = 0$. Zauważmy, że $\mathbb{E}Y_t^2 = \mathbb{E}(M_t^{\tau_n})^2 \leqslant \mathbb{E}M_T^2$, więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej $Y_T := \lim_{t\to T} Y_t$ istnieje i jest całkowalne. Widzimy, że $N_{n,t} \to M_t^2 - Y_t^2$ p.n. dla $t \leqslant T$. Ponadto na mocy nierówności Dooba

$$\mathbb{E}\sup_n N_{n,t} \leqslant \mathbb{E}\sup_n (M_t^{\tau_n})^2 + \mathbb{E}Y_{n,t} \leqslant 4\mathbb{E}M_T^2 + \mathbb{E}M_T^2 < \infty,$$

zatem $(N_{n,t})_n$ jest jednostajnie całkowalny, czyli $N_{n,t}$ zbiega w L_1, więc $X^2 - Y^2$ jest martyngałem, czyli $Y = \langle M\rangle$.

Przypadek III $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ dowolne.

Wówczas $M - M_0 \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, na mocy przypadku II istnieje $\langle M - M_0\rangle$. Ale $M^2 - \langle M - M_0\rangle = (M - M_0)^2 - \langle M - M_0\rangle + 2M_0M - M_0^2$ jest martyngałem, zatem $\langle M\rangle = \langle M - M_0\rangle$.

□

Literatura

[1] P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987.

[2] G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom III, PWN, Warszawa 1985.

[3] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, wyd II, Script, Warszawa 2001

[4] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1973.

[5] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1976.