Wybrane zagadnienia algorytmiki, ćwiczenia 1, 27.02.2013

Problem 1. Pokaż, że mając dany algorytm, który sprawdza czy w grafie G istnieje doskonałe skojarzenie, możemy za pomocą $O(\log n)$ uruchomień znaleźć rozmiar najliczniejszego skojarzenia w danym grafie G'.

Pokaż również, jak rozwiązać powyższe zadanie dla grafów dwudzielnych.

Problem 2. Pokaż, że mając dany algorytm, który oblicza rozmiar najliczniejszego skojarzenia, możemy za pomocą wielomianowej liczby jego uruchomień skonstruować najliczniejsze skojarzenie w danym grafie.

Problem 3. Pokaż, że dla grafu dwudzielnego rząd konstruowanej na wykładzie macierzy A jest równy rozmiarowi najliczniejszego skojarzenia.

Problem 4. Pokaż, że dla macierzy antysymetrycznej ($A^T = -A$) istnieje podmacierz $A_{S,S}$, taka że $\mathrm{rank}(A_{S,S}) = |S| = \mathrm{rank}(A)$.

Problem 5. Udowodnij, że rząd macierzy Tutte'a wynosi dwukrotność rozmiaru najliczniejszego skojarzenia.

Problem 6. Mamy dany graf dwudzielny $G = (U \cup V, E)$ oraz wagi $c : E \to \{1, \ldots, n\}$. Pokaż, że istnieje algorytm wielomianowy, który sprawdza czy w G istnieje doskonałe skojarzenie o wadze dokładnie w.

Problem 7. Pokaż, że mając dany graf $G = (V, E)$ oraz wagi $c : E \to \{1, \ldots, W\}$. możemy w czasie $\tilde{O}(Wn^\omega)$ znaleźć zbiór krawędzi $e \in E$, takich że e należy do pewnego najtańszego doskonałego skojarzenia.

Problem 8. Dla danego grafu $G = (V, E)$ o n wierzchołkach i $m = n - 1$ krawędziach zdefiniujmy macierz A o wymiarach $n \times m$, gdzie $A_{v,e} = 0$ jeśli $v \notin e$, natomiast $A_{v,e} = 1$ gdy $e = uv$ i $u < v$, a $A_{v,e} = -1$ gdy $e = uv$ i $u > v$.

Pokaż, że jeśli macierz B uzyskamy z macierzy A przez usunięcie dowolnego wiersza, to $|\det(B)| = 1$ gdy G jest drzewem, natomiast $\det(B) = 0$ w przeciwnym wypadku.

Problem 9. Sformułowanie tw. Cauchy-Bineta: na tablicy.

Przy pomocy tw. Cauchy-Bineta oraz zadania 8 pokaż, że w czasie wielomianowym dla danego grafu G możemy znaleźć liczbę jego drzew rozpinających (tw. Kirchoffa).

Problem 10. Istnieje odpowiednik tw. Kirchoffa dla grafów skierowanych, za pomocą którego można znaleźć liczbę r-arborescencji, dla danego r, gdzie r-arborescencją nazywamy drzewo, w którym wszystkie krawędzie są skierowane w stronę przeciwną do r.

Korzystając z powyższego, pokaż jak dla danego grafu skierowanego znaleźć liczbę cykli Eulera. (Uwaga: dla grafów nieskierowanych problem znajdowania liczby cykli Eulera jest #P-zupełny.)