

(1)

1. Funkcje holomorficzne.

1.1. Liczy rzeczywiste. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy symbolem $\mathbb{R}$, zbiór liczb niewymiernych symbolem $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ jest przestrzenią euklidesową.

Liczbę zespoloną $z = a + ib$, $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$, utworzamy z punktem (a, b) przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Sprzężenie $\bar{z} = a - ib$ jest odbiciem symetrycznym $z = a + ib$ względem osi rzeczywistej $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

W $\mathbb{C}$ wprowadzamy topologię wyznaczoną przez metrykę euklidesową: $|z_1 - z_2| = \sqrt{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}$ jest odległością między $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, traktowanymi jako punkty przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Mówiąc o zbliżeniu ciągów, zbiorach otwartych i domkniętych w $\mathbb{C}$, będziemy odwoływali się do topologii euklidesowej. Tak więc, dla $z_n, z_0 \in \mathbb{C}$,

$$(z_n \rightarrow z_0) \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z_0 \text{ i } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z_0).$$

Liczbę zespoloną $z \in \mathbb{C}$ można zapisać w postaci

$$(1) \quad z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta),$$

przy czym każdy kąt θ spełniający (1) nazywamy argumentem liczby z ; każde dwa argumenty z różnią się o całkowitą wielokrotność 2π .

Jeśli

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

to zgodnie z formułą de Moivre'a,

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)),$$

(2)

w szczególności, dla z w postaci (1),

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

1.2. Eksponenta $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Przypomnijamy, że dla rzeczywistych $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp t = e^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n.$$

1.2.1. Twierdzenie. Dla każdej liczby zespolonej $z = a + ib$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Dowód. Maury

(1) $1 + \frac{z}{n} = \left(1 + \frac{a}{n}\right) + i \frac{b}{n} = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$,
gdzie

(2) $r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2} = \sqrt{1 + t_n}$, $t_n = \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}$.

Ponadto, jeśli $1 + \frac{a}{n} > 0$, możemy wybrać w (1) argument

$\theta_n \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tzn. możemy przypisać, że dla dostatecznie dużych n ,

(3) $\theta_n = \arctan s_n$, $s_n = \frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}$, $\frac{a}{n} > -1$.

Ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\arctan s}{s} = 1$, z (2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + t_n\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{n}{2} \frac{\ln(1+t_n)}{t_n} t_n\right) = e^a,$$

oraz zgodnie z (3),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\arctan s_n}{s_n} s_n = b.$$

Zatem, z (1), (2), (3),

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_n r_n^n (\cos(n\theta_n) + i \sin(n\theta_n)) = e^a (\cos b + i \sin b).$$

1.2.2. Definicja. Eksponenta $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ określony formułą

$$\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Będziemy też pisać $\exp z = e^z$, a więc z 1.2.1,

(4) $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1.2.3. Uwaga.

- (A) Z (4) otrzymujemy formułę Eulera $e^{i\pi} = -1$.
- (B) Eksponenta nie przyjmuje wartości zero. Zgodnie z (4), rozwiązania równania
- (5) $e^z = w$, $w \neq 0$,
są opisane wzorem
- (6) $z = \ln|w| + i\theta$, θ - argument liczby w ,
a więc w szczególności, każde dwa rozwiązania równania
(5) różnią się o całkowitą wielokrotność liczby $2\pi i$.

1.2.4. Twierdzenie. $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.

Dowód. Wystarczy odwołać się do (4) i formuły de Moivre'a.

Z (4), dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

(4)

co prowadzi do naturalnego rozszerzenia funkcji $\cos$ i $\sin$ na dziedzię zespoloną.

1.2.5. Definicja. Dla $z \in \mathbb{C}$, przyjmujemy

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

1.3. Różniczkowanie funkcji zespolonej.

1.3.1. Definicja. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$ i $z_0 \in U$. Funkcja f ma w z_0 pochodną $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, jeśli

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

lub równoważnie,

$$(1) \quad f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h), \quad \text{gdzie } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

1.3.2. Definicja. Funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ określona na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$ jest holomorfinna, jeśli ma pochodną w każdym punkcie U , tzn. jest różniczkowalna na U .

Jaki zobaczymy później, różniczkowalność funkcji zespolonej na zbiorze otwartym ma konsekwencje mocno silniejsze, niż różniczkowalność funkcji zmiennej rzeczywistej.

W szczególności, pokazujemy, że funkcja holomorfinna $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ma pochodną dowolnego rzędu na U i f rozwija się w szereg potęgowy w otoczeniu dowolnego punktu w U , a więc jest na U analityczna.

Niech $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$. Utworzymy ciąg linii zespolonych z punktami

(5)

W przestrzeni $\mathbb{R}^2$, możemy rozpatrywać f jako funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$.

Pamiętajmy, że pochodna takiej funkcji f w punkcie $z_0 \in U$, w sensie rzeczywistym, jest przekształceniem liniowym $df(z_0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spełniającym warunki

$$(2) \quad f(z_0 + h) = f(z_0) + df(z_0)(h) + \alpha(h), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\alpha(h)|}{|h|} = 0.$$

Porównując (1) i (2) widzimy, że istnienie pochodnej w sensie rzeczywistym $f'(z_0)$ oznacza dokładnie, że f jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym i jej pochodna

$df(z_0)$ jest operacją mnożenia przez linie rzeczywiste $f'(z_0)$ (tzn. zlożeniem obrotu o argument $f'(z_0)$ z podobieństwem o współczynniku $|f'(z_0)|$),

$$(3) \quad df(z_0)(h) = f'(z_0) \cdot h,$$

lub w zapisie rzeczywistym,

$$(4) \quad df(z_0)(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad f'(z_0) = a + ib.$$

Te obserwacje prowadzą do następującego stwierdzenia.

1.3.3. Twierdzenie. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją

zależną od złazone odwartym $U \subset \mathbb{C}$,

$$(5) \quad f(z) = u(z) + i \cdot v(z), \quad u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f$$

i funkcje $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ rozpatrywane jako funkcje dwóch zmiennych rzeczywistych mają na U ciągłe pochodne cząstkowe. Wówczas f jest funkcją

⑥

holomorfizm na U wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równania Cauchy-Riemanna

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

przy czym wówczas

$$(7) \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

Dowód. Istnienie ciągłych pochodnych cząstkowych gwarantuje istnienie pochodnej w sensie rzeczywistym $df(z)$ w każdym punkcie z , opisanej macierzą

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{bmatrix}.$$

Przećwi istnienie pochodnej w sensie zespolonym $f'(z)$ jest równoważne formule (4), mamy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad f'(z) = a + ib,$$

stąd dostajemy natychmiast (6) i (7). 

Uwaga. Znamy subtelniejsze twierdzenie

Leomana-Menchoffa onego, że holomorfność $f = u + iv$ na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$ wynika ze słabszego założenia, że funkcja f jest ciągła na U oraz u i v mają na U określone pochodne cząstkowe, spełniające równania Cauchy-Riemanna (a więc ciągłość pochodnych cząstkowych jest konsekwencją pozostałych założeń). Więcej informacji

(7)

na ten temat można znaleźć w artykule J. D. Gray'a i S. A. Morrisa, When is a function that satisfies the Cauchy-Riemann equations analytic, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 246 - 256.

1.3.4. Twierdzenie. $(\exp z)' = \exp z$.

Dowód. Zgodnie z 1.2 (4),

$$\exp(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y), \quad u(x,y) = e^x \cos y, \\ v(x,y) = e^x \sin y.$$

Ponieważ $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$, spełnione są założenia Twierdzenia 1.3.3, a więc z (7), $(\exp(x+iy))' = e^x \cos y + i e^x \sin y = \exp(x+iy)$. 

1.3.5. Uwaga. Reguły różniczkowania funkcji zespolonych są analogiczne do reguł różniczkowania funkcji rzeczywistych:

- (i) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$,
- (ii) $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) g'(z_0)$,
- (iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g^2(z_0)}$,
- (iv) $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) g'(z_0)$.

Ponadto, jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$ i $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow U$ jest

(8)

funkcji różniczkowalnej zmiennej rzeczywistej,
 $\varphi' = (\operatorname{Re} \varphi)' + i (\operatorname{Im} \varphi)'$, to

$$(v) \quad (f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t). \quad \blacksquare$$

2 1.3.4 i 1.3.5, zgodnie z 1.2.5 mamy

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \\ &= - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z \end{aligned}$$

i podobnie, $(\sin z)' = \cos z$.

1.4. Gałęzie argumentu i logarytmu.

1.4.1. Definicja. Gałęzią argumentu w zbiorze otwartym

$U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazywamy funkcję ciągłą $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że

$$(1) \quad z = |z| (\cos \varphi(z) + i \sin \varphi(z)), \quad \text{dla } z \in U.$$

1.4.2. Uwaga. W pierścieniu $U = \{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ nie istnieje gałąź argumentu.

Zalóżmy przeciwnie, że istnieje funkcja ciągła $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca (1). Dla $t \in [0, 2\pi]$ mamy wówczas

$$e^{it} = \cos t + i \sin t = \cos(\varphi(e^{it})) + i \sin(\varphi(e^{it})).$$

Ponieważ zarówno t jak i $\varphi(e^{it})$ są argumentami e^{it} , funkcja ciągła $\psi(t) = \frac{1}{2\pi} (\varphi(e^{it}) - t)$ na przedziale $[0, 2\pi]$ przyjmuje wartości całkowite, więc jest stała. Ale $\psi(0) = \frac{1}{2\pi} \varphi(1)$ oraz $\psi(2\pi) = \psi(0) - 1$, co daje sprzeczność.

⑨

1.4.3. Definicja. Niech $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$. Funkcja $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow (-\pi, \pi)$ przyporządkowująca linii zespolonej $z \notin \mathbb{R}_-$ jedyny argument tej linii z przedziału $(-\pi, \pi)$ jest ciągła, a więc jest gęsto argumentu w $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Funkcja Arg nazywamy gęsto główny argumentu.

1.4.4. Definicja. Gęsto logarytmu w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazywamy funkcję ciągłą $L : U \rightarrow \mathbb{C}$ taką, że

$$(2) \quad \exp(L(z)) = z, \text{ dla } z \in U.$$

1.4.5. Uwaga Jeśli $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest gęsto argumentu, to zgodnie z 1.2.3, (5) i (6),

$L(z) = \ln|z| + i\varphi(z)$ jest gęsto logarytmu w U i na odwrót, jeśli $L : U \rightarrow \mathbb{C}$ jest gęsto logarytmu to $\text{Im} L : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest gęsto argumentu.

W szczególności, z 1.4.2, w pierścieniu $\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ nie istnieje gęsto logarytmu.

1.4.6. Definicja Funkcja $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ określona formułą

$$(3) \quad \text{Log } z = \ln|z| + i\text{Arg } z,$$

gdzie Arg jest gęsto główny argumentu (zob. 1.4.3), nazywamy gęsto główny logarytmu.

(10)

1.4.7. Twierdzenie. Każda gęsta logarytmu $L: V \rightarrow \mathbb{C}$ w przestrzeni dwuwymiarowej $V \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest funkcją holomorficzną i $L'(z) = \frac{1}{z}$ dla $z \in V$.

Dowód. Dla $z_0 \in V$ mamy zgodnie z (2)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{L(z) - L(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{L(z) - L(z_0)}{\exp(L(z)) - \exp(L(z_0))}.$$

Cisnęć L zapewnia, że $\lim_{z \rightarrow z_0} L(z) = L(z_0)$, a więc z 1.3.4,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\exp(L(z)) - \exp(L(z_0))}{L(z) - L(z_0)} = \exp(L(z_0)) = z_0,$$

Stąd $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{L(z) - L(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z_0}$. ■

Pamiętajmy, że dla dodatniej liczby rzeczywistej t oraz $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$t^\alpha = \exp(\alpha \ln t).$$

1.4.8. Definicja. Każdą gęstą potęgę zespoloną o wykładniku $w \in \mathbb{C}$ nazywamy funkcją określoną na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ wzorem

$$z^w = \exp(w \operatorname{Log} z).$$

W szczególności (zob. (3)),

$$i^i = \exp(i \operatorname{Log} i) = \exp(i (i \frac{\pi}{2})) = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

2. Całkowanie funkcji względem drogi.

2.1. Całkowanie funkcji $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Funkcja $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, jeśli obie funkcje $\operatorname{Re} \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna i całkę określamy wówczas formułą

$$(1) \quad \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t) dt.$$

Tak określona całka jest funkcją liniową w przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$ funkcji $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ całkowalnych w sensie Riemanna.

Sprawdźmy, że dla funkcji całkowalnej $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(2) \quad \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Istnieje, miedzy $\int_a^b \varphi(t) dt = r e^{i\theta}$, $r, \theta \in \mathbb{R}$. Dla $w = e^{-i\theta}$ mamy wówczas $\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| = r = w \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b w \varphi(t) dt = \operatorname{Re} \left(\int_a^b w \varphi(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(w \varphi(t)) dt \leq \int_a^b |w \varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt.$

2.2. Drogi i pętle kawałkami C^1

Funkcja ciągła $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest kawałkami C^1 ,

jeśli istnieje podział $a = a_0 < \dots < a_n = b$ przedziału $[a, b]$ taki, że wewnątrz każdego przedziału $[a_{j-1}, a_j]$ funkcja u ma ciągłą pochodną i istnieje granica liczb $u'(t)$ oraz liczb $u(t)$.

$t \rightarrow a_{j-1}^+$ $t \rightarrow a_j^-$

W szczególności, pochodna funkcji kawałkami C^1 jest całkowalna w sensie Riemanna.

Droga kawałkami C^1 w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ nazywamy funkcję ciągłą $\gamma: [a, b] \rightarrow U$, której część rzeczywista i urojona $\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są kawałkami C^1 .

Długość drogi $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ kawałkami C^1 jest określona formułą

$$(1) \quad l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

(zauważmy, że funkcja $|\gamma'| = \sqrt{(\operatorname{Re} \gamma')^2 + (\operatorname{Im} \gamma')^2}$ jest całkowalna w sensie Riemanna).

Pętla w $\mathbb{C}$ nazywamy drogę $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, dla której $\gamma(a) = \gamma(b)$.

2.3. Całka funkcji zespolonej wzdłuż drogi kawałkami C^1

Nech $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie drogą kawałkami C^1 i niech $f: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą.

Funkcja $t \rightarrow f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ jest wówczas całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ i całość funkcji f wzdłuż drogi γ określamy formułą

$$(1) \int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Zauważamy, że jeśli $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ jest homeomorfizmem kawałkami C^1 , to droga $\gamma \circ T: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ jest kawałkami C^1 oraz

$$(2) \int_{\gamma \circ T} f(z) dz = \begin{cases} \int_{\gamma} f(z) dz, & \text{jeśli } T \text{ jest funkcją rosnącą,} \\ -\int_{\gamma} f(z) dz, & \text{jeśli } T \text{ jest funkcją malejącą,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{bo } \int_{\gamma \circ T} f(z) dz &= \int_{\pi(a)}^{\pi(b)} f(\gamma \circ T(t)) (\gamma \circ T)'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)(T(t)) \gamma'(T(t)) T'(t) dt \\ &= \int_{T(a)}^{T(b)} f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds. \end{aligned}$$

2.3.1. Przykłady

(A) Całka wzdłuż zorientowanej łamanej w $\mathbb{C}$. Standardowy parametrizacja zorientowanego odcinka $[\gamma_0, \gamma_1] \subset \mathbb{C}$ jest droga

$$\gamma(t) = \gamma_0 + t(\gamma_1 - \gamma_0), t \in [0, 1]. \text{ Dla funkcji ciągłej } f: [\gamma_0, \gamma_1] \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\int_{[\gamma_0, \gamma_1]} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz = (\gamma_1 - \gamma_0) \int_0^1 f(\gamma_0 + t(\gamma_1 - \gamma_0)) dt.$$

W szczególności, $\int_{[\gamma_0, \gamma_1]} f(z) dz = - \int_{[\gamma_1, \gamma_0]} f(z) dz.$

Jeśli $T = \{t_0 \gamma_0 + t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2 : t_j \geq 0, t_0 + t_1 + t_2 \leq 1\}$ jest trójkątem o wierzchołkach $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, którego brzeg ∂T ma orientację standardową (tzn. kolejność $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ wyznacza obrót przeciwny do ruchu wskazówek zegara)

(14)

$\gamma: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą, przyjmujemy

$$\int_{\mathbb{D}} f(z) dz = \int_{[\gamma_0, \gamma_1]} f(z) dz + \int_{[\gamma_1, \gamma_2]} f(z) dz + \int_{[\gamma_2, \gamma_0]} f(z) dz$$

(B) Całka wzdłuż zorientowanego brzegu koła w $\mathbb{C}$.

Niech $D = \{z: |z - z_0| \leq r\}$ będzie kołem domkniętym. Standardowa parametryzacja okręgu $\partial D = \{z: |z - z_0| = r\}$, zgodna z obiegiem ∂D przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jest pętla $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Dla funkcji ciągłej $f: \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz =$

$$= 2\pi r \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{it} dt.$$

W szczególności, $\int_{\partial D} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi r \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$.

Tak więc

$$(3) \quad \int_{\partial D} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

2.3.2. Uwaga Niech $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją kawałkami C^1 i $f: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ funkcją ciągłą. Wówczas, zob. 2.2(1)

$$(4) \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq l(\gamma) \sup_{\gamma} |f(z)|. \quad \exists \in \gamma([a, b]) \text{ f.}$$

Korotnie, z 2.1.(2), dla $M = \sup_{\gamma} |f(z)|: z \in \gamma([a, b])$,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq M \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M l(\gamma).$$