

Kartkówka 2
7 kwietnia 2025

1. Załóżmy, że $(u_n)_{n=1}^\infty$ jest bazą o.n. przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech

$$v_{2n-1} = \frac{3}{5}u_{2n-1} + \frac{4}{5}u_{2n}, \quad v_{2n} = \frac{4}{5}u_{2n-1} - \frac{3}{5}u_{2n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Wykaż, że $(v_n)_{n \geq 1}$ jest układem ortonormalnym w $\mathcal{H}$. Czy jest on zupełny?

2. Niech

$$M = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2: x_{2n-1} = x_{2n} \text{ dla } n = 1, 2, \dots\}.$$

Znajdź przestrzeń $M^\perp$ oraz rzut wektora $e_1 = (1, 1/2, 1/4, \dots)$ na M .