

MAG — ćwiczenia 1

Dekompozycje drzewiaste

Zadanie 1. Niech G będzie grafem.

- Jeśli Ω jest kliką w G , to w każdej dekompozycji drzewiastej G istnieje worek zawierający całą Ω .
- Jeśli u, v są wierzchołkami, które można połączyć przy pomocy $k + 1$ wierzchołkowo rozłącznych ścieżek, to w każdej dekompozycji G szerokości co najwyżej k istnieje worek zawierający zarówno u jak i v .

Definicja 1. Graf G jest d -zdegenerowany jeśli każdy podgraf G zawiera wierzchołek stopnia $\leq d$.

Zadanie 2. Wykaż, że każdy graf o treewidthie $\leq k$ jest k -zdegenerowany.

Zadanie 3. Wykaż, że każdy graf k -zdegenerowany jest $(k + 1)$ -kolorowalny i ma $\leq kn$ krawędzi.

Zadanie 4. Zaproponuj algorytmy, które dla grafu G oraz dekompozycji G szerokości k , rozwiązują:

- problem HAMILTONIAN CYCLE w czasie $2^{\mathcal{O}(k \log k)} \cdot n$;
- problem MAXIMUM INDEPENDENT SET w czasie $2^k \cdot \text{poly}(k) \cdot n$;
- problem MINIMUM DOMINATING SET w czasie $3^k \cdot \text{poly}(k) \cdot n$;
- problem FEEDBACK VERTEX SET w czasie $2^{\mathcal{O}(k \log k)} \cdot n$.

Definicja 2. *Macierzą skojarzeń* nazwiemy macierz A_k , gdzie wiersze i kolumny A_k są indeksowane skojarzeniami wielkości k na zbiorze $2k$ -elementowym, i gdzie na przecięciu wiersza M i kolumny N wstawiamy 1 jeśli $M \cup N$ jest jednym cyklem, oraz 0 w.p.p.

Fakt 1. Rząd macierzy A_k nad ciałem dwuelementowym wynosi 2^{k-1} .

Zadanie 5. Przypuśćmy, że $\mathcal{F}$ jest zbiorem doskonałych skojarzeń na zbiorze wielkości $2k$, przy czym $|\mathcal{F}| > 2^{k-1}$. Wykaż, że istnieje takie skojarzenie $M \in \mathcal{F}$, że dla każdego skojarzenia N takiego, że $M \cup N$ jest jednym cyklem, istnieje również inne skojarzenie $M' \in \mathcal{F}$, $M' \neq M$, że $M' \cup N$ jest cyklem.

Zadanie 6. Zaproponuj algorytm dla problemu HAMILTONIAN CYCLE jak w poprzednim zadaniu, ale działający w czasie $2^{\mathcal{O}(k)} \cdot n$.

Definicja 3. Graf H jest *minorem* grafu G jeśli w G można znaleźć takie parami rozłączne spójne podgrafy $(I_u)_{u \in V(H)}$, że I_u i I_v są połączone krawędzią dla wszystkich krawędzi uv grafu H . Takie $(I_u)_{u \in V(H)}$ to *model minora* H w G .

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli H jest minorem G to $\text{tw}(H) \leq \text{tw}(G)$.

Fakt 2 (Twierdzenie o kracie). Istnieje funkcja taka $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f \in \tilde{\mathcal{O}}(k^{19})$, że jeśli $\text{tw}(G) > f(k)$ to G zawiera kratę $k \times k$ jako minor. Ponadto, jeśli G nie zawiera jakiegoś ustalonego H jako minoru, to $f(k) \leq c_H \cdot k$.

Zadanie 8. Wykaż, że szerokość drzewiasta planarnego grafu o n wierzchołkach wynosi $\mathcal{O}(\sqrt{n})$. Wsugaj algorytmiczne wnioski dla problemów podanych w zadaniu 4.

Zadanie 9. Wykaż, że szerokość drzewiasta planarnego grafu o promieniu r wynosi $\mathcal{O}(r)$.

Zadanie 10. Używając twierdzenia o kracie, zaproponuj algorytmy FPT dla problemu FEEDBACK VERTEX SET o złożoności: $2^{\tilde{\mathcal{O}}(k^{19})} \cdot n$ na ogólnych grafach i $2^{\tilde{\mathcal{O}}(\sqrt{k})} \cdot n$ na grafach planarnych.

Definicja 4. Gra *Cops and Robber Game* rozgrywana jest na grafie G i bierze w niej udział k policjantów i jeden złodziej. Wpierw policjanci rozstawiają się w wierzchołkach grafu. Potem złodziej ustawia się w jednym, niezajętym wierzchołku grafu. Następnie policjanci i złodziej grają w turach. W każdej turze wpierw podzbiór policjantów unosi się w helikopterach deklarując, gdzie wyląduje na koniec tury, następnie złodziej przemieszcza się dowolnie w grafie, ale nie przechodząc przez wierzchołki na których nadal stoją policjanci zostający na ziemi, a następnie policjanci w helikopterach lądują na zadeklarowanych wcześniej wierzchołkach. Policjanci wygrywają jeśli znajdą się w tym samym wierzchołku co złodziej w pewnym momencie, złodziej wygrywa jeśli może w nieskończoność unikać złapania.

Zadanie 11. Wykaż, że jeśli $\text{tw}(G) \leq k$ to $k + 1$ policjantów ma strategię wygrywającą w grze *Cops and Robber Game* na G .

Fakt 3. Zachodzi w istocie równość: minimalna liczba policjantów potrzebna do złapania złodzieja jest zawsze o jeden większe niż szerokość drzewiasta grafu.