

Egzamin z RPiS (część II - 120 minut), 1 lutego 2011

Cykl indyjski: Krowa robi placki, które się świetnie palą.

Na takim placku można smażyć, uwaga:... placki!!!

Placki jedzą ludzie, a krowy jedzą... ludzi. Czy jakoś tak... Koło się zamyka.

(...) Zastosuj cykl indyjski do rozwiązania problemu, który cię trapi.

Wilq Superbohater, tom 5

„Zebry z Bronxu”

Zadanie 1 (10 punktów). Rzucamy $n > 0$ razy kostką czworościenną. Niech X i Y będą odpowiednio minimum i maksimum z otrzymanych wyników. Dla jakich n i $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zmienne $X \bmod k$ i $Y \bmod k$ są niezależne?

Zadanie 2 (10 punktów). Kurs akcji wynosi dzisiaj Q . Zakładamy, że każdego dnia, niezależnie od pozostałych, kurs z prawdopodobieństwem p rośnie do wartości $q(1+\varepsilon)$ i z prawdopodobieństwem $(1-p)$ spada do wartości $q(1-\varepsilon)$, gdzie q jest wartością z poprzedniego dnia, a $0 \leq \varepsilon < 1$ pewną stałą.

1. Oblicz wartość oczekiwaną kursu po n dniach. (2 punkty)
2. Oblicz wariancję kursu po n dniach. (3 punkty)
3. Dla $p = \frac{1}{2}$ i $\varepsilon = \frac{1}{2}$ pokaż, że kurs po n dniach jest większy niż na początku z prawdopodobieństwem $O(e^{-cn})$ dla pewnej stałej $c > 0$. (5 punktów)

Wskazówka: W ostatnim punkcie może się przydać nierówność Chernoffa. Ponadto, żeby się specjalnie nie namęczyć, warto skorzystać z magicznej nierówności: $3^3 < 2^5$.

Zadanie 3 (10 punktów). Wykładowca trzyma zadania na egzamin w sejfie. Na sejfie są 3 pokrętła, każde z nich można ustawić w jednej z 3 pozycji. Żeby otworzyć sejf, musimy ustawić wszystkie 3 prawidłowo. Na początku ustawienie wszystkich pokręteł jest losowe. Przekręcamy losowo wybrane pokrętło w losowym kierunku (ale zawsze zmieniając jego pozycję), a następnie sprawdzamy, czy sejf został otwarty – jeśli nie, to powtarzamy.

1. Ile średnio ruchów będziemy musieli wykonać, aby otworzyć sejf? (5 punktów)
2. Jeśli udało nam się otworzyć sejf po dokładnie trzech ruchach, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zaczęliśmy ze wszystkimi trzema pokrętłami w złej pozycji? (5 punktów)

Uwaga: Pierwszy ruch wykonujemy nawet jeśli pokrętła były od razu ostawione prawidłowo.

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.

Nic tu nie ma!