

Egzamin z RPiS (część I - 45 minut), 1 lutego 2014

Uwaga: Tam gdzie pytamy o uzasadnienie nie chodzi nam o formalny dowód, ale o krótki jedno/dwuzdaniowy argument. W takim przypadku uzasadnienie jest warte nie więcej niż połowę punktów.

Zadanie 1 (2 punkty). *Jeśli $P(A|B) = P(B|C) = \frac{1}{2}$, to jakie wartości może przyjmować $P(A|C)$? Podaj przedział wartości i krótko uzasadnij.*

Zadanie 2 (2 punkty). *Niech A_1, A_2, A_3 będą takie, że $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ dla dowolnych $i \neq j$. Wtedy*

- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots\dots\dots$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \leq P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots\dots\dots$

UWAGA: *Wpisz TAK lub NIE w wolne miejsca. Za każdą prawidłową odpowiedź 1 punkt, za nieprawidłową -1 punkt.*

Zadanie 3 (1 punkt). *Podaj wzór na dystrybuantę zmiennej $X \sim \text{Geom}(p)$.*

UWAGA: *Podanie definicji dystrybuanty i definicji rozkładu geometrycznego i inne „sprytne” rozwiązania są warte 0 punktów.*

Zadanie 4 (1 punkt). *Dla jakiej/jakich wartości k wyrażenie $P(X = k)$ przyjmuje największą wartość dla $X \sim \text{Pois}(5)$?*

Zadanie 5 (2 punkty). *Niech $g_X(t)$ będzie funkcją tworzącą prawdopodobieństwa zmiennej losowej X . Podaj zmienną Y taką, że $g_Y(t) = (g_X(t))^5$.*

Zadanie 6 (1 punkt). *Niech X_1, \dots, X_n będą niezależne o tym samym rozkładzie i niech $\text{Var}(X_i) = \sigma$ dla $i = 1, \dots, n$. Ile wynosi $\text{Var}(X)$, gdzie $X = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$?*

Zadanie 7 (1 punkt). Czy jeśli X, Y niezależne o rozkładzie normalnym, to XY też ma rozkład normalny? Odpowiedź krótko uzasadnij.

Zadanie 8 (2 punkty). Niech X_1, X_2, \dots będzie łańcuchem Markowa. Wtedy:

- $P(X_3 = s)P(X_5 = t) = P(X_3 = s \wedge X_5 = t)$ dla dowolnych stanów $s, t \dots \dots$
- $P(X_3 = s | X_4 = a)P(X_5 = t | X_4 = a) = P(X_3 = s \wedge X_5 = t | X_4 = a)$ dla dowolnych stanów $a, s, t \dots \dots$

UWAGA: Wpisz TAK lub NIE w wolne miejsca. Za każdą prawidłową odpowiedź 1 punkt, za nieprawidłową -1 punkt.

Zadanie 9 (1 punkt). Narysuj najmniejszy (pod względem liczby stanów) łańcuch Markowa, który ma więcej stanów chwilowych niż powracających.

Zadanie 10 (2 punkty). Podaj przykład estymatora, który jest nieobciążony, ale nie jest (słabo) zgodny. Krótko uzasadnij.