Wybrane zagadnienia algorytmiki, ćwiczenia 11, 15.05.2013

Uzupełnienie wykładu

Definicja 0.1. Funkcją Walsha dla $A \subseteq [n]$ nazwiemy $\chi_A(x) = \prod_{i \in A} x_i$.

Zadanie 1. Pokaż, następujące własności:

1. $\chi_\emptyset = 1$, $E[\chi_A] = 0$ dla $A \neq \emptyset$.
2. $E[\chi_A(x)\chi_B(x)] = [A = B]$, czyli funkcje χ_A są bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta funkcji $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$.
3. Dla
$$\hat{f}(A) = E[f(x)\chi_A(x)]$$
mamy
$$f(x) = \sum_{A \subseteq [n]} \hat{f}(A)\chi_A(x).$$
Czyli $\hat{f}(A)$ to współczynnik przy χ_A w reprezentacji f w bazie funkcji Walsha.
4. (Tożsamość Parsevala)
$$1 = E[f^2(x)] = \sum_{A \subseteq [n]} \hat{f}^2(A).$$

Definicja 0.2. Niech $f : \{-1, 1\}^m \to \{-1, 1\}$. *Wpływem* i-tej współrzędnej na f nazywamy:
$$Inf_i(f) := P[f(x) \neq f(x^{(i)})],$$
gdzie $x^{(i)}$ to wektor x z odwróconym i-tym bitem.

Zadanie 2. Policz wpływ poszczególnych zmiennych dla funkcji dyktaktora oraz majority (przy założeniu że m jest nieparzyste funkcja majority zwraca wartość, która występuje częściej we współrzędnych wektora).

Zadanie 3. Pokaż, że
$$Inf_i(f) = \sum_{S : i \in S} \hat{f}(S)^2$$

Redukcje

Istnieje wzmocnienie UGC.

Twierdzenie 0.3. Jeśli zachodzi UGC, to dla każdego $0 < \delta < 1/2$ NP-trudne jest rozróżnienie $\leqslant \delta$-spełnialnych od $\geqslant (1 - \delta)$-spełnialnych instancji problemu Unique Label Cover, nawet gdy każda permutacja $\pi_{x,y}$ jest postaci $\pi_{x,y}(i) = i + c_{u,v} \pmod m$, gdzie $c_{u,v} \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Instancje problemu ULC, gdzie $\pi_{x,y}$ jest powyższej postaci nazywamy MAX-2-LIN, gdyż można taką instancję interpretować jako równiania liniowe na dwóch zmiennych.

W problemie MULTICUT mamy dany graf nieskierowany $G = (V, E)$ oraz zbiór par wierzchołków $s_i, t_i \in V$. Naszym celem jest znalezienie zbioru $X \subseteq E$ o minimalnym rozmiarze, takiego że w $G \setminus X$ nie istnieje spójna składowa zawierająca jednocześnie s_i oraz t_i dla pewnego i.

Rozważmy następującą redukcję z liniowego ULC do Multicuta. Mają instancję liniowego ULC $G = (V, E), (c_{u,v})_{uv \in E}, L = \{0, \ldots, m-1\}$ tworzymy $V' = V \times L$ oraz $E' = \{(u,i)(v,j) : uv \in E, i - j = c_{u,v} \pmod m\}$. Dla każdego $u \in V$, $i, j \in L$, $i \neq j$ tworzymy parę terminali $s = (u, i)$ oraz $t = (u, j)$.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli MAX-2-LIN ma rozwiązanie spełniające $(1-\epsilon)|E|$ krawędzi, to istnieje rozwiązanie problemu MULTICUT o koszcie co najwyżej $\epsilon|E'|$.

Zadanie 5. Dla dowolnego $0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$ mając dane rozwiązanie problemu MULTICUT o koszcie co najwyżej $\epsilon|E'|$ możemy skonstruować rozwiązanie problemu MAX-2-LIN spełniające co najmniej $(1-2\epsilon)|E|$ wszystkich krawędzi.

Zadanie 6. Wywnioskuj, że jeśli zachodzi UGC oraz $P \neq NP$, to nie istnieje $\mathcal{O}(1)$-aproksymacja dla problemu MULTICUT.