

Egzamin z Analizy Funkcjonalnej *

18 czerwca 2025

Część zadaniowa (40pkt)

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-8. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Określmy

$$Tf := \left(\int_{-1}^1 f e^{-\pi i n t} dx \right)_{n \geq 1}, \quad f \in L_2[-1, 1].$$

- Wykazać, że istnieje $f \in L_2[-1, 1]$ taka, że $Tf \notin \ell_p$ dla $p < 2$.
 - Udowodnić, że dla $p \in [2, \infty]$, T jest ciągłym operatorem liniowym z $L_2[-1, 1]$ w ℓ_p oraz obliczyć jego normę.
 - Czy T jest operatorem zwartym z $L_2[-1, 1]$ w ℓ_∞ ?
2. Wykazać, że ciąg funkcji f_n zbiega słabo do zera w $L_4[0, 2]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące dwa warunki:
- $\sup_n \int_0^2 |f_n(x)|^4 dx < \infty$,
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 x^k f_n(x) dx = 0$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$
3. Ciągłe funkcjonały liniowe φ_n na przestrzeni Banacha X spełniają warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^3 < \infty \text{ dla } x \in X.$$

Czy wynika stąd, że

- $\sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^3 < \infty$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^3 < \infty$?

4. Określmy operator $T: L_1[0, \infty) \mapsto c_0$ wzorem

$$Tf = \left(\arctg(n) \int_n^{n+1} f(x) dx \right)_{n \geq 1}.$$

- Udowodnić, że T jest dobrze określony i ciągły. Oblicz $\|T\|$.
 - Znaleźć T^* i obliczyć $\|T^*\|$.
5. Wykazać, że operator liniowy T z przestrzeni Banacha X w c_0 jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą w normie operatorowej ciągłych operatorów liniowych skończonego rzędu.
6. Określmy operator T na przestrzeni $L^2[0, \infty)$ wzorem $Tf = (i + (x+1)I_{\{x \leq 1\}})f(x)$.
- Wyznaczyć sprzężenie Hilbertowskie T^* .
 - Znaleźć wartości własne operatorów T i T^* .
 - Znaleźć widmo operatorów T i T^* .

Proszę obrócić kartkę by rozwiązać część testową egzaminu!

Część testowa (20pkt)

Proszę uzupełnić wy kropkowane miejsca i podać odpowiedzi na zadane pytania.

1. (3pkt) Jeśli

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 |x^5 - a - bx|^2 dx = \int_0^1 |x^5 - a_0 - b_0 x|^2 dx,$$

to $a_0 = \dots\dots\dots$, $b_0 = \dots\dots\dots$

2. (3pkt) Niech

$$M = \left\{ f \in L_2[0, \infty) : \int_n^{n+1} x f(x) dx = 0, n = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Wówczas $M^\perp = \dots\dots\dots$
oraz $P_M(x^2 I_{[0,10]}(x)) = \dots\dots\dots$

3. (3pkt) Wzór $\varphi(f) = \int_0^\infty (2+t)^{-1/4} f(t) dt$ zadaje funkcjonal ciągły na $L_p[0, \infty)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\dots\dots\dots$ Norma tego funkcjonału wynosi $\dots\dots\dots$
4. (2pkt) Podać definicję (wraz z określeniem normy) przestrzeni dualnej do $C[0, 1]$.

5. (2pkt) Sformułować twierdzenie Banacha o przekształceniu otwartym.

6. (2pkt) Które z poniższych przestrzeni są refleksywne (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): $L_4[0, 1]$, c_0 , ℓ_2 , ℓ_∞ , $C[0, 1]$?

7. (2pkt) Podać definicję słabej topologii na przestrzeni Banacha X .

8. (3pkt) Sformułować twierdzenie o diagonalizacji operatorów zwartych samosprzężonych na ośrodkowych przestrzeni Hilberta nieskończonego wymiaru.