Wybrane zagadnienia algorytmiki
Zadania domowe, seria I

for $v \in V$ **do**
  $D_{v,v} = 0$
end for
for $u, v \in V, u \neq v$ **do**
  if $(u, v) \in A$ **then** $D_{u,v} = 1$
  else $D_{u,v} = \infty$
  end if
end for
$B \leftarrow \{1, \dots, n\}$
for $i := 1 \to \lceil \log_{3/2} n \rceil$ **do**
  $s := \lceil (3/2)^i \rceil$
  $B :=$losowy podzbiór zbioru B rozmiaru $\min(|B|, \lceil 9(n \log n)/s \rceil)$
  $D_{V,B} := \min(D_{V,B}, D_{V,B} * D_{B,B})$
  $D_{B,V} := \min(D_{B,V}, D_{B,B} * D_{B,V})$
end for

ZADANIE 1. Pokaż, że po wykonaniu powyższego algorytmu dla grafu skierowanego (nieważonego) $G = (V, A)$ (gdzie $*$ to min-plus product) za pomocą macierzy D z prawdopodobieństem co najmniej $1/2$ możemy w czasie $O(n)$ znaleźć długość najkrótszej ścieżki z wierzchołka a do wierzchołka b, dla danych $a, b \in V$.

> BUDGETED k-SET PACKING
> **Dane:** Rodzina $\mathcal{F} \subseteq 2^U$, gdzie $\forall_{S \in \mathcal{F}} |S| \leq k$, oraz funkcje $c : \mathcal{F} \to \{1, \dots, r\}$, $b : \{1, \dots, r\} \to \mathbb{N}$.
> **Cel:** Znajdź najliczniejszą podrodzinę $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ parami rozłącznych zbiorów, taką że dla każdego $1 \leq i \leq r$ zachodzi $|\mathcal{F}' \cap c^{-1}(i)| \leq b(i)$.

ZADANIE 2. Pokaż, że istnieje stała c, taka że dla każdego k istnieje algorytm $(k+c)/2$-aproksymacyjny dla problemu BUDGETED k-SET PACKING.

ZADANIE 3 (MARSJAŃSKA INWAZJA). Marsjanie planują inwazję na planetę **Hiperkostka d-wymiarowa**. W każdym dniu inwazji mogą zrzucić oddziały desantowe na jedno z miast-wierzchołków i zdobyć je. Ponadto, jeśli w i-tym dniu inwazji miasto x jest zdobyte, to w dniu $(i+1)$-szym zdobyte są także wszystkie miasta sąsiednie. Łatwo można znaleźć strategię gwarantującą podbój hiperkostki w $D = \lceil \frac{d}{2} \rceil + 1$ dniach. Jeśli utożsamimy hiperkostkę z $\{-1, 1\}^d$, to wystarczy zaatakować $(-1, -1, \dots, -1)$ pierwszego dnia oraz $(1, 1, \dots, 1)$ drugiego, po czym poczekać $D - 2$ dni. Należy pokazać, że nie istnieje lepsza strategia.
Wskazówka: Warto udowodnić następujący lemat:

Lemat 1. *Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n} \in \{-1, 1\}^n$ istnieje wektor $\mathbf{v} \in \{-1, 1\}^n$ taki, że*

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v_i}| < 2i$$

dla wszystkich $i = 1, \dots, n$.

Najłatwiej zrobić to adaptując technikę iterowanego zaokrąglania do następującego programu liniowego (bez funkcji celu): $\forall_{i=1,\dots,n} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v_i} = 0$, gdzie $-1 \leq x_i \leq 1$ dla $i = 1, \dots, n$.

Zadanie 4 (Kurier). Kurier musi dostarczyć k przesyłek. Każda z przesyłek ma ustalony punkt nadania s_i i punkt docelowy t_i. Kurier nie może w żadnym momencie przewozić więcej niż C przesyłek, $C \in \mathbb{N}_+$. Może jednak zostawiać przesyłki w dowolnych miejscach (dobrze je chowając) i potem po nie wracać. Kurier zaczyna obsługę przesyłek w bazie b i musi do tej bazy wrócić po dostarczeniu wszystkich przesyłek. Chcemy aby łączna długość trasy kuriera była jak najmniejsza.

Sieć połączeń w mieście, w którym pracuje kurier modelujemy spójnym grafem nieskierowanym $G = (V, E)$ wraz z funkcją $w : E \to \mathbb{R}_+$, która opisuje długości ulic. Każda przesyłka jest opisana parą $s_i, t_i \in V$. Zaproponuj algorytm $O(\log n)$-aproksymacyjny.