

Kolokwium z RPiS, 6 grudnia 2008

Zadanie 1 (5 punktów). Rzucamy n -krotnie monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest równe p . Dla jakich wartości n , p i k zdarzenia „w pierwszym rzucie wypadł orzeł” i „łącznie wypadło k orłów” są niezależne?

Zadanie 2 (10 punktów). Każdego dnia deszcz pada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, w przeciwnym przypadku mamy słoneczną pogodę. Telewizyjna prognoza pogody myli się z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, t.j. jeśli prognoza mówi, że pogoda będzie deszczowa, to z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ faktycznie będzie, podobnie, jeśli prognoza mówi, że pogoda będzie słoneczna, to z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ faktycznie będzie.

Profesor zawsze zabiera ze sobą parasol, jeśli prognoza zapowiada pogodę deszczową. Jeśli natomiast zapowiadana jest pogoda słoneczna, profesor zabiera parasol z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$.

1. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że telewizyjna prognoza zapowie deszcz (3 punkty).
2. Zakładając, że pada, oblicz prawdopodobieństwo tego, że profesor nie ma ze sobą parasola (3 punkty).
3. Zakładając, że profesor ma ze sobą parasol, oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie pada (4 punkty).

Zadanie 3 (25 punktów). Z kliki o n wierzchołkach wybieramy podgraf $G = G(n, p)$ w ten sposób, że każda krawędź jest niezależnie wybrana z prawdopodobieństwem p lub nie wybrana z prawdopodobieństwem $1 - p$. Dla powstałego grafu G :

1. Oblicz prawdopodobieństwo, że ustalony wierzchołek jest izolowany (2 punkty).
2. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wierzchołków izolowanych (5 punktów).
3. Wykaż, że wariancja liczby izolowanych wierzchołków jest równa

$$n(1-p)^{n-1} + n(1-p)^{2n-3}(np-1)$$

(8 punktów).

4. Wykaż, że gdy $p = c \cdot \frac{\ln(n)}{n}$ dla pewnej stałej $c < 1$, to prawdopodobieństwo, że G ma wierzchołek izolowany dąży do 1, gdy n dąży do nieskończoności (10 punktów).

Wskazówka: Skorzystaj z wyniku poprzedniego podpunktu i odpowiedniej nierówności.

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.