

Algebra liniowa, WNE, 2017/2018

zagadnienia do 3. kolokwium

21 grudnia 2017

Spis treści

1	Znajdywanie wartości własnych oraz baz przestrzeni własnych	3
1.1	Metoda	3
1.2	Przykład	3
1.3	Przykładowe zadania	4
2	Znajdowanie bazy własnej przekształcenia i jego macierzy w tej bazie	5
2.1	Metoda	5
2.2	Przykład	5
2.3	Przykładowe zadania	5
3	Diagonalizowanie macierzy	6
3.1	Metoda	6
3.2	Przykład	6
3.3	Przykładowe zadania	6
4	Podnoszenie macierzy do potęgi	7
4.1	Metoda	7
4.2	Przykład	7
4.3	Przykładowe zadania	7
5	Obliczenie długości wektora	8
5.1	Metoda	8
5.2	Przykład	8
5.3	Przykładowe zadania	8
6	Obliczanie kąta między wektorami	9
6.1	Metoda	9
6.2	Przykład	9
6.3	Przykładowe zadania	9
7	Znajdywanie rzutu wektora na podprzestrzeń liniową	10
7.1	Metoda	10
7.2	Przykład	10
7.3	Przykładowe zadania	10
8	Znajdywanie bazy przestrzeni prostopadłej, jeśli mamy dany układ rozpinający przestrzeń	11
8.1	Przykład	11
8.2	Przykładowe zadania	11
9	Znajdywanie bazy przestrzeni prostopadłej, jeśli mamy dany układ równań opisujący przestrzeń	12
9.1	Metoda	12
9.2	Przykład	12
9.3	Przykładowe zadania	12

10	Znajdywanie współrzędnych w bazie ortogonalnej	13
10.1	Metoda	13
10.2	Przykład	13
10.3	Przykładowe zadania	13
11	Znajdywanie współrzędnych w bazie ortonormalnej	14
11.1	Metoda	14
11.2	Przykład	14
11.3	Przykładowe zadania	14
12	Znajdywanie bazy ortogonalnej	15
12.1	Metoda	15
12.2	Przykład	15
12.3	Przykładowe zadania	15
13	Znajdywanie bazy ortonormalnej	16
13.1	Metoda	16
13.2	Przykład	16
13.3	Przykładowe zadania	16
14	Znajdywanie symetrii wektora względem podprzestrzeni liniowej	17
14.1	Metoda	17
14.2	Przykład	17
14.3	Przykładowe zadania	17
15	Znajdywanie wzoru na przekształcenie liniowe będące rzutem lub symetrią względem podprzestrzeni liniowej	18
15.1	Metoda	18
15.2	Przykład	18
15.3	Przykładowe zadania	19
16	Znajdywanie przestrzeni stycznej i wektora przesunięcia z punktów, przez które przechodzi podprzestrzeń afiniczna	20
16.1	Metoda	20
16.2	Przykład	20
16.3	Przykładowe zadania	20
17	Znajdywanie parametryzacji przestrzeni afinicznej, mając daną przestrzeń styczną i wektor przesunięcia	21
17.1	Metoda	21
17.2	Przykład	21
17.3	Przykładowe zadania	21
18	Znajdywanie układu równań opisujących przestrzeń afiniczną	22
18.1	Metoda	22
18.2	Przykład	22
18.3	Przykładowe zadania	22
19	Znajdywanie parametryzacji przestrzeni afinicznej, mając dany układ równań	23
19.1	Metoda	23
19.2	Przykład	23
19.3	Przykładowe zadania	23
20	Znajdywanie przestrzeni afinicznej prostopadłej do danej przestrzeni i przechodzącej przez dany punkt	24
20.1	Metoda	24
20.2	Przykład	24
20.3	Przykładowe zadania	24

21	Znajdywanie rzutu punktu lub obrazu w symetrii względem podprzestrzeni afinicznej	25
21.1	Metoda	25
21.2	Przykład	25
21.3	Przykładowe zadania	25

1 Znajdywanie wartości własnych oraz baz przestrzeni własnych

1.1 Metoda

Jeśli ktoś próbował sobie kiedykolwiek wyobrazić przekształcenie liniowe np. płaszczyzny, to pewnie wyobrażał sobie, że ono ściska bądź rozciąga tę płaszczyznę wzdłuż różnych kierunków. Rzeczywiście miło by było wiedzieć, czy jak mamy jakieś dane przekształcenie liniowe $\varphi: V \rightarrow V$ (takie przekształcenie, którego dziedzina i przeciwdziedzina to ta sama przestrzeń, nazywamy endomorfizmem), to polega ono właśnie na tym. Inaczej mówiąc, chcielibyśmy wiedzieć, czy istnieją taki niezerowy wektor v oraz liczba λ , że przekształcenie φ po prostu mnoży wektor v przez λ (czyli rozciąga lub ściska przestrzeń V w kierunku wyznaczonym przez ten wektor), czyli:

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Jeśli v oraz λ mają takie własności, to wektor v nazywamy wektorem własnym tego przekształcenia, zaś λ to jego wartość własna.

Zauważ, że jeśli λ jest wartością własną przekształcenia φ oraz v jest wektorem własnym, to $\varphi(v) - \lambda v = 0$. A zatem, jeśli M jest macierzą φ (powiedzmy w bazie standardowej), to

$$0 = Mv - \lambda v = Mv - \lambda Iv = (M - \lambda I)v$$

, gdzie I to macierz jednostkowa.

Ponieważ mnożenie macierzy przez wektor, to kombinowanie jej kolumn ze sobą, oraz v jest niezerowy, to oznacza, że kolumny macierzy $M - \lambda I$ da się skombinować nietrywialnie w wektor zerowy! Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(M - \lambda I) = 0$.

Dlatego $\det(M - \lambda I)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym, a jego pierwiastki to wartości własne przekształcenia.

To pora znaleźć wektory własne odpowiadające poszczególnym wartościom. Zauważ, że ponieważ φ jest przekształceniem liniowym, to jeśli v, v' są wektorami własnymi dla wartości własnej λ , to dla dowolnej liczby a także av oraz $v + v'$ są wektorami własnymi dla λ . A zatem zbiór wektorów własnych dla wartości λ jest podprzestrzenią liniową. Zauważ, że wektor v spełnia równanie

$$(M - \lambda I)v = 0$$

a zatem przestrzeń wektorów własnych dla wartości własnej λ (zwana też przestrzenią własną dla λ , ozn. $V_{(\lambda)}$) jest opisana układem równań jednorodnych:

$$(M - \lambda I)v = 0$$

i możemy z łatwością znaleźć jej bazę.

1.2 Przykład

Np. niech $\varphi(x, y, z) = (2x, x + y, -x + z)$. Wtedy:

$$M(\varphi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem:

$$M(\varphi)_{st}^{st} - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Czyli musimy rozwiązać równanie:

$$\det(M(\varphi)_{st}^{st} - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2 = 0$$

A zatem wartości własne to: 2 oraz 1.

W naszym przykładzie, znajdziemy bazę przestrzeni $V_{(1)}$, czyli niech $\lambda = 1$. Zatem:

$$M(\varphi)_{st}^{st} - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem układ równań, to:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$$

Przestrzeń rozwiązań, to zatem $V_{(1)} = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$, a jej baza to $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Rzeczywiście

$$\varphi((0, 1, 0)) = 1 \cdot (0, 1, 0)$$

oraz

$$\varphi((0, 0, 1)) = 1 \cdot (0, 0, 1).$$

Znajdziemy bazę przestrzeni $V_{(2)}$, czyli niech $\lambda = 2$. Zatem:

$$M(\varphi)_{st}^{st} - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A zatem układ równań, to:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x - y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

W postaci schodkowej zredukowanej:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Przestrzeń rozwiązań, to zatem $V_{(2)} = \{(-z, -z, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$, a jej baza to $(-1, -1, 1)$. Rzeczywiście

$$\varphi((-1, -1, 1)) = (-2, -2, 2) = 2 \cdot (-1, -1, 1).$$

1.3 Przykładowe zadania

Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych im odpowiadających dla następujących przekształceń liniowych:

- $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x, y, z)) = (x + 2y, 3x + 4y, 5z)$,
- $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi((a, b)) = (3a + b, 5b)$,
- $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\phi((x, y, z, t)) = (-y, x, 2z - t, -z + 2t)$.

2 Znajdowanie bazy własnej przekształcenia i jego macierzy w tej bazie

2.1 Metoda

Jeśli zdarzy się tak, że suma wymiarów przestrzeni własnych jest równa wymiarowi całej przestrzeni (tak jest w naszym przykładzie $1 + 2 = 3$), to bazę złożoną z baz przestrzeni własnych nazywamy bazą własną przekształcenia.

To że przekształcenie ma bazę własną, oznacza, że jest zadane poprzez ścisłanie i rozciąganie przestrzeni w tych własnych kierunkach. Zauważ, że macierz tego przekształcenia w bazie własnej jest macierzą diagonalną (ma niezerowe elementy tylko na przekątnej) z wartościami własnymi opowiadającymi poszczególnym wektorom z bazy na przekątnej.

Nie musi się tak zdarzyć. Może się okazać, że przekształcenie w ogóle nie ma wektorów własnych (np. obrót), lub że przestrzenie własne są za małe (np. obrót przestrzeni trójwymiarowej o 10 stopni względem jednej z osi ma tylko jednowymiarową przestrzeń własną).

2.2 Przykład

Weźmy przykład z poprzedniego punktu. Zbierając razem bazy przestrzeni własnych mamy bazę w naszym wypadku: $\mathcal{A} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, -1, 1)\}$, co jest bazą całej przestrzeni.

Wtedy:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Natomiast dla $\varphi(x, y) = (x - y, x + 3y)$, wielomian charakterystyczny to $(1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$, więc jedyna wartość własna to $\lambda = 2$. $V_{(2)}$ jest rozpięta przez $\{(1, -1)\}$, więc jest tylko jeden kierunek własny, nie ma więc bazy całej przestrzeni złożonej z wektorów własnych.

2.3 Przykładowe zadania

Sprawdzić, czy istnieją bazy całej przestrzeni złożone z wektorów własnych, a jeśli tak, podać macierz przekształcenia w takiej bazie, dla przekształceń:

- $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x, y, z)) = (x + 2y, 3x + 4y, 5z)$,
- $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi((a, b)) = (3a + b, 5b)$,
- $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\phi((x, y, z, t)) = (-y, x, 2z - t, -z + 2t)$.

3 Diagonalizowanie macierzy

3.1 Metoda

Macierz M jest diagonalizowalna, jeśli istnieje taka macierz C , że:

$$M = C \cdot D \cdot C^{-1},$$

gdzie D jest pewną macierzą diagonalną.

Jak sprawdzić? I jak zdiagonalizować macierz, czyli znaleźć macierz D , jeśli taka istnieje. A no bierzemy przekształcenie φ takie że M to jego macierz w bazie standardowej. Macierz M jest diagonalizowalna, wtedy i tylko wtedy, gdy φ ma bazę własną $\mathcal{A}$. Wtedy:

$$M = M(id)_{\mathcal{A}}^{st} \cdot D \cdot (M(id)_{\mathcal{A}}^{st})^{-1}$$

i $D = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, bowiem $(M(id)_{\mathcal{A}}^{st})^{-1} = M(id)_{st}^{\mathcal{A}}$.

3.2 Przykład

Z przykładu rozważanego w poprzednich podpunktach, wiemy, że macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna, bo φ odpowiadające tej macierzy ma bazę własną. Wiemy ponadto, że w tym wypadku:

$$D = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$C = M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Przykładowe zadania

Sprawdzić, czy poniższe macierze M są diagonalizowalne, a jeśli tak, podać macierze C i D , takie, że D jest diagonalna, oraz $M = C \cdot D \cdot C^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4 Podnoszenie macierzy do potęgi

4.1 Metoda

Diagonalizacja macierzy ma na przykład takie ciekawe zastosowanie, że można bardzo łatwo policzyć potęgę macierzy, o ile jest ona diagonalizowalna. Zauważmy bowiem, że jeśli $\mathcal{A}$ jest bazą, to:

$$(M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})^n = M \left(\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_n \right)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}},$$

A zatem:

$$\begin{aligned} (M(\varphi)_{st}^{st})^n &= M \left(\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_n \right)_{st}^{st} = \\ &= M(id)_{\mathcal{A}}^{st} \cdot M \left(\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_n \right)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = M(id)_{\mathcal{A}}^{st} \cdot (M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})^n \cdot M(id)_{st}^{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

z tym, że jeśli $\mathcal{A}$ jest bazą własną, to macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest macierzą diagonalną i podniesienie jej do potęgi jest po prostu podniesieniem do potęgi wyrazów na przekątnej.

4.2 Przykład

Posłużmy się dotychczasowym przykładem. Obliczmy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5$$

Mamy:

$$C = M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$C^{-1} = M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A zatem:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 = C \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^5 \cdot C^{-1} = C \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}^5 \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 31 & 1 & 0 \\ -31 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.3 Przykładowe zadania

Obliczyć

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{2017}.$$

5 Obliczenie długości wektora

5.1 Metoda

Żeby badać kąty pomiędzy wektorami, wygodne będzie pojęcie iloczynu skalarnego. Iloczyn skalarny dwóch wektorów α, β , to $\langle \alpha, \beta \rangle$. Standardowy iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ to suma iloczynów liczb na kolejnych pozycjach, a więc np.: $\langle (1, 2, -1), (2, 0, 1) \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 2 + 0 - 1 = 1$.

Łatwo zobaczyć z Tw. Pitagorasa, że $\langle \alpha, \alpha \rangle$ to kwadrat długości wektora, np.: $\langle (3, 4), (3, 4) \rangle = 9 + 16 = 25 = |\alpha|^2$. Długość wektora α , zwana także normą wektora α , będziemy właśnie oznaczali jako $|\alpha|$. Mamy więc:

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

5.2 Przykład

Np.: $|(1, 2, 0, -2)| = \sqrt{1 + 4 + 0 + 4} = \sqrt{9} = 3$.

5.3 Przykładowe zadania

Oblicz długości (normy) następujących wektorów: $(3, 4, 0)$, $(1, 1, 1, 0, -1)$, $(2, -2, 3, -2)$.

6 Obliczanie kąta między wektorami

6.1 Metoda

Założmy teraz, że mamy trójkąt złożony z trzech wektorów p, q i r . Czyli $r = p - q$. Niech θ będzie kątem pomiędzy wektorami p i q . Znanе twierdzenie cosinusów mówi, że:

$$|r|^2 = |p|^2 + |q|^2 - 2|p||q|\cos\theta.$$

A zatem:

$$\langle p - q, p - q \rangle = \langle p, p \rangle + \langle q, q \rangle - 2|p||q|\cos\theta,$$

a zatem:

$$\langle p, p \rangle + \langle q, q \rangle - 2\langle p, q \rangle = \langle p, p \rangle + \langle q, q \rangle - 2|p||q|\cos\theta,$$

W takim razie, okazuje się, że cosinus kąta pomiędzy wektorami wyraża się następująco:

$$\cos\theta = \frac{\langle p, q \rangle}{|p||q|}.$$

6.2 Przykład

Obliczmy kąt pomiędzy $(1, \sqrt{3}, 0)$ oraz $(3, 0, 0)$.

Mamy:

$$\cos\theta = \frac{3}{2 \cdot 3} = 1/2,$$

więc ten kąt to 60° .

6.3 Przykładowe zadania

1. Oblicz kąt pomiędzy $(1, \sqrt{3}, 0)$ oraz $(0, 4, 0)$.
2. Niech $v = (1, 1, 1, 1)$. Podaj przykład wektora w takiego, że kąt pomiędzy v i w wynosi 45° .

7 Znajdywanie rzutu wektora na podprzestrzeń liniową

7.1 Metoda

Jeszcze jedno zastosowanie iloczynu skalarnego to rzut prostopadły wektora na kierunek wyznaczony przez inny wektor. Niech r będzie rzutem prostopadłym wektora p na kierunek wyznaczony przez q . Rzut ten będzie miał kierunek taki sam, jak q oraz długość $|p| \cos \theta$, gdzie θ to kąt pomiędzy p i q . A zatem:

$$r = |p| \cos \theta \cdot \frac{q}{|q|} = q \cdot \frac{\langle p, q \rangle}{\langle q, q \rangle},$$

bowiem: $\frac{q}{|q|}$ to wektor o długości 1 w kierunku q .

Umiemy rzucać wektory na prostą wyznaczoną przez wektor. Aby obliczyć rzut na więcej niż jednowymiarową przestrzeń V , należy policzyć jej bazę ortogonalną, policzyć rzuty na kierunki zdefiniowane przez te wektory z bazy i dodać.

Drugie spostrzeżenie jest takie, że jeśli r to rzut wektora v na V , a r' to rzut na $V^\perp$, to $r = v - r'$. Co przyjemnie można zastosować w przypadku rzutu na płaszczyznę w sytuacji przestrzeni trójwymiarowej. Bowiem jeśli V to płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$, to przestrzeń prostopadła to prosta wyznaczona przez pewien wektor i oznaczmy go n . Zatem rzut wektora v na płaszczyznę V to:

$$r = v - \frac{\langle v, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n.$$

7.2 Przykład

Rzut wektora $v = (1, 0, 1)$ na prostą $\text{lin}((1, 2, 3))$ to

$$\frac{\langle (1, 0, 1), (1, 2, 3) \rangle}{\langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle} (1, 2, 3) = \frac{4}{14} (1, 2, 3) = \frac{2}{7} (1, 2, 3).$$

Rzut wektora v na płaszczyznę opisaną równaniem $x + 2y + 3z = 0$, to

$$\frac{(1, 0, 1) - \langle (1, 0, 1), (1, 2, 3) \rangle}{\langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle} (1, 2, 3) = (1, 0, 1) - \frac{4}{14} (1, 2, 3) = (1, 0, 1) - \frac{2}{7} (1, 2, 3) = \frac{1}{7} (5, -4, 1).$$

7.3 Przykładowe zadania

Policz rzut wektora $(1, 0, 1, 0)$ na:

- prostą $\text{lin}((1, 1, 1, 1))$,
- hiperpłaszczyznę opisaną równaniem $x + y + z + t = 0$,
- płaszczyznę $\text{lin}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0))$ (uwaga: w tym przypadku trzeba znaleźć bazę ortogonalną).

8 Znajdywanie bazy przestrzeni prostopadłej, jeśli mamy dany układ rozpinający przestrzeń

Metoda

A zatem dwa wektory v, w są prostopadłe o ile cosinus kąta pomiędzy nimi równy jest 0. Zatem $v \perp w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle v, w \rangle = 0$.

Zauważ, że gdybyśmy szukali wszystkich wektorów w prostopadłych do v , to są to jest równanie na nie. I to w dodatku równanie liniowe jednorodne. Jeśli szukamy zbioru wektorów prostopadłych do pewnej listy wektorów, dostaniemy układ równań jednorodnych. Zatem mając daną podprzestrzeń V , zbiór $V^\perp$ wszystkich wektorów prostopadłych do wszystkich wektorów z przestrzeni V jest przestrzenią liniową! Konkretnie przestrzenią rozwiązań pewnego układu równań jednorodnych.

Niech $V = \text{lin}(v_1, v_2, \dots)$, to aby wektor $(x, y, \dots)$ był prostopadły do tych wektorów (a zatem i do wszystkich z przestrzeni V), musi spełniać $\langle v_1, (x, y, \dots) \rangle = 0$, $\langle v_2, (x, y, \dots) \rangle = 0$, czyli układ równań, którego macierz to zapisane w wierszach wektory $v_1, v_2, \dots$. Trzeba go rozwiązać i znaleźć odpowiednią bazę.

Zauważ następujące powiązanie: współczynniki w układzie równań opisującym daną przestrzeń rozpinającą przestrzeń prostopadłą! Co daje nową perspektywę naszej metodzie znajdowania układu równań opisującego przestrzeń zadaną poprzez wektory, które ją rozpinają.

8.1 Przykład

Na przykład niech $V = \text{lin}((1, 1, 0, -1), (-1, 0, 2, 0))$, to aby wektor (x, y, z, t) był prostopadły do tych wektorów (a zatem i do wszystkich z przestrzeni V), musi spełniać

$$\langle (1, 1, 0, -1), (x, y, z, t) \rangle = 0$$

oraz

$$\langle (-1, 0, 2, 0), (x, y, z, t) \rangle = 0,$$

czyli układ równań:

$$\begin{cases} x + y - t = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases},$$

czyli:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

A zatem rozwiązanie ogólne to $(2z, -2z + t, z, t)$, czyli baza przestrzeni $V^\perp$, to $(2, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$.

8.2 Przykładowe zadania

Znajdź bazę $V^\perp$, jeśli:

- $V = \text{lin}((1, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$,
- $V = \text{lin}((1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (3, 3, -1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

9 Znajdywanie bazy przestrzeni prostopadłej, jeśli mamy dany układ równań opisujący przestrzeń

9.1 Metoda

A zatem jest jeszcze prościej znaleźć układ wektorów rozpinający prostopadłej, jeśli mamy dany układ równań przestrzeni, bowiem ten układ wektorów to po prostu współczynniki z kolejnych równań.

9.2 Przykład

Niech $V \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie opisana następującym układem równań:

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ 2y + z + 3t = 0 \end{cases},$$

to $V^\perp = \text{lin}((1, 2, 0, -1), (0, 2, 1, 3))$.

9.3 Przykładowe zadania

1. Znajdź bazę $V^\perp$, jeśli $V \subseteq \mathbb{R}^3$ opisane jest równaniem $x + 2y - z = 0$.
2. Znajdź bazę $V \subseteq \mathbb{R}^5$, jeśli $V^\perp$ opisane jest układem równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t + w = 0 \\ x + y - w = 0 \end{cases}.$$

3. Znajdź układ równań opisujących V , jeśli $V^\perp = \text{lin}((1, 1, 0), (2, 1, -1))$.

10 Znajdywanie współrzędnych w bazie ortogonalnej

10.1 Metoda

Bazę przestrzeni nazywamy ortogonalną, jeśli wektory z niej są parami prostopadłe.

Nauczmy się znajdować takie bazy za chwilę – ale zauważ jedną wielką zaletę – liczenie współrzędnych w takiej bazie jest bardzo proste – bo to tak naprawdę liczenie rzutów. Mając wektor v , jego n -ta współrzędna w bazie ortogonalnej, której n -ty wektor to b_n , to po prostu $\frac{\langle v, b_n \rangle}{\langle b_n, b_n \rangle}$.

10.2 Przykład

Np.: $(1, 0, 1), (-1, 1, 1), (-1, -2, 1)$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$ – rzeczywiście łatwo sprawdzić, że każda para wektorów jest prostopadła, np.: $\langle (-1, 1, 1), (-1, -2, 1) \rangle = 1 - 2 + 1 = 0$.

A zatem współrzędne wektora $(1, 0, -2)$ w bazie podanej wyżej jako przykład, to: $\frac{\langle (1, 0, -2), (1, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle} = \frac{-1}{2}$, $\frac{-3}{3} = -1$ oraz $\frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$.

10.3 Przykładowe zadania

Znajdź współrzędne wektora $(2017, 2, 1, 2)$ w bazie ortogonalnej $(-1, 0, 0, 0), (0, 2, 2, 1), (0, -1, 1, 0), (0, 1, 1, -4)$.

11 Znajdywanie współrzędnych w bazie ortonormalnej

11.1 Metoda

Baza ortonormalna, to baza, w której dodatkowo każdy z wektorów ma długość 1. Zauważ, że liczenie współrzędnych jeszcze się uprasza, bo $\langle b_n, b_n \rangle = 1$, a zatem n -ta współrzędna wektora v to po prostu $\langle v, b_n \rangle$, gdzie b_n to n -ty wektor z bazy.

11.2 Przykład

A zatem $\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}}, \frac{(-1,2,1)}{\sqrt{6}}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zatem wektor $(1, 0, -2)$ ma w tej ostatniej bazie współrzędne: $\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{3}}$ oraz $\frac{-3}{\sqrt{6}}$.

11.3 Przykładowe zadania

Znajdź współrzędne wektora $(2017, 2, 1, 2)$ w bazie ortonormalnej

$$(-1, 0, 0, 0), (0, 2/3, 2/3, 1/3), (0, -1, 1, 0)/\sqrt{2}, (0, 1/3, 1/3, -4/3)/\sqrt{2}.$$

12 Znajdywanie bazy ortogonalnej

12.1 Metoda

Powiedzmy, że mamy daną przestrzeń rozpiętą przez pewne wektory, np: $\text{lin}(v_1, v_2, v_3)$. Jak znaleźć bazę ortogonalną tej przestrzeni? Odpowiedzią jest procedura zwana ortogonalizacją Grama-Schmidta. Idea jest taka, że jako pierwszy wektor naszej bazy ortogonalnej bierzemy po prostu pierwszy wektor dotychczasowej bazy:

$$w_1 = v_1.$$

Drugi wektor musi być już prostopadły do pierwszego, więc bierzemy drugi wektor i odejmujemy od niego jego rzut na pierwszy wektor z ortogonalnej bazy, więc:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

i w ten sposób zostaje tylko jego „prostopadła część”. W przypadku trzeciego wektora musimy odjąć rzuty na oba skonstruowane już wektory:

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle w_1, v_3 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2, v_3 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2.$$

Gdyby nasza przestrzeń była więcej-wymiarowa, postępowalibyśmy tak jeszcze dalej oczywiście.

12.2 Przykład

Niech n.p: $V = \text{lin}((1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 1), (0, 0, 0, 1))$. Znajdźmy bazę ortogonalną.

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 0, 1, 0). \\ w_2 &= (0, 1, -1, 1) - \frac{\langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle} (1, 0, 1, 0) = \\ &= (0, 1, -1, 1) - \frac{-1}{2} (1, 0, 1, 0) = \frac{1}{2} (1, 2, -1, 2). \\ w_3 &= (0, 0, 0, 1) - \frac{\langle (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle} (1, 0, 1, 0) + \\ &\quad - \frac{\langle (1, 2, -1, 2), (0, 0, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 2, -1, 2), (1, 2, -1, 2) \rangle} (1, 2, -1, 2) = \\ &= (0, 0, 0, 1) - \frac{0}{2} (1, 0, 1, 0) - \frac{2}{10} (1, 2, -1, 2) = \frac{1}{5} (-1, -2, 1, 3). \end{aligned}$$

A zatem szukana baza ortogonalna to $(1, 0, 1, 0), (1, 2, -1, 2), (-1, -2, 1, 3)$ (ułamki mogą spokojnie pominąć, bo przemnożenie wektora przez liczbę nie wpływa na jego kąt).

12.3 Przykładowe zadania

Niech $V = \text{lin}((1, 1, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1, 1))$. Znajdź bazę ortogonalną V oraz bazę ortogonalną $V^\perp$.

13 Znajdywanie bazy ortonormalnej

13.1 Metoda

Żeby znaleźć bazę ortonormalną, musimy najpierw mieć bazę ortogonalną. Żeby z bazy ortogonalnej uzyskać bazę ortonormalną, oczywiście trzeba każdy wektor z bazy podzielić przez jego długość.

13.2 Przykład

Znaleźliśmy poprzednio bazę ortogonalną $(1, 0, 1, 0), (1, 2, -1, 2), (-1, -2, 1, 3)$. A zatem

$$(1, 0, 1, 0)/\sqrt{2}, (1, 2, -1, 2)/\sqrt{10}, (-1, -2, 1, 3)/\sqrt{15}$$

jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

13.3 Przykładowe zadania

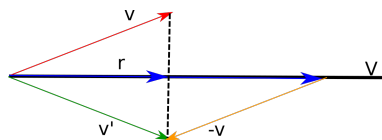
Niech $V = \text{lin}((1, 1, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1, 1))$. Znajdź bazę ortonormalną V oraz bazę ortonormalną $V^\perp$.

14 Znajdywanie symetrii wektora względem podprzestrzeni liniowej

14.1 Metoda

Umiejąc policzyć rzut r wektora v na przestrzeń V , łatwo (patrz poniższy rysunek), wyliczyć, że obraz v' wektora v w symetrii prostopadłej względem V , to:

$$v' = 2r - v$$



14.2 Przykład

Policzyliśmy wcześniej, że wektora $v = (1, 0, 1)$ na płaszczyznę opisaną równaniem $x + 2y + 3z = 0$, to $\frac{1}{7}(5, -4, 1)$.

Zatem obraz symetryczny v względem tej płaszczyzny to:

$$\frac{2}{7}(5, -4, 1) - (1, 0, 1) = \frac{1}{7}(3, -8, -5).$$

14.3 Przykładowe zadania

Policz obraz wektora $(1, 0, 1, 0)$ w symetrii względem:

- prostą $\text{lin}((1, 1, 1, 1))$,
- hiperpłaszczyznę opisaną równaniem $x + y + z + t = 0$,
- płaszczyznę $\text{lin}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0))$ (uwaga: w tym przypadku trzeba znaleźć bazę ortogonalną).

15 Znajdywanie wzoru na przekształcenie liniowe będące rzutem lub symetrią względem podprzestrzeni liniowej

15.1 Metoda

Zauważ, że rzut na podprzestrzeń liniową V oraz symetria względem takiej podprzestrzeni są przekształceniami liniowymi. Co więcej wiadomo jakie mają wektory własne:

- ponieważ rzut nie rusza wektorów na V , to są one wektorami własnymi z wartością własną 1. Natomiast wektory z $V^\perp$ mnoży przez zero, więc są one wektorami z wartością własną zero.
- ponieważ rzut nie rusza wektorów na V , to są one wektorami własnymi z wartością własną 1. Natomiast wektory z $V^\perp$ mają zmieniany zwrot, czyli są mnożone przez -1 , więc są one wektorami z wartością własną -1 .

A zatem baza złożona z wektorów z bazy V i wektorów z bazy $V^\perp$ jest bazą własną obu tych przekształceń. Co pozwala łatwo wyliczyć ich wzory.

15.2 Przykład

Np. niech $V = \text{lin}((1, 0, 1), (0, 1, -1))$. Zatem baza $V^\perp$ to $\{(-1, 1, 1)\}$. A zatem jeśli ϕ jest rzutem na V , a ψ jest symetrią względem V , to $(1, 0, 1), (0, 1, -1)$ są wektorami własnymi o wartości własnej 1 obu przekształceń. Wektor $(-1, 1, 1)$ też jest wektorem własnym obu przekształceń – z wartością 0 w przypadku ϕ , a -1 w przypadku ψ . Zatem baza $\mathcal{A} = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1), (-1, 1, 1)\}$ jest bazą własną obu przekształceń, i:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zatem możemy wyliczyć ich wzory. Mamy:

$$M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a zatem:

$$M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = (M(id)_{st}^{\mathcal{A}})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

czyli:

$$M(\phi)_{st}^{st} = M(id)_{\mathcal{A}}^{st} M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$M(\psi)_{st}^{st} = M(id)_{\mathcal{A}}^{st} M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a zatem:

$$\phi((x, y, z)) = \frac{1}{3}(2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z)$$

i

$$\psi((x, y, z)) = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z, 2x + y - 2z, 2x - 2y + z).$$

15.3 Przykładowe zadania

Znajdź wzór na przekształcenia liniowe φ i ψ będące odpowiednio rzutem i symetrią względem:

- prostą $\text{lin}((1, 1, 1, 1))$,
- hiperpłaszczyznę opisaną równaniem $x + y + z + t = 0$,
- płaszczyznę $\text{lin}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0))$ (uwaga: w tym przypadku trzeba znaleźć bazę ortogonalną).

16 Znajdywanie przestrzeni stycznej i wektora przesunięcia z punktów, przez które przechodzi podprzestrzeń afiniczna

16.1 Metoda

Do tej pory zajmowaliśmy się przestrzeniami liniowymi, co oznacza, że wszystkie nasze proste, płaszczyzny i inne podprzestrzenie liniowe przechodziły przez środek układu współrzędnych, czyli zawierały wektor zerowy. Ale oczywiście ma sens porozmawiać także o takich przestrzeniach tylko, że przesuniętych o pewien wektor względem „zera”. Takie podprzestrzenie (już nie są podprzestrzeniami liniowymi z oczywistych względów) nazywać będziemy podprzestrzeniami afinicznymi tej przestrzeni liniowej, w której pracujemy lub warstwami podprzestrzeni liniowej. Hiperpłaszczyznami zwykło się nazywać warstwy o wymiarze o jeden mniejszym niż cała przestrzeń.

Czyli jeśli V to podprzestrzeń liniowa oraz v to wektor, to $M = v + V$ (czyli przestrzeń V przesunięta o wektor v), to podprzestrzeń afiniczna. Przestrzeń V będziemy nazywać (co może nie być bardzo intuicyjne) przestrzenią styczną do M i oznaczać $T(M)$ (lub $\vec{M}$).

Mając wektor przesunięcia i wektory rozpinające przestrzeń styczną, łatwo otrzymać punkty, przez które musi przechodzić warstwa. Np. jeśli $H = p + \text{lin}(v, w)$, to jest zadana jako warstwa przechodząca przez punkty: $p, p + v, p + w$.

W drugą stronę, jeśli mamy punkty: p, q, r , to wybieramy jeden jako przesunięcie i mamy, że H to $p + \text{lin}(q - p, r - p)$.

16.2 Przykład

Np. jeśli $H = (1, 0, 0, -1) + \text{lin}((1, -1, 0, 1), (2, -1, 1, 0))$, to jest zadana jako warstwa przechodząca przez punkty: $(1, 0, 0, -1), (1, 0, 0, -1) + (1, -1, 0, 1) = (2, -1, 0, 0), (1, 0, 0, -1) + (2, -1, 1, 0) = (3, -1, 1, -1)$.

W drugą stronę, jeśli mamy punkty: $(1, 0, 0, -1), (2, -1, 0, 0), (3, -1, 1, -1)$, to wybieramy jeden jako przesunięcie i mamy, że H to $(1, 0, 0, -1) + \text{lin}((2, -1, 0, 0) - (1, 0, 0, -1), (3, -1, 1, -1) - (1, 0, 0, -1)) = (1, 0, 0, -1) + \text{lin}((1, -1, 0, 1), (2, -1, 1, 0))$.

16.3 Przykładowe zadania

1. Podaj trzy punkty, przez które przechodzi płaszczyzna $(1, 0, 1) + \text{lin}((1, 2, 2), (-3, 2, 1))$.
2. Podaj przestrzeń styczną oraz wektor translacji hiperpłaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$(1, 2, 3, 0), (1, 0, 0, 1), (1, -2, 1, 0), (1, 1, 0, -1).$$

17 Znajdywanie parametryzacji przestrzeni afinicznej, mając daną przestrzeń styczną i wektor przesunięcia

17.1 Metoda

Mając wektor przesunięcia i wektory rozpinające przestrzeń styczną, łatwo otrzymać parametryzację danej warstwy. Np. jeśli $H = p + \text{lin}(v, w)$, to każdy wektor w H jest postaci $p + sv + tw$, co po zsumowaniu da parametryzację.

17.2 Przykład

Np. jeśli $H = (1, 0, 0, -1) + \text{lin}((1, -1, 0, 1), (2, -1, 1, 0))$, to każdy wektor w H jest postaci $(1, 0, 0, -1) + t(1, -1, 0, 1) + s(2, -1, 1, 0)$, czyli $H = \{(1 + t + 2s, -t - s, s, -1 + t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

W drugą stronę, mając dane, że $H = \{(1 + t + 2s, -t - s, s, -1 + t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ wiemy, że wektory z H są postaci $(1, 0, 0, -1) + t(1, -1, 0, 1) + s(2, -1, 1, 0)$, a zatem $H = (1, 0, 0, -1) + \text{lin}((1, -1, 0, 1), (2, -1, 1, 0))$.

17.3 Przykładowe zadania

1. Znajdź parametryzację płaszczyzny $(1, 0, 1) + \text{lin}((1, 2, 2), (-3, 2, 1))$.
2. Znajdź parametryzację hiperpłaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$(1, 2, 3, 0), (1, 0, 0, 1), (1, -2, 1, 0), (1, 1, 0, -1).$$

3. Znajdź wektor przesunięcia i przestrzeń styczną płaszczyzny $\{(1 - x + 2y, x - y, 5 + 2x - 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

18 Znajdywanie układu równań opisujących przestrzeń afiniczną

18.1 Metoda

Układ równań opisujący warstwę różni się od układu opisującego przestrzeń styczną tylko kolumną wyrazów wolnych (jest tak, ponieważ różnica dwóch wektorów z H zawsze należy do $T(H)$, czyli różnica dwóch rozwiązań szukanego układu jest rozwiązaniem układu na przestrzeń styczną) – w tym drugim przypadku mamy do czynienia przecież z układem równań jednorodnych i umiemy go znajdować. Zatem zaczynamy od tego.

Wektor przesunięcia ma być rozwiązaniem docelowego układu, a zatem wystarczy dobrać wyrazy wolne, tak żeby było to prawdą, podstawiając ten wektor do lewych stron równań.

18.2 Przykład

Mając $H = (1, 0, 0, -1) + \text{lin}((1, -1, 0, 1), (2, -1, 1, 0))$ zaczynamy od znalezienia układu równań na $T(H) = \text{lin}((1, -1, 0, 1), (2, -1, 1, 0))$ – to już umiemy i $T(H)$ jest zadane następującym układem równań:

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x + 2y + w = 0 \end{cases}$$

Wektor przesunięcia ma być rozwiązaniem docelowego układu, a zatem wystarczy dobrać wyrazy wolne, tak żeby było to prawdą, podstawiając ten wektor do lewych stron równań: $-1 - 0 + 0 = -1$, $1 + 0 + -1 = 0$, a zatem szukany układ równań to:

$$\begin{cases} -x - y + z = -1 \\ x + 2y + w = 0 \end{cases}$$

18.3 Przykładowe zadania

1. Znajdź układ równań opisujący płaszczyznę $(1, 0, 1) + \text{lin}((1, 2, 2), (-3, 2, 1))$.
2. Znajdź układ równań opisujący hiperpłaszczyznę przechodzącą przez punkty

$$(1, 2, 3, 0), (1, 0, 0, 1), (1, -2, 1, 0), (1, 1, 0, -1).$$

3. Znajdź układ równań opisujący płaszczyznę $\{(1 - x + 2y, x - y, 5 + 2x - 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

19 Znajdywanie parametryzacji przestrzeni afinicznej, mając dany układ równań

19.1 Metoda

Zauważ, po prostu, że mając dany układ równań na H , jego rozwiązanie ogólne to po prostu parametryzacja H !

19.2 Przykład

Niech $V \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie opisane równaniem $x + y - 2z = 3$. Zatem rozwiązanie ogólne to $x = 3 - y + 2z$, zatem parametryzacja to: $\{(3 - y + 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

19.3 Przykładowe zadania

Znajdź parametryzacje następujących przestrzeni afinicznych $M \subseteq \mathbb{R}^4$:

- opisanej układem równań

$$x + y - z + 2t = 12x - 2y - z = -2.$$

- opisanej równaniem $x + y + z + t = 1$.

20 Znajdywanie przestrzeni afinicznej prostopadłej do danej przestrzeni i przechodzącej przez dany punkt

20.1 Metoda

Kluczową rzeczą w rozwiązywaniu tego typu problemów, jest to, że jeśli $M \perp H$, to $\vec{M} \perp \vec{H}$. A zatem (o ile wymiary sumują się do całości), $\vec{M} = (\vec{H})^\perp$. Inaczej mówiąc współczynniki z układu równań opisującego $\vec{H}$ to układ wektorów rozpinający $\vec{M}$. Lub na odwrót: układ wektorów rozpinający $\vec{H}$ daje współczynniki układu równań na $\vec{M}$.

20.2 Przykład

Znajdźmy układ równań opisujący płaszczyznę M przechodzącą przez punkt $(1, 2, -1)$ i prostopadłą do prostej $L = (2017, 0, 0) + \text{lin}((1, 1, 1))$.

Wtedy $(\vec{M})^\perp = \vec{L} = \text{lin}((1, 1, 1))$, czyli $\vec{M}$ zadane jest równaniem $x + y + z = 0$. Zatem M jest dane równaniem $x + y + z = 2$ (podstawiam wektor $(1, 2, -1)$).

20.3 Przykładowe zadania

Znajdź układ równań i parametryzację:

- prostej L przechodzącej przez $(1, 0, 0, 0)$ i prostopadłej do hiperpłaszczyzny

$$H = \{(1 + x - y + z, 2x + z, y - 3x, -1) : x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

- płaszczyzny M przechodzącej przez $(1, -1, 1, -1)$ i prostopadłej do płaszczyzny opisanej układem równań:

$$\begin{cases} x + 3y + t = 0 \\ 2x + 7y - z - t = 0 \end{cases}.$$

21 Znajdywanie rzutu punktu lub obrazu w symetrii względem podprzestrzeni afinicznej

21.1 Metoda

Jak policzyć rzut wektora na podprzestrzeń afiniczną lub jego obraz w symetrii względem takiej przestrzeni? Ano, sprowadzić do znanego przypadku, czyli podprzestrzeni liniowych, policzyć, wrócić do wyjściowej sytuacji. Czyli przesunąć całość tak, żeby podprzestrzeń afiniczna przechodziła przez zero, policzyć rzut, przesunąć z powrotem.

21.2 Przykład

Np. policzmy rzut $(2, 2, 1)$ na prostą $(2, 1, 0) + \text{lin}(-1, -1, 0)$. Zatem najpierw liczymy rzut $(2, 2, 1) - (2, 1, 0) = (0, 1, 1)$ na $\text{lin}(-1, -1, 0)$:

$$\frac{\langle (0, 1, 1), (-1, -1, 0) \rangle}{\langle (-1, -1, 0), (-1, -1, 0) \rangle} (-1, -1, 0) = \frac{-1}{2} (-1, -1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right).$$

I przesuwamy z powrotem, żeby dostać ostateczny wynik: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + (2, 1, 0) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0)$.

21.3 Przykładowe zadania

1. Policz rzut wektora $(1, 0, 1, 0)$ na:

- prostą $(1, 0, -1, 0) + \text{lin}((1, 1, 1, 1))$,
- hiperpłaszczyznę opisaną równaniem $x + y + z + t = -3$,
- płaszczyznę $\text{af}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$.

2. Policz obraz wektora $(1, 0, 1, 0)$ w symetrii względem:

- prostą $(1, 0, -1, 0) + \text{lin}((1, 1, 1, 1))$,
- hiperpłaszczyznę opisaną równaniem $x + y + z + t = -3$,
- płaszczyznę $\text{af}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$.