

Badania wykazują, że największy procent zgonów
brodaczy występuje na bezludnych wyspach.
Wilq Superbohater, tom 13
„Morderczy bluszcz na przednim siedzeniu”
ep. „Długi dzień na Bolkowej Kępie”

Kolokwium z RPiS, 11 grudnia 2009

Zadanie 1 (10 punktów). Na trzech ścianach kostki czterościennej są umieszczone (na każdej ścianie jedna) kropki: zielona, czerwona, niebieska. Na czwartej ścianie są trzy kropki, po jednej każdego koloru. Prawdopodobieństwa wylosowania poszczególnych ścian to: p_z, p_c, p_n, p_w . Dla jakich wartości tych prawdopodobieństw zdarzenia:

- Z - wylosowano ścianę z zieloną kropką,
- C - wylosowano ścianę z czerwoną kropką,
- N - wylosowano ścianę z niebieską kropką

są parami niezależne?

Zadanie 2. Monty Hall vs szalony informatyk z Excelem (10 punktów). Bierzesz udział w teleturnieju Monty’ego Halla odbywającego się według następującego scenariusza:

1. Monty Hall umieszcza za jedną z $n = 3$ zastłon nagrodę.
2. Ty wybierasz jedną z zastłon.
3. Monty Hall odsłania jedną z pozostałych zastłon, ale nie zastłonę z nagrodą.
4. Możesz zmienić swój wybór.
5. Wygrywasz jeśli za wybraną przez Ciebie zastłonę jest nagroda.

Po latach badań statystycznych udało Ci się skonstruować model zachowania Monty’ego Halla. Wiesz, że umieszcza on nagrodę za i -tą zastłonę z prawdopodobieństwem p_i , dla $i = 1, \dots, n$. Ponadto, jeśli w trzecim kroku zabawy ma do wyboru więcej niż jedną zastłonę, to każdą z nich odsłania z takim samym prawdopodobieństwem.

1. Znajdź optymalną strategię i odpowiadające jej prawdopodobieństwo wygranej (5 punktów),
2. J.w. ale dla czterech zastłon ($n = 4$) (5 punktów).

Uwaga: W dowodzie optymalności możesz ograniczyć swoje rozważania do strategii deterministycznych, tzn. takich, w których wszystkie decyzje są z góry ustalone lub zależne od decyzji Monty’ego Halla.

Zadanie 3 (10 punktów). Niech M będzie losową macierzą $n \times n$ o elementach ze zbioru $\{-1, 1\}$.

1. Oblicz $E(\det M)$ (3 punkty),
2. Oblicz $\text{Var}(\det M)$ (4 punkty),
3. Podaj jak najlepsze oszacowanie z góry na $P(|\det M| \geq C)$, gdzie $C > 0$ (3 punkty).

Wskazówka: Następująca definicja $\det M$ może się okazać przydatna:

$$\det M = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sgn}(\pi) \prod_i M_{i, \pi(i)},$$

gdzie π przebiega po wszystkich permutacjach zbioru $\{1, \dots, n\}$, a $\text{sgn}(\pi)$ jest znakiem permutacji π .

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.