Wybrane zagadnienia algorytmiki, ćwiczenia 10, 08.05.2013

Uzupełnienie wykładu

Definicja 0.1. (m, ℓ)-system zbiorów składa się z uniwersum B oraz kolekcji m podzbiorów tegoż uniwersum $\{C_1, \dots, C_m\}$, t.że jeśli weźmiemy dowolne ℓ zbiorów postaci C_i lub $\overline{C_i}$, to jeśli w sumie pokrywają one całe uniwersum, to znaczy że dla pewnego i wzięlismy zarówno C_i oraz $\overline{C_i}$.

Intuicyjnie chodzi o to, że nie da się w nietrywialny sposób pokryć uniwersum korzystając z ℓ zbiorów bądź ich dopełnień (gdyż jeśli weźmiemy dowolny zbiór i dopełnienie to pokryjemy całe uniwersum). Czyli taka konstrukcja wprowadza nam pewnego rodzaju lukę, bo albo wybierzemy dwa zbiory do pokrycia, albo musimy wybrać więcej niż ℓ.

Zadanie 1. Pokazać, że taki system istnieje metodą probabilistyczną dla $|B| = 2^\ell poly(\ell, m)$.

Redukcje

Zadanie 2. Pokaż, że istnieje stała $1 > \alpha > 0$, t.że nie istnieje algorytm α-aproksymacyjny dla zbioru niezależnego o ile $P \neq NP$. (Wskazówka: redukcja z MAX-E3-SAT-a)

Przypomnijmy twierdzenie udowodnione przez Uriela Feige.

Twierdzenie 0.2. Dla każdego $\epsilon > 0$ jeśli istnieje wielomianowy algorytm $(1-\epsilon)\ln n$-aproksymacyjny dla problemu Set Cover to NP$\subseteq$DTIME$(n^{O(\log\log n)})$.

Zadanie 3. W problemie max k-cover mamy dane uniwersum, rodzinę jego podzbiorów oraz liczbę k. Chcemy wybrać dokładnie k zbiorów, żeby zmaksymalizować ich sumę teoriomnogościową.

Pokaż, że przy odpowiednich założeniach nie da się aproksymować problemu max k-cover ze współczynnikiem $(1 - 1/e + \epsilon)$.

Zadanie 4. Pokaż, jak otrzymać algorytm $(1 - 1/e)$-aproksymacyjny dla problemu max k-cover.