

*Mało kto wie, ale właśnie teraz odbywają się Mistrzostwa Europy w Piłce Nożnej. PZPN zorganizował turniej „Podaj Macieju”, aby przykryć te mistrzostwa. Nikt nie będzie się interesował ME skoro obok grają MU i Chelsea. Polska reprezentacja jest dziadowska i pewnie nie wysłaby z grupy, co mogłoby stać się sygnałem do rozwiązania PZPN. A tak, pies z (...) nogą się tym nie przejmie i związek przetrwa. Niestety na EURO planowany był zamach. O EURO jednak nikt nie mówi, więc terroryści przyjechali na zawody, o których trąbi cały sportowy świat. Chcą wysadzić stadion. PZPN wie o tym, i dlatego podczas trwania meczu wyłączy prąd. Prawdopodobnie bomba zamachowców jest na prąd. Będziemy grać w blasku zniczy. PZPN od lat kradnie z cementarzy znicze w zaduszki. Właśnie na podobne okazje...*

Didier Droga

## Egzamin z RPiS (część II - 2 godziny), 2 lutego 2014

**Zadanie 1** (7 punktów). *Profesor Makary opracował supernowoczesną maszynę do automatycznego wykrywania fałszywych kurczaków. Teraz pracuje nad oprogramowaniem sterującym maszyną. Na początek postanowił przeanalizować szczegółowo kilka prostych sytuacji.*

*Prawdziwy kurczak waży 2kg, fałszywy z  $p$ -stwem  $\frac{1}{2}$  waży 1kg, wpp. 3kg. Maszyna losowo wybiera kurczaki do ważenia z danej grupy kurczaków (każdy z  $p$ -stwem  $\frac{1}{2}$  niezależnie od pozostałych), po czym waży je wszystkie naraz.*

*Dana jest grupa 10 kurczaków, o której wiadomo, że zawiera dokładnie jednego fałszywego kurczaka. Maszyna trzykrotnie wylosowała z tej grupy kurczaki do ważenia i je zważyła. Uzyskała wyniki odpowiednio 11kg, 12kg i 13kg. Jakie jest  $p$ -stwo tego, że fałszywy kurczak waży 3kg?*

**Zadanie 2** (10 punktów). *Profesor Makary kontynuuje badania algorytmów randomizowanych. Aktualnie zajmuje się klasycznym problemem sortowania permutacji. Algorytm prof. Makarego powtarza następujące operacje aż do skutku:*

- *wylosuj dwie pozycje  $i_1, i_2$ ;*
- *sprawdź jak zmienia się liczba inwersji, jeśli zamienić miejscami elementy na pozycjach  $i_1, i_2$  – oznaczmy tę zmianę  $\delta$ ;*
- *jeśli liczba inwersji nie rośnie (tj.  $\delta \leq 0$ ), zamień elementy na pozycjach  $i_1, i_2$ , wpp. zamień te elementy z  $p$ -stwem  $(\frac{1}{2})^\delta$ .*

*Średnio jak długo będzie działał ten algorytm dla permutacji 321? Interesuje nas łączna liczba iteracji.*

**Zadanie 3** (13 punktów). *Liczby  $1, \dots, n$  w losowej kolejności ustawiamy na cyklu. Niech  $X$  będzie liczbą lokalnych maksimów, t.j. liczb większych od obu sąsiadów.*

1. (3 pkt.) *Oblicz  $EX$ ;*
2. (5 pkt.) *Oblicz  $Var X$ ;*
3. (5 pkt.) *Pokaż oszacowanie postaci  $P(X < EX(1 - \delta)) \leq \Theta(\frac{1}{c^n})$ , gdzie  $c > 1$  zależy od  $0 < \delta < 1$ . Za oszacowanie tej postaci, które działa tylko dla  $\delta$  odpowiednio bliskich 1, można uzyskać do 3 pkt.*

**UWAGA:** Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.