

Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej *

24 kwietnia 2025

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu oraz numerem grupy. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Określmy

$$Y = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \right\}.$$

Położmy też $\|(x_n)\|_Y := \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$. Wykazać, że

- i) $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jest przestrzenią unormowaną,
 - ii) jeśli X jest óśrodkowa, to Y jest óśrodkowa,
 - iii) jeśli X jest Banacha, to Y jest Banacha.
2. Wykazać, że
- i) jeśli $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{\infty}(\mathbb{R})$, to $f \in L_p(\mathbb{R})$ dla wszystkich $p \in (1, \infty)$,
 - ii) jeśli $\sup_{p \in (1, \infty)} \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty$, to $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{\infty}(\mathbb{R})$.
3. Niech $F := \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \int_{-n}^n f(t) dt = 0 \text{ dla } n = 1, 2, \dots\}$. Obliczyć

$$\inf_{f \in F} \int_{-10}^{10} |1 - f(t)|^2 dt.$$

4. Niech $(u_n)_{n \geq 1}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Określmy przekształcenie T na $\mathcal{H}$ wzorem

$$Tx = \left(\frac{1}{\sqrt{n+5}} \sum_{k=n+1}^{4n} \langle x, u_k \rangle \right)_{n \geq 1}.$$

Udowodnić, że $Tx \in c_0$ dla $x \in \mathcal{H}$ oraz, że T jest ciągłym przekształceniem z $\mathcal{H}$ w c_0 . Znaleźć normę tego przekształcenia.

5. Dla $1 \leq p \leq \infty$ obliczyć normę przekształcenia z $L_p[0, \infty)$ w l_1 zadanego wzorem

$$Tf = \left(\int_{n-1}^n e^{-x} f(x) dx \right)_{n=1}^{\infty}.$$

6. Dla jakich $p \in [1, \infty]$ istnieje niezerowy ciągły funkcjonal liniowy φ na $L_p[0, 1]$ taki, że $\varphi(1_{[0,t]}) = 0$ dla wszystkich $t \in (0, 1]$?