

Egzamin z RPiS (część I - 30 minut), 5 lutego 2010

Uwaga: Tam gdzie pytamy o uzasadnienie nie chodzi nam o formalny dowód, ale o krótki jedno/dwuzdaniowy argument.

Zadanie 1 (1 punkt). Niech A, B, C parami rozłączne i $A \cup B \cup C = \Omega$. Jeśli $P(X|A) = 0.2$, $P(X|B) = 0.7$, $P(X|C) = 0.6$, to jakie wartości może przyjmować $P(X)$? Uzasadnij.

Zadanie 2 (1 punkt). Niech X, Y dowolne zmienne losowe o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji. Czy:

- $E(X + Y) = EX + EY$?
- $E(XY) = (EX)(EY)$?
- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$?
- $\text{Var}(XY) = \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$?

Jeśli Twoja odpowiedź jest w którymś punkcie negatywna, to czy potrafisz podać naturalny warunek wystarczający, aby była ona pozytywna?

Zadanie 3 (2 punkt). Co mówią nierówności Markowa i Czebyszewa w przypadku zmiennej X o rozkładzie Poissona $\text{Pois}(\lambda)$?

Zadanie 4 (1 punkt). Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych o rozkładzie geometrycznym $\text{Geom}(0.5)$. Co mówi Centralne Twierdzenie Graniczne o prawdopodobieństwie $P(\sum_{i=1}^k X_i \geq 2k)$?

Zadanie 5 (2 punkty). Niech M będzie łańcuchem Markowa o stanach $0, 1, 2, \dots$ i prawdopodobieństwach przejścia: $p_{i,i+1} = \frac{i+1}{i+2}$ oraz $p_{i,0} = \frac{1}{i+2}$. Które stany M są chwilowe, a które powracające? Czy M posiada rozkład stacjonarny?

Zadanie 6 (2 punkty). Czy estymator nieobciążony musi być (słabo) zgodny? Czy estymator (słabo) zgodny musi być nieobciążony? W każdym z przypadków odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7 (1 punkt). Jeśli S jest estymatorem największej wiarygodności (MLE) parametru θ , oraz $\alpha = f(\theta)$, gdzie f jest pewną bijekcją, to jak wygląda estymator MLE dla α ? Jeśli S jest estymatorem MLE wartości oczekiwanej dla rozkładu Poissona $\text{Pois}(\lambda)$ o nieznanym λ , to jak wygląda estymator MLE dla wariancji tego rozkładu? Odpowiedzi uzasadnij.