To tak możliwe, jak niezgryzienie tabletki do ssania,
jak już jest super płaska.
Wilq Superbohater, tom 15
„Siedem dziur kominiarza"

Kolokwium z RPiS, 8 grudnia 2011

Zadanie 1 (10 punktów). *Celem tego zadania jest oszacowanie współczynnika $\binom{2n}{n}$ w elementarny sposób.*

1. *Niech X będzie zmienną o rozkładzie dwumianowym z parametrami $2n$ i $\frac{1}{2}$. Oszacuj z dołu $P(X \in [n-\sqrt{n}, n+\sqrt{n}])$. (5 pkt.)*
2. *Korzystając z oszacowania z poprzedniego punktu wyprowadź oszacowanie dolne współczynnika $\binom{2n}{n}$.(5 pkt.)*

Uwaga: *Ponieważ oszacowanie ma być elementarne, to nie używamy wzoru Stirlinga, ani żadnych innych zaawansowanych faktów z AM. Wolno użyć nierówności Chernoffa, jeśli ktoś naprawdę musi, ale odradzamy.*

Zadanie 2 (10 punktów). *Jaś i Małgosia grają w następującą grę. Oboje rzucają sześcienną kostką — wygrywa ten, kto wyrzuci więcej oczek. W przypadku tej samej liczby oczek jest remis. Ojciec Jasia i Małgosi zauważył, że Małgosia oszukuje w następujący sposób: pozwala Jasiowi rzucać jako pierwszemu, po czym sama rzuca dotąd, aż wypadnie jej co najmniej tyle oczek co Jasiowi, zasłaniając się różnymi wymówkami w rodzaju: „Krzywo mi poleciała!", „Chyba stoi na kancie, trudno powiedzieć...", „O rany! Zobacz tam!", itp. Obserwując grę z drugiego pokoju, ojciec zauważył, że Małgosia rzuciła n razy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Jaś wyrzucił k oczek dla każdego $k = 1, \ldots, 6$.*

Zadanie 3 (10 punktów). *Profesor Makary ma za zadanie opracować algorytm obliczający wartość sumy $x_1^2 + \ldots + x_n^2$, gdzie $x_1, \ldots, n_n \in \mathbb{N}$ (choćby w przybliżeniu) za pomocą możliwie małej liczby mnożeń.*

1. *Profesor rozważa obliczenie wartości $(\pm x_1 \pm \ldots \pm x_n)^2$ (tylko jedno mnożenie), w którym znak przy liczbie x_i jest plusem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ niezależnie od pozostałych znaków. Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe wielkości obliczanej przez algorytm profesora. Jakie wartości mają te wielkości dla $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$? (4 pkt.)*
2. *Profesor rozważa też alternatywne rozwiązanie, w którym obliczamy wartość sumy $(\pm x_1 \pm x_2)^2 + (\pm x_3 \pm x_4)^2 + \ldots + (\pm x_{n-1} \pm x_n)^2$. Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe w tym przypadku. (4 pkt.)*
3. *Profesor zastanawia się jak najlepiej sparować liczby w rozwiązaniu omawianym w poprzednim punkcie. Rozważa dwa rozwiązania:*
   - *uporządkować liczby, t.j. $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, lub*
   - *łączyć duże z małymi, t.j. $x_1 \leq x_3 \leq \ldots x_{n-1} \leq x_n \leq x_{n-2} \leq \ldots \leq x_2$.*

   Które z rozwiązań daje mniejsze odchylenie standardowe? (2 pkt.)

Uwaga: *W punktach 2. i 3. zakładamy, że n jest liczbą parzystą.*

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.