Wybrane zagadnienia algorytmiki
Zadania domowe, seria II

Zadanie 1. Pokaż, że jeśli $a, b, c \in \{-1, 1\}$, to następujące wyrażenie przyjmuje wartość 1 gdy zachodzi $(a = c \vee b = c)$, a 0 w przeciwnym wypadku:

$$\frac{1+ac}{4} + \frac{1+bc}{4} + \frac{1-ab}{4}\,.$$

W oparciu o powyższą własność pokaż, jak uzyskać algorytm 0.87-aproksymacyjny dla problemu MAX-2-SAT, gdzie mamy daną formułę w postaci CNF, a każda klauzula składa się z dokładnie dwóch różnych literałów i chcemy znaleźć wartościowanie, które spełnia możliwie wiele klauzul.

Zadanie 2. Dla grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ przez $a(G)$ oznaczmy rozmiar najliczniejszego zbioru $X \subseteq V$, takiego że $G[X]$ nie zawiera trójkątów. Pokaż, jak w czasie wielomianowym znaleźć funkcję $f : V \to [0, 1]$, taką że:

- $\sum_{v \in V} f(v) \geq a(G)$,
- dla każdej kliki $C \subseteq V$ w G mamy $\sum_{v \in C} f(v) \leq 2$.

Zadanie 3. W problemie k-mediany mamy daną metrykę (V, d), $V = F \cup C$, gdzie F to obiekty użyteczności publicznej (ang. facilities), a C to miasta. Ponadto na wejściu mamy daną liczbę całkowitą k. Należy znaleźć podzbiór $I \subseteq F$ obiektów, o mocy $|I| \leq k$, które zostaną otwarte tak aby koszt podłączenia miast do najbliższego otwartego obiektu był możliwie najmniejszy, tj zminimalizować $\sum_{c \in C} d(c, I)$.

Pokaż, że przy odpowiednich założeniach nie da się aproksymować problemu k-mediany ze współczynnikiem $(1 + 2/e - \epsilon)$.

Zadanie 4. Przypomnijmy, że funkcją Walsha dla $A \subseteq [n]$ nazwiemy $\chi_A(x) = \prod_{i \in A} x_i$ oraz

$$f(x) = \sum_{A \subseteq [n]} \hat{f}(A)\chi_A(x).$$

Niech f będzie funkcją $f : \{-1, 1\}^m \to \{-1, 1\}$ oraz $\rho \in [-1, 1]$. Dla ustalonego $x \in \{-1, 1\}^m$ definiujemy $y \in \{-1, 1\}^m$:

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{z pstwem } (1+\rho)/2 \\ -x_i & \text{z pstwem } (1-\rho)/2 \end{cases}$$

wektor y uzyskany w ten sposób uznaczymy $y \sim_\rho x$. Stabilnością na szum funkcji f nazywamy

$$NS_\rho(f) = \mathbb{E}_{x \in \{-1,1\}^m, y \sim_\rho x}[f(x)f(y)]\,.$$

Pokaż, że

$$NS_\rho(f) = \sum_{S \subseteq [m]} \hat{f}(S)^2 \rho^{|S|}\,.$$

Zadanie 5. Udowodnij, że dla dowolnego algorytmu deterministycznego $\mathcal{A}$ oraz dowolnych liczb $m^*, n \in \mathbb{N}$, istnieje scenariusz (w sensie takim jak na wykładzie), w którym:

- bierze udział n ekspertów,
- najlepszy z ekspertów popełnia m^* błędów,
- algorytm $\mathcal{A}$ popełnia $\geq 2m^* + \log_2 n$ błędów.

Kluczowy jest tu oczywiście współczynnik 2. Dla algorytmów randomizowanych uzyskaliśmy na wykładzie wartość $(1 + \varepsilon)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$.