

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 1
(zadania gwiazdkowe do oddania 10 marca)

1. Które z poniższych przestrzeni metrycznych są przestrzeniami unormowanymi?
 - i) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = \arctg|x - y|$;
 - ii) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \max_{3 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$;
 - iii) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$;
 - iv) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = |f(0) - g(0)|$;
 - v) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$;
 - vi) $X = C^1[0, 1]$, $d(f, g) = |f(0) - g(0)| + \sup_x |f'(x) - g'(x)|$.
2. Które z przestrzeni unormowanych z poprzedniego zadania są zupełne?
3. Która z następujących przestrzeni jest przestrzenią Banacha w normie supremum: $C(\mathbb{R})$; $C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji ciągłych ograniczonych; $C_{\text{zw}}(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji ciągłych o nośniku zwartym; $C_0(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji ciągłych takich, że $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$?
4. Wykaż, że $\text{Lip}[0, 1]$ – przestrzeń funkcji lipschitzowskich na $[0, 1]$ z normą

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

jest przestrzenią Banacha.

5. Na przestrzeni $X = C^1[0, 1]$ rozpatrzmy następujące normy:
 - i) $\|f\|_{\infty}$
 - ii) $\|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$
 - iii) $|f(0)| + \|f'\|_{\infty}$
 - iv) $\|f\|_{\infty} + \sup_{x \in (0, 1)} |xf'(x)|$
 Które z tych norm wprowadzają na X strukturę przestrzeni Banacha?
- 11* Niech $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją wypukłą taką, że $\varphi(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Określamy

$$l_{\varphi} := \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \exists t > 0 \sum_n \varphi\left(\frac{|x_n|}{t}\right) < \infty \right\}$$

oraz

$$\|x\|_{\varphi} := \inf \left\{ t > 0 : \sum_n \varphi\left(\frac{|x_n|}{t}\right) \leq 1 \right\} \text{ dla } x \in l_{\varphi}.$$

Wykaż, że l_{φ} z normą $\|x\|_{\varphi}$ jest przestrzenią Banacha.

6. Powiemy, że dwie metryki ρ_1 i ρ_2 są równoważne, jeśli definiują takie same topologie (czyli ciągi mają w obu metrykach te same granice). Wykaż, że jeśli istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że

$$\forall_{x,y} \quad c\rho_1(x,y) \leq \rho_2(x,y) \leq C\rho_1(x,y), \quad (1)$$

to metryki są równoważne.

7. Wskaż dwie równoważne metryki, które nie spełniają (1).
8. Mówimy, że dwie normy są równoważne, jeśli metryki przez nie wyznaczone są równoważne. Wykaż, że normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ dla wszystkich x .
9. Wskaż dwie nierównoważne normy na przestrzeni ciągów ograniczonych.
10. Wykaż, że wszystkie normy na $\mathbb{R}^n$ są równoważne.
- 12* Czy istnieje przestrzeń X i dwie nierównoważne normy wprowadzające na X strukturę przestrzeni Banacha?
- 13* Czy na c_{00} – przestrzeni ciągów o skończenie wielu wyrazach niezerowych da się wprowadzić strukturę przestrzeni Banacha?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 2
(zadania gwiazdkowe do oddania 17 marca)

1. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Wykaż ciągłość następujących przekształceń:
 - (i) $x \mapsto \|x\|$, $x \in X$,
 - (ii) $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, $\lambda \in F$, $x \in X$,
 - (iii) $(x, y) \mapsto x + y$, $x, y \in X$.
2. Naskicuj kulę jednostkową w następujących przestrzeniach: l_1^2 , l_2^2 , l_∞^2 , l_p^2 , l_1^3 , l_2^3 , l_∞^3 .
3. Niech $x = (x_k)_{k=1}^n$. Wykaż, że
 - a) $\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|x\|_q$ dla $1 \leq p < q$,
 - b) $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
 - c) Czy stałe w a) są optymalne? Jakie zawierania dla kul jednostkowych w l_p^n wynikają z a)?
4. Niech $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ oraz $1 \leq p < q$.
 - a) Wykaż, że $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.
 - b) Znajdź wektor x taki, że $\|x\|_p = \infty$ oraz $\|x\|_q < \infty$.
 - c) Czy zawsze $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$? Jeśli nie, to kiedy tak jest?
- 5* Wykaż, że $\{x = (x_k)_{k=1}^\infty : \sum_{i=1}^\infty |x_i| \leq 1\}$ jest domkniętym wypukłym podzbiorem l_2 o pustym wnętrzu. Czy jest to zbiór zwarty?
6. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną μ oraz f będzie funkcją mierzalną na X . Udowodnij, że dla $1 \leq p < q$,
 - a) $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \|f\|_q$, w szczególności $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ gdy $\mu(X) = 1$. Kiedy zachodzi równość?
 - b) Wykaż, że $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
 - c) Znajdź funkcję $f \in L_p[0, 1]$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.
 - d) Znajdź funkcję $f \in L_q[0, \infty)$ taką, że $\|f\|_p = \infty$.
7. Znajdź $|\mu|$ i oblicz $\|\mu\|$ dla następujących miar ze znakiem na $[0, 1]$ (dla ułatwienia można przyjąć $F = \mathbb{R}$):
 - (i) $\sum_{n=1}^\infty a_n \delta_{1/n}$,
 - (ii) $\mu(A) = \int_A f(x) dx$, $f \in L_1([0, 1])$.
- 8* Wykaż, że jeśli ν jest miarą skończoną, zaś μ miarą zespoloną taką, że $\mu(A) = \int_A f d\nu$, to $|\mu|(A) = \int_A |f| d\nu$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 3
(zadania gwiazdkowe do oddania 24 marca)

1. Oblicz normę $\text{id}: l_p^n \rightarrow l_q^n$ dla $1 \leq p, q \leq \infty$.
2. Określamy $T: l_1 \rightarrow c_0$ wzorem $T(x)_n = \sum_{i=n}^{\infty} x_i$. Wykaż, że T jest dobrze określone, ciągle i oblicz jego normę.
3. Znajdź normę przekształcenia $f(x) \rightarrow xf(x)$ z $L_p[-1, 1]$ w $L_1[-1, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$.
4. Niech $g \in L_{\infty}(X, \mu)$ wykaż, że przekształcenie T dane wzorem $Tf(x) := g(x)f(x)$ jest ciągłym operatorem na $L_p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Ile wynosi jego norma?
- 5* Niech $Tf(x) := \int_0^x f(y)dy$, wykaż, że T jest ciągłym przekształceniem z $L_p[0, 1]$ w $L_q[0, 1]$ dla dowolnych $1 \leq p, q \leq \infty$.
6. Wykaż, że $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx$ jest ciągłym funkcjałem na $C[0, 1]$ i policz jego normę.
7. Niech $X := \{f \in C[0, 1]: f(t) = 2f(1-t), t \in [0, 1/2]\}$. Czy X z normą supremum jest przestrzenią Banacha? Udowodnij, że następujące funkcjonały są ciągłe na X i policz ich normy:
 - a) $\varphi_1(f) := f(\frac{1}{4})$,
 - b) $\varphi_2(f) := f(\frac{3}{4})$,
 - c) $\varphi_3(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx$.
8. Zbadaj ciągłość i oblicz normę przekształcenia $T: L_p[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$ danego wzorem $Tf(x) = f(\sqrt{x})$.
9. Oblicz normę przekształcenia $x \mapsto [x]$ z X w X/X_0 .
10. Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha. Wykaż, że $X \times Y$ z normą $(x, y) = \|x\|_X + \|y\|_Y$ jest przestrzenią Banacha, przestrzeń tą oznaczamy wzorem $X \oplus Y$. Niech $i: X \rightarrow X \oplus Y$ będzie dane wzorem $i(x) = (x, 0)$. Wykaż, że i jest izometrią oraz $X \oplus Y/i(X)$ jest izometryczne z Y .
- 11* Wykaż, że norma $\| \cdot \|$ na przestrzeni liniowej X jest zadana przez iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek równoległoboku $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ dla wszystkich $x, y \in X$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 4

(zadania gwiazdkowe do oddania 31 marca)

1. Niech $M := \{f \in C[0, 1] : \int_0^{1/2} f(t)dt = \int_{1/2}^1 f(t)dt\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $C[0, 1]$. Niech $g(t) = t$, oblicz $\text{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\text{dist}(g, M) = \|f - g\|$?
2. $M := \{f \in L_1[0, 1] : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $L_1[0, 1]$. Niech $g \equiv 1$, oblicz $\text{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\text{dist}(g, M) = \|f - g\|$? Ile jest takich funkcji?
- 3* Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Czy dla dowolnej funkcji $f \in L_p[0, 1]$ istnieje funkcja $g \in M$ taka, że $\text{dist}(f, M) = \|f - g\|$? Czy może być więcej niż jedna taka funkcja?
4. Niech $M := \{f \in L_2[-1, 1] : f(x) = f(-x)\} \subset L_2[-1, 1]$. Znajdź $M^\perp$ i rzut ortogonalny na M .
5. Niech V_n będzie podprzestrzenią $L_2[0, 1]$ składającą się z funkcji stałych na przedziałach $[k/n, (k+1)/n)$, $k = 0, \dots, n-1$.
 - a) Znajdź $V_n^\perp$
 - b) Znajdź rzut ortogonalny f na V_n .
 - c) Znajdź odległość $f(t) = t$ w $L_2[0, 1]$ od V_n .
6. Załóżmy że $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ są dwoma σ -ciałami podzbiorów X , a μ miarą na $(X, \mathcal{F})$. Wykaż, że
 - i) $M = L_2(X, \mathcal{G}, \mu)$ jest domkniętą podprzestrzenią $L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
 - ii) $\int_A P_M f d\mu = \int_A f d\mu$ dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ takiego, że $\mu(A) < \infty$ oraz $f \in L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
 - iii) P_M jest nieujemny, tzn. $P_M f \geq 0$ μ -p.w., jeśli $f \geq 0$ μ -p.w..
7. Wykaż, że dla dowolnego zbioru A w przestrzeni unitarnej H , $(A^\perp)^\perp = \overline{\text{Lin}(A)}$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 5
(zadania gwiazdkowe do oddania 7 kwietnia)

1. Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta, a $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ bazą o.n. M . Wykaż, że rzut ortogonalny na M ma postać

$$P_M x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha.$$

2. Znajdź ortogonalizację ciągu wektorów $1, t, t^2$ w $L^2[-1, 1]$.
3. Znajdź wielomian stopnia 2 taki, że $\int_{-1}^1 |t^4 - w(t)|^2 dt$ jest najmniejszy.
4. Wykaż, że układ Rademachera $f_n := \text{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, $n = 1, 2, \dots$ jest układem ortogonalnym w $L^2[0, 1]$. Czy jest to układ zupełny?
5. Niech P_n będzie układem wielomianów Legendre'a

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad t \in [-1, 1], \quad n \geq 0.$$

- a) Wykaż, że P_n jest układem ortogonalnym w $L^2[-1, 1]$. Jak go trzeba znormalizować by był ortonormalny?
b) Czy jest to układ zupełny?
6. Niech μ będzie miarą skończoną na $[0, 1]$, która nie jest skupiona na zbiorze skończonym. Wykaż, że istnieje baza o.n. $(f_n)_{n \geq 0}$ przestrzeni $L^2([0, 1], \mu)$ taka, że f_n jest wielomianem stopnia n .
7* Niech L_n będzie układem wielomianów Laguerre'a

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}), \quad t \geq 0, \quad n \geq 0.$$

- a) Wykaż, że L_n jest układem ortogonalnym w $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-t} dt)$. Czy jest on ortonormalny?
b) Czy jest to układ zupełny?
8* Niech H_n będzie układem wielomianów Hermite'a

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/2}).$$

- a) Wykaż, że $(H_n)_{n \geq 0}$ jest układem ortonormalnym w $L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt)$.
b) Czy jest to układ zupełny?
9. Niech $(f_i(x))_i$ i $(g_j(y))_j$ będą układami ortonormalnymi w $L^2(X, \mu_1)$ i $L^2(Y, \mu_2)$ odpowiednio. Wykaż, że
a) układ $(f_i(x)g_j(y))_{i,j}$ jest układem ortonormalnym w $L^2(X \times Y, \mu_1 \mu_2)$.
b) jeśli układy $(f_i)_i, (g_j)_j$ są zupełne, to układ $(f_i g_j)_{i,j}$ też jest zupełny.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 6

(zadania gwiazdkowe do oddania 14 kwietnia)

1. Wykaż, że przestrzeń $L_2(\mathbb{R}^n)$ jest ośrodkowa i wywnioskuj stąd ośrodkowość przestrzeni $L_2(A)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}^n$.
2. Wyznacz p dla których $L_p[0, 1]$ jest ośrodkowa.
3. Wykaż, że jeśli μ jest miarą borelowską na Ω - otwartym podziorze $\mathbb{R}^n$ taką, że $\mu(K) < \infty$ dla K zwartych podzbiorów Ω , to $C_{\text{zw}}^\infty(\Omega)$ jest gęste w $L_p(\mu)$ dla $1 \leq p < \infty$.
4. Które z następujących przestrzeni są ośrodkowe: $M([0, 1])$ - przestrzeń zespolonych miar borelowskich na $[0, 1]$, $\text{Lip}[0, 1]$, $C^k[0, 1]$?
5. Wykaż, że przestrzeń X jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przeliczalny podzbiór liniowo gęsty w X .
6. Niech $r_n := \text{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, $n = 1, 2, \dots$ będzie układem Rademachera. oraz $\mathcal{S}$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów $\{1, 2, \dots\}$. Zdefiniujmy *układ Walsha* wzorem $w_\emptyset \equiv 1$ oraz $W_A = \prod_{n \in A} r_n$ dla $A \neq \emptyset$. Udowodnij, że $(w_A)_{A \in \mathcal{S}}$ jest bazą o.n. $L_2[0, 1]$.
7. Rozwiń funkcję t na przedziale $[-\pi, \pi]$ w szereg Fouriera i wykorzystaj uzyskane rozwinięcie do obliczenia $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$.
8. Wykaż, że każdą funkcję parzystą f w $L^2[-\pi, \pi]$ da się przedstawić w postaci $f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n \cos nt$, przy czym ciąg jest zbieżny w L^2 . Ile wynosi $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2$?
9. Jak wygląda odpowiednie rozwinięcie w szereg Fouriera dla funkcji nieparzystych?
- 10* Wykaż, że przestrzeń Banacha X jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciągle liniowe przekształcenie przeprowadzające l_1 na X .

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 7

(zadania gwiazdkowe do oddania 28 kwietnia)

1. Wykaż, że jeśli X_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X oraz $x \in X \setminus X_0$ to istnieje funkcjonal $\varphi \in X^*$ zerujący się na X_0 taki, że $\varphi(x) = 1$.
2. Niech F będzie podprzestrzenią przestrzeni Banacha X . Wykaż, że dla dowolnego $x \in X$,
$$\text{dist}(x, F) = \sup \{ |\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leq 1, \varphi|_F = 0 \}.$$
- 3* Udowodnij, że ośrodkowość przestrzeni X^* implikuje ośrodkowość przestrzeni X . Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?
- 4* Załóżmy, że $(G, +)$ jest półgrupą abelową. Wykaż, że na $l_\infty(G)$ istnieje funkcjonal φ o normie 1 taki, że $\varphi(1) = 1$ oraz $\varphi(\tau_h(x)) = \varphi(x)$ dla wszystkich $x \in l_\infty(G)$ oraz $h \in G$, gdzie $\tau_h(x)(g) = x(g + h)$.
5. Niech A i B będą rozłącznymi niepustymi wypukłymi podzbiorami przestrzeni Banacha X takimi, że A jest domknięty, a B jest zwarty. Wykaż, że istnieje funkcjonal $\varphi \in X^*$ taki, że $\sup_{x \in A} \text{Re}(\varphi(x)) < \inf_{x \in B} \text{Re}(\varphi(x))$.
6. Znajdź przestrzeń dualną do c – przestrzeni ciągów zbieżnych z normą supremum.
7. a) Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $x \in X$ będzie wektorem o normie 1. Udowodnij, że $\Delta(x) := \{x^* \in X^* : x^*(x) = 1 = \|x^*\|\}$ jest niepustym, domkniętym zbiorem wypukłym.
b) Podaj przykłady $x \in l_1$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe, n -wymiarowe, nieskończenie wymiarowe.
c) Opisz wszystkie $x \in c_0$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe.
8. Przestrzeń $C[0, 1]$ można traktować jako domkniętą podprzestrzeń $L_\infty[0, 1]$. Funkcjonał $\delta_x(f) := f(x)$ jest ciągłym funkcjonalem o normie 1 na $C[0, 1]$, zatem z twierdzenia Hahna-Banacha można go rozszerzyć do funkcjonału φ_x na $L_\infty[0, 1]$ o normie 1. Wykaż, że nie istnieje funkcja $g \in L_1[0, 1]$ taka, że $\varphi_x(f) = \int_0^1 f(s)g(s)ds$. Udowodnij, że jeśli $f \in L_\infty[0, 1]$ jest taka, że $f = 0$ na zbiorze $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, to $\varphi_x(f) = 0$.
- 9* Wykaż, że przestrzeń X jest refleksywna wtedy i tylko wtedy gdy X^* jest refleksywna.
10. Które z następujących przestrzeni są refleksywne: l_p , $L_p[0, 1]$, c_0 , $C[0, 1]$, $M[0, 1]$?
11. Wykaż, że c_0 wkłada się izometrycznie w $C[0, 1]$, a l_∞ w $C_{\text{ogr}}(0, 1)$.
12. Wykaż, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha wkłada się izometrycznie w l_∞ .

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 8

(zadania gwiazdkowe do oddania 12 maja)

1. Załóżmy, że $x = (x_n)_{n \geq 1}$ jest takim ciągiem, że dla każdego $y \in l_p$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny. Wykaż, że $x \in l_q$ dla $1/p + 1/q = 1$.
2. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu y_n zbieżnego do zera wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.
3. Załóżmy, że $f_n \in L_2[0, 1]$ są takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t)g(t)dt = 0$ dla wszystkich funkcji $g \in L_2[0, 1]$. Wykaż, że $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$. Czy musi zachodzić $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = 0$?
- 4* Czy w każdej przestrzeni Banacha nieskończonego wymiaru istnieje ciąg słabo zbieżny do zera, który nie zbiega do zera w normie?
- 5* Wykaż, że jeśli ciąg wektorów x_n zbiega słabo do zera, to istnieje ciąg kombinacji wypukłych wektorów x_n zbieżny do zera w normie.
6. Wykaż, że ciąg wektorów $x_n = (x_n(k))_{k=1}^{\infty}$ zbiega do słabo do zera w l_p , $1 < p < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_n \|x_n\|_p < \infty$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = 0$ dla wszystkich k . Czy charakterystyka ta jest prawdziwa dla l_1 ? A dla c_0 ?
7. Kiedy ciąg wektorów $x_n = (x_n(k))_{k=1}^{\infty}$ zbiega do słabo z gwiazdką do zera w $l_1 = c_0^*$?
8. Wykaż, że jeśli $1 < p < \infty$ oraz $f_n \in L_p[0, 1]$ są takie, że $\|f_n\|_p \leq 1$ i $\lambda_1(\{x: f_n(x) \neq 0\}) \rightarrow 0$, to f_n zbiegają słabo do zera. Czy jest to prawdą dla $p = 1$?
9. Wykaż, że ciąg funkcji Rademachera $r_k := \text{sgn}(\sin 2^k \pi x)$ jest słabo zbieżny do zera w $L_p[0, 1]$ dla $1 \leq p < \infty$.
- 10* Czy r_k zbiega słabo do zera w L_{∞} ?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 9

(zadania gwiazdkowe do oddania 19 maja)

- 1* Wykaż, że na ośrodkowej przestrzeni Banacha σ -ciało zbiorów borelowskich w topologii normowej pokrywa się z σ -ciałem zbiorów borelowskich w słabej topologii. Czy założenie ośrodkowości jest konieczne?
- 2* Niech X będzie przestrzenią liniową, a Y pewną podprzestrzenią funkcjonałów liniowych na X . Oznaczmy przez $\sigma(X, Y)$ najszlakszą topologię na X dla której wszystkie funkcjonały z Y są ciągłe. Wykaż, że jeśli jakiś funkcjonał φ na X jest ciągły w topologii $\sigma(X, Y)$, to $\varphi \in Y$. Wywnioskuj stąd, że słaba i słaba* topologie na X^* się pokrywają wtedy i tylko wtedy, gdy X jest refleksywna.
3. Załóżmy, że X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ jest domkniętą kulą jednostkową w X .
 - i) Pokaż, że dla $\varepsilon > 0$ istnieją wektory $x_1, x_2, \dots \in B_X$ takie, że $\|x_j - x_k\| \geq 1 - \varepsilon$ dla $j \neq k$.
 - ii) Wywnioskuj stąd, że B_X nie jest zwarte.
4. Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha oraz T jest przekształceniem X na Y . Wykaż, że istnieje izomorfizm $S: X/\ker(T) \rightarrow Y$ taki, że $T = Sq$, gdzie q jest kanonicznym rzutem X na $X/\ker(T)$. Wywnioskuj stąd, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha jest izomorficzna z ilorazem przestrzeni l_1 .
5. Załóżmy, że T jest operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y . Wykaż, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varphi \in Y^*$, $\varphi(T)$ jest ciągłym funkcjonałem na X .
6. Niech Y i Z będą dwoma domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X takimi, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna para wektorów $(y, z) =: (P_1x, P_2x) \in Y \times Z$ taka, że $x = y + z$. Wykaż, że P_1 jest ciągłym rzutem X na Y .
7. Załóżmy, że X, Y i Z są przestrzeniami Banacha, zaś $B: X \rightarrow Z$ oraz $C: Y \rightarrow Z$ są ciągłymi operatorami liniowymi. Wykaż, że jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y = Ax$ taki, że $Bx = Cy$, to A jest ciągłym operatorem z X w Y .

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 10

(zadanie gwiazdkowe do oddania 26 maja)

- 1* Czy słaba topologia na przestrzeni l_p , $1 \leq p < \infty$ jest metryzowalna (tzn. czy istnieje metryka taka, że zbiory otwarte w tej metryce i w słabej topologii są takie same)?
2. Niech $(e_n)_{n \geq 0}$ będzie kanoniczną bazą l_p . Wykaż, że operator liniowy $T: l_p \rightarrow l_p$ taki, że $Te_n = a_n e_n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
3. Czy operator „przesunięcia w prawo” na l_p jest zwarty?
4. Niech $T: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ będzie dany wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(s)ds$. Czy jest to operator zwarty?
5. Określmy $T: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ jako $Tf(x) = \int_x^{x+1} f(y)dy$. Wykaż, że T jest ciągły. Czy T jest zwarty?
6. Wykaż, że $T \in B(X, Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $T(B_X)$ da się pokryć skończoną liczbą kulek w Y o promieniu ε .
7. Wykaż, że operator T jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń skończenie wymiarowa $Y_\varepsilon \subset Y$ taka, że oraz $\sup_{x \in T(B_X)} \text{dist}(x, Y_\varepsilon) \leq \varepsilon$.
8. Wykaż, że jeśli X jest przestrzenią Banacha $1 \leq p < \infty$ oraz $T \in B(X, l_p)$ jest zwarty, to istnieje ciąg skończenie wymiarowych operatorów T_n taki, że $\|T_n - T\| \rightarrow 0$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 11

(zadanie gwiazdkowe do oddania 9 czerwca)

1. Niech $T: l_p \rightarrow l_p$ będzie dany wzorem $T(x_1, x_2, \dots) = (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \dots)$. Jak wygląda T^* ?
2. Niech $T: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ będzie określony jako $Tf(x) := \int_0^x f(y)dy$. Znajdź T^* .
3. Określmy $T: l_1 \rightarrow c_0$ jako

$$T((x_n)_{n \geq 1}) := \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)_{n \geq 1}.$$

Znajdź T^* .

4. Operator $T: L^2[0, 1] \rightarrow l^1$ jest dany wzorem

$$Tf = \left(\int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} f(x)dx \right)_{n=1,2,\dots}$$

Znajdź T^* .

- 5* a) Wykaż, że każdy operator zwarty przekształca ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie.
b) Wykaż, że istnieje operator niezzwarty przekształcający ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie.
c) Załóżmy, że przestrzeń X jest refleksywna i ośrodkowa, zaś T jest operatorem ciągłym na X przekształcającym ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie. Wykaż, że T jest zwarty.
- 6* Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha, a $T: X \rightarrow Y$ jest ciągłym operatorem na. Czy musi wówczas istnieć $\varepsilon > 0$ takie, że każdy operator liniowy ciągły $S: X \rightarrow Y$ spełniający $\|S - T\| \leq \varepsilon$ jest na?
7. Niech $Tx = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$. Wykaż, że T jest zwartym operatorem na l_2 nie posiadającym wartości własnych. Wyznacz operator T^* i znajdź jego wartości własne.
8. Niech $T: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ będzie dany wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(y)dy$, znajdź wartości własne T .
9. Niech T na l_2 będzie zadany wzorem $Tx = (a_n x_n)_n$ dla pewnego ciągu ograniczonego a_n . Znajdź wszystkie wartości własne i spektrum operatora T .

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 12

1. Niech $T: L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ będzie postaci $Tf = gf$ dla pewnego $g \in L_\infty(X, \mu)$. Znajdź wartości własne i spektrum operatora T .
2. Wyznacz spektrum i rezolwentę operatora przesunięcia w lewo i w prawo na l_2 .
3. Niech P będzie rzutem ortogonalnym na domkniętą podprzestrzeń M przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wyznacz spektrum T .
4. Wykaż, że dla dowolnego niepustego, zwartego podzbioru K płaszczyzny zespolonej istnieje operator T na pewnej przestrzeni Hilberta, którego spektrum jest równe K .
5. Wykaż, że jeśli $\lambda \in \sigma(T)$, to $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ dla $n = 1, 2, \dots$.
6. Operator $T: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ jest dany wzorem $Tf(x) = \operatorname{sgn}(x)f(x+1)$. Znajdź sprzężenie Hilbertowskie T^* . Czy T jest samosprzężony, unitarny, normalny?
7. Niech $T: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ będzie postaci $Tf = gf$ dla pewnego $g \in L_\infty(\mathbb{R})$ o wartościach zespolonych. Znajdź sprzężenie Hilbertowskie T^* . Dla jakich g
 - a) T jest samosprzężony,
 - b) T jest unitarny,
 - c) T jest normalny?
8. Podaj przykład operatora liniowego ciągłego T na przestrzeni Hilberta który nie jest unitarny, ale
 - i) $TT^* = \operatorname{Id}$,
 - ii) $T^*T = \operatorname{Id}$,
 - iii) $\|Tx\| = \|x\|$ dla wszystkich x .Czy takie operatory istnieją w przestrzeni skończonego wymiaru?
9. Niech $T: l_2 \rightarrow l_2$ będzie dany wzorem $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $S = T + T^*$. Oblicz $\langle S^n e_1, e_1 \rangle$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej * - 13

1. Wykaż, że jeśli T jest operatorem na zespolonej przestrzeni Hilberta oraz $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ dla wszystkich x , to T jest samosprzężony.
2. Wykaż, że jeśli operator T jest samosprzężony, to $\|T\|$ lub $-\|T\|$ należą do spektrum T .
3. Załóżmy, że $k \in L_2([0, 1]^2)$ i $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$. Określmy

$$Kf(x) = \int_0^1 f(y)k(x, y)f(y)dy.$$

Wykaż, że

- i) K jest zwartym operatorem samosprzężonym;
 - ii) istnieje baza o.n. $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ przestrzeni $L_2[0, 1]$ oraz liczby rzeczywiste $\lambda_n \rightarrow 0$ takie, że $K\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$;
 - iii) $k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}$, przy czym szereg jest zbieżny w $L_2([0, 1]^2)$.
4. Niech T będzie operatorem samosprzężonym. Wykaż, że
 - i) $\lambda \notin \sigma(T)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $c > 0$ takie, że $\|Tx - \lambda x\| \geq c\|x\|$ dla wszystkich x .
 - ii) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.
 - iii) $\sigma(T) \subset [m, M]$ dla $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ i $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ oraz m i M należą do $\sigma(T)$.