Kolokwium poprawkowe z RPiS, 23 stycznia 2009

Zadanie 1 (10 punktów). *W każdej z k urn ponumerowanych $1, \ldots, k$ znajduje się b kul białych i c czarnych. Losujemy kulę z urny 1 i wrzucamy ją do urny 2, następnie losujemy kulę z urny 2 i wrzucamy do urny 3 itd. Na końcu losujemy kulę z urny k. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ta ostatnia kula jest biała?*

Zadanie 2 (10 punktów). *Igła jest w jednym z n stogów siana. Wiemy, że w i–tym stogu jest z prawdopodobieństwem p_i. Jeśli igła jest w i–tym stogu, to przeszukując ten stóg znajdziemy ją z prawdopodobieństwem a_i. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że igła jest w j–tym stogu jeżeli nie znaleźliśmy jej w i–tym stogu $(i, j = 1, \ldots, n)$?*

Zadanie 3. *Wybieramy losowo permutację π ze zbioru wszystkich permutacji n–elementowych. Punktem stałym permutacji permutacji π nazywamy dowolny x dla którego $\pi(x) = x$.*

1. *Oblicz wartość oczekiwaną liczby punktów stałych π (5 punktów).*
2. *Oblicz wariancję liczby punktów stałych π (5 punktów).*
3. *Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że π ma więcej niż $n/2$ punktów stałych:*
   (a) *Użyj odpowiedniej nierówności z wykładu (5 punktów).*
   (b) *Znajdź wprost oszacowanie postaci $O(1/f(n))$, gdzie $f(n)$ rośnie szybciej niż dowolny wielomian. (5 punktów). Wskazówka: Oszacuj liczbę permutacji o więcej niż $n/2$ punktach stałych, ale nie próbuj jej liczyć dokładnie.*

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.