

Algebra liniowa, WNE, 2017/2018

zagadnienia do 2. kolokwium

28 listopada 2017

Spis treści

1	Sprawdzanie czy przekształcenie jest liniowe	2
1.1	Metoda	2
1.2	Przykład	3
1.3	Przykładowe zadania	3
2	Obliczenie wartości danego przekształcenia na wektorze mając dany wzór	4
2.1	Metoda	4
2.2	Przykład	4
2.3	Przykładowe zadania	4
3	Obliczenie wzoru danego przekształcenia mając dane jego wartości w pewnej bazie	5
3.1	Metoda	5
3.2	Przykład	5
3.3	Przykładowe zadania	5
4	Dodawanie macierzy i mnożenie ich przez liczbę. Mnożenie macierzy.	6
4.1	Metoda	6
4.2	Przykład	6
4.3	Przykładowe zadania	6
5	Wypisywanie macierzy przekształcenia w bazach standardowych ze wzoru i wzoru z macierzy bazy standardowej.	7
5.1	Metoda	7
5.2	Przykład	7
5.3	Przykładowe zadania	7
6	Operacje na przekształceniach liniowych	8
6.1	Metoda	8
6.1.1	Metoda pierwsza: na wzorach	8
6.1.2	Metoda druga: na macierzach	8
6.2	Przykład	8
6.3	Przykładowe zadania	8
7	Znajdywanie macierzy zmiany bazy (macierzy identyczności)	9
7.1	Metoda	9
7.2	Przykład	9
7.3	Przykładowe zadania	9
8	Zmiana baz macierzy przekształcenia	10
8.1	Metoda	10
8.1.1	Metoda pierwsza: liczymy współrzędne	10
8.1.2	Metoda druga: mnożymy przez macierz zmiany bazy	10
8.2	Przykład	10
8.3	Przykładowe zadania	11

9	Wylczenie odpowiednich współrzędnych wartości mając daną macierz przekształcenia i współrzędne argumentu	12
9.1	Metoda	12
9.2	Przykład	12
9.3	Przykładowe zadania	12
10	Liczenie wyznacznika macierzy 2×2 i 3×3	13
10.1	Metoda	13
10.2	Przykład	13
10.3	Przykładowe zadania	13
11	Liczenie wyznacznika metodą rozwinięcia Laplace’a	14
11.1	Metoda	14
11.2	Przykład	14
11.3	Przykładowe zadania	14
12	Liczenie wyznacznika macierzy sprowadzając ją do postaci trójkątnej	15
12.1	Metoda	15
12.2	Przykład	16
12.3	Przykładowe zadania	16
13	Liczenie wyznacznika macierzy w postaci blokowej	17
13.1	Metoda	17
13.2	Przykład	17
13.3	Przykładowe zadania	17
14	Liczenie wyznacznika macierzy korzystając ze znanych faktów	18
14.1	Metoda	18
14.2	Przykład	19
14.3	Przykładowe zadania	19
15	Liczenie macierzy odwrotnej	20
15.1	Metoda	20
15.2	Przykład	20
15.3	Przykładowe zadania	20
16	Liczenie konkretnego wyrazu macierzy odwrotnej	21
16.1	Metoda	21
16.2	Przykład	21
16.3	Przykładowe zadania	21
17	Rozwiązywanie układu równań przy pomocy wzorów Cramera	22
17.1	Metoda	22
17.2	Przykład	22
17.3	Przykładowe zadania	22

1 Sprawdzanie czy przekształcenie jest liniowe

1.1 Metoda

Przekształcenie liniowe ϕ to funkcja przyporządkowująca wektorom jednej przestrzeni liniowej V , wektory (być może innej) przestrzeni liniowej W ($\phi: V \rightarrow W$), spełniająca warunek liniowości, mianowicie: dla każdych wektorów $v, v' \in V$ i liczb a, b mamy $\phi(av + bv') = a\phi(v) + b\phi(v')$. Przykładem przekształcenia liniowego $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest obrót wokół punktu $(0, 0)$ – wszystko jedno czy najpierw przemnożymy wektory i dodamy do siebie i obrócimy wynik, czy obrócimy wektory i przemnożymy i dodamy dopiero po obrocie.

Więc aby udowodnić, że dane przekształcenie jest przekształceniem liniowym, trzeba udowodnić, że spełnia warunek liniowości.

Tymczasem, aby udowodnić, że przekształcenie nie jest przekształceniem liniowym, wystarczy znaleźć zestaw wektorów i liczb stanowiących kontrprzykład na warunek liniowości.

1.2 Przykład

Przekształcenie $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadane wzorem $\varphi(x, y) = -x + 2y$ jest przekształceniem liniowym, bowiem jeśli $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, to $\varphi(a(x, y) + b(x', y')) = \varphi(ax + bx', ay + by') = -ax - bx' + 2ay + 2by' = a(-x + 2y) + b(-x' + 2y') = a\varphi((x, y)) + b\varphi((x', y'))$.

Natomiast, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadane wzorem $\psi(x) = (2x + 1, 0)$ nie jest przekształceniem liniowym, bo $\psi(1 + 1) = \psi(2) = (5, 0) \neq (6, 0) = (3, 0) + (3, 0) = \psi(1) + \psi(1)$.

1.3 Przykładowe zadania

Sprawdź, czy następujące przekształcenia są liniowe:

- $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = (z, y, x)$,
- $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $\varphi(x, y, z) = (z, 2z, 3z, 4z, 5z)$,
- $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $\varphi(x, y) = (z^2, x, y, x, y)$,
- $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = x + y$,
- $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi(x, y) = (0, x, y, 2x - y)$.

2 Obliczenie wartości danego przekształcenia na wektorze mając dany wzór

2.1 Metoda

Z reguły przekształcenia liniowe będziemy mieli zadane przy pomocy wzoru. Wtedy wstawiamy konkretny wektor v do tego wzoru, żeby poznać wartość $\varphi(v)$ tego przekształcenia na tym wektorze.

2.2 Przykład

Na przykład: $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi((x, y)) = (y, -2x + y)$. Wtedy, żeby zobaczyć, co to przekształcenie robi np. z wektorem $(1, 2)$, podstawiamy go do wzoru: $\psi((1, 2)) = (2, -2 + 2) = (2, 0)$.

2.3 Przykładowe zadania

Oblicz ile wynosi $\varphi(v)$, dla:

- $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x, y, z)) = (x + y, -x, 3y + z)$, $v = (1, 1, 2)$,
- $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi((x, y, z, t)) = x - y + z - 2t$, $v = (1, -1, 2, -2)$,
- $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2017x_4, -x_3 + x_2, 4x_2 + x_3 - 2017x_4)$, $v = (2017, 0, 0, 0)$.

3 Obliczenie wzoru danego przekształcenia mając dane jego wartości w pewnej bazie

3.1 Metoda

Często zadajemy przekształcenia liniowe poprzez zadanie wzoru, ale oczywiście przekształcenie jest jednoznacznie zdeterminowane przez wartości, jakie przyjmuje na wektorach z danej bazy. Z takiej postaci można łatwo odzyskać wzór przekształcenia, znajdując najpierw współrzędne wektorów z bazy standardowej w tej bazie (układ równań, albo zgadywanie).

Jest tak ponieważ

$$\varphi((x_1, \dots, x_n)) = \varphi(x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n) = x_1\varphi(\varepsilon_1) + \dots + x_n\varphi(\varepsilon_n),$$

gdzie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ to wektory z bazy standardowej. Gdy więc wyliczymy $\varphi(\varepsilon_1), \dots, \varphi(\varepsilon_n)$, to będziemy mieli wzór.

Jak zatem wyliczyć $\varphi(\varepsilon_1), \dots, \varphi(\varepsilon_n)$? Więć mamy zadane wartości φ na pewnych wektorach, powiedzmy, że znamy $\varepsilon(\alpha_1), \dots, \varepsilon(\alpha_n)$. Wektory te zawsze są tak dobrane, żeby stanowiły bazę. Dla każdego i , możemy zatem wyliczyć współrzędne ε_i w tej bazie:

$$\varepsilon_i = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n.$$

Możemy to zrobić zgadując, lub rozwiązując układ równań (patrz materiały przygotowawcze do pierwszego kolokwium). Wtedy

$$\varphi(\varepsilon_i) = a_1\varphi(\alpha_1) + \dots + a_n\varphi(\alpha_n).$$

3.2 Przykład

Np. niech $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie zadane następująco $\varphi((1, -1)) = (1, 2, 1)$, $\varphi((-1, 0)) = (-1, 0, 1)$ (wektory $(1, -1)$, $(-1, 0)$ stanowią bazę płaszczyzny). Widać, że $(1, 0) = 0 \cdot (1, -1) - 1 \cdot (-1, 0)$ (współrzędne: 0, -1) oraz $(0, 1) = -(1, -1) - (-1, 0)$ (współrzędne: -1, -1). A zatem $\varphi((x, y)) = x\varphi((1, 0)) + y\varphi((0, 1)) = x(-\varphi((-1, 0))) + y(-\varphi((1, -1)) - \varphi((-1, 0))) = x(-(-1, 0, 1)) + y(-(1, 2, 1) - (-1, 0, 1)) = x(1, 0, -1) + y(0, -2, -2) = (x, -2y, -x - 2y)$.

3.3 Przykładowe zadania

Znajdź wzór na φ , jeśli

- $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, oraz $\varphi((2, 1, 0)) = (1, 1)$, $\varphi((0, 0, 1)) = (5, -2)$ i $\varphi((2, 0, 1)) = (-10, 0)$.
- $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, oraz $\varphi((1, 1, 0, 0)) = 1$, $\varphi((0, 1, 1, 0)) = 2$, $\varphi((0, 0, 1, 1)) = 3$ i $\varphi((1, 0, 0, 1)) = 4$.
- $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((2, 1, 1, 1)) = (1, 2, 3)$, $\varphi((0, 1, 0, 0)) = (3, 2, 1)$, $\varphi((0, 0, 1, 0)) = (-1, -1, -1)$ i $\varphi((1, 0, 0, 1)) = (0, 0, 0)$.

4 Dodawanie macierzy i mnożenie ich przez liczbę. Mnożenie macierzy.

4.1 Metoda

Aby dodać dwie macierze, muszą mieć te same wymiary. Macierze dodajemy po współrzędnych.

Dodawanie macierzy jest przemienne i łączne, a zatem dla dowolnych macierzy A, B, C , $A + B = B + A$ oraz $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Mnożymy macierz przez liczbę też po prostu po współrzędnych. Wobec tych dwóch operacji, łatwo zauważyć, że zbiór macierzy o określonej liczbie kolumn i wierszy stanowi przestrzeń liniową.

Aby pomnożyć macierze, pierwsza z nich musi mieć tyle samo kolumn, co druga wierszy. Wynik będzie miał tyle wierszy, co pierwsza z macierzy i tyle kolumn co druga macierz. Mnożymy wiersze z pierwszej macierzy przez kolumny z drugiej, w takim sensie, że na miejscu w i -tym wierszu i j -tej kolumnie macierzy wynikowej będzie efekt mnożenia i -tego wiersza pierwszej macierzy przez j -tą kolumnę drugiej macierzy, gdzie przez iloczyn wiersza i kolumny rozumiemy iloczyn par kolejnych wartości dodane do siebie.

Mnożenie macierzy jest łączne, czyli dla macierzy A, B, C , $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$. Ale nie jest przemienne! Zauważ z resztą, że o ile macierze nie są kwadratowe, to nie da się ich pomnożyć odwrotnie. A nawet jak są kwadratowe, to może wyjść inny wynik.

4.2 Przykład

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-1 & 2+4 \\ 3-5 & -1+2 \\ 2+0 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}. \\ 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}. \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-5) + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 0 & (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-5) + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-5) + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} -17 & 13 \\ -9 & 3 \\ -5 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.3 Przykładowe zadania

Oblicz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left((-2) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

5 Wypisywanie macierzy przekształcenia w bazach standardowych ze wzoru i wzoru z macierzy bazy standardowej.

5.1 Metoda

Macierz przekształcenia w bazach standardowych ma taką własność, że pomnożenie wektora z prawej strony w pionie daje wartość przekształcenia na tym wektorze. Dlatego też macierz przekształcenia ma tyle samo kolumn, co wymiar przestrzeni argumentów, zaś tyle wierszy, co wymiar przestrzeni wartości.

Co więcej, łatwo zauważyć, że z mnożenia:

$$M(\varphi)_s t^{st} \cdot \varepsilon_i,$$

gdzie ε_i to i -ty wektor z bazy standardowej daje i -tą kolumnę tej macierzy. Zatem ta i -ta kolumna to $\varphi(\varepsilon_i)$. Inaczej mówiąc współczynniki w niej to współczynniki przy x_i we wzorze. Inaczej mówiąc, aby wypisać macierz przekształcenia w bazach standardowych, wypisujemy w kolumnach współczynniki dotyczące kolejnych zmiennych ze wzoru. Lub też inaczej mówiąc możemy wypisywać w wierszach kolejne współczynniki z kolejnych współrzędnych wyniku ze wzoru. Analogicznie w drugą stronę.

Czyli jeśli $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n)$, to

$$M(\varphi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

5.2 Przykład

Niech $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, będzie takie, że $\phi(x, y, z) = (x - z, 2x + 3y - z)$. Wtedy:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Niech

$$M(\psi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ oraz $\psi(x, y) = (x, 2x + 3y, -y, x + y)$.

5.3 Przykładowe zadania

Znajdź macierz $M(\phi)_{st}^{st}$ dla:

- $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y, z)) = (x + y, -x, 3y + z)$,
- $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi((x, y, z, t)) = x - y + z - 2t$,
- $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2017x_4, -x_3 + x_2, 4x_2 + x_3 - 2017x_4)$.

Znajdź wzór na ϕ , jeśli:

- $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
- $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

6 Operacje na przekształceniach liniowych

6.1 Metoda

Przekształcenia można do siebie dodawać (jeśli mają tę samą przestrzeń argumentów i wartości), mnożyć przez liczbę oraz składać (jeśli przestrzeń wartości jednego z nich to przestrzeń argumentów drugiego).

W składaniu chodzi o to, że najpierw stosuje jedno przekształcenie, a potem do jego wyniku drugie, a więc $(\psi \circ \phi)(v) = (\psi(\phi(v)))$.

6.1.1 Metoda pierwsza: na wzorach

W przypadku dodawania i mnożenia przez liczbę, po prostu dodajemy do siebie wzory lub mnożymy wzór przez liczbę.

W przypadku składania podstawiamy jeden wzór do drugiego.

6.1.2 Metoda druga: na macierzach

Jest to metoda ogólniejsza, bo może my nie tylko poradzić sobie ze wzorem (czyli macierzą w bazach standardowych), ale też z macierzami w innych bazach. Dodawanie przekształceń to dodawanie ich macierzy (muszą być w tych samych bazach). Mnożenie przez liczbę, to mnożenie macierzy przez liczbę. Składanie przekształceń to mnożenie macierzy. Tu bazy muszą się zgadzać w następujący sposób:

$$M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

6.2 Przykład

Jeśli $\varphi((x, y)) = (-x, -2y)$, $\psi((x, y)) = (0, 2x)$, to $(\varphi + 2\psi)((x, y)) = (-x, 4x - 2y)$. Licząc to samo na macierzach dostajemy:

$$M(\varphi + 2\psi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\phi((x, y, z)) = (x - z, 2x + 3y - z)$ oraz $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ zadane wzorem $\psi((a, b)) = (-b, a + b, -2a - b, 3a)$. A zatem $(\psi \circ \phi)((x, y, z)) = \psi(\phi((x, y, z))) = \psi((x - z, 2x + 3y - z)) = (-2x - 3y + z, 3x + 3y - 2z, -4x - 3y + 3z, 3x - 3z)$. Licząc to samo na macierzach dostajemy:

$$M(\psi \circ \phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

6.3 Przykładowe zadania

1. Znajdź wzór na $\psi \circ (\phi - 3\varphi)$, gdzie $\psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi((a, b, c, d)) = (2a + b, -a + c + 3d)$, $\phi, \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\phi((x, y)) = (x - y, 2y, -x, 2x)$, $\varphi((x, y)) = (-3x - y, x + 2y, 0, -2y)$.
2. Znajdź $M(\psi \circ (\phi - 3\varphi))$, jeśli $\psi: V \rightarrow W$, $\phi, \varphi: U \rightarrow V$ oraz $\mathcal{A}$ to baza U , $\mathcal{B}$ – baza V i $\mathcal{C}$ – baza W , a także: $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

7 Znajdowanie macierzy zmiany bazy (macierzy identyczności)

7.1 Metoda

Jest pewna specjalne przekształcenie liniowe, które nazywamy identycznością, które nic nie robi. Na przykład w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ to $id((x, y, z)) = (x, y, z)$. A zatem, jeśli mamy dwie bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$, oraz macierz $M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ i przemnożymy z prawej przez tę macierz współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{A}$ to w wyniku otrzymamy współrzędne nadal wektora v (bo $id(v) = v$), ale w bazie $\mathcal{B}$. Czyli macierz $M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ to macierz zmiany bazy z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$.

Zatem w macierzy $M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ w kolumnach znajdują się współrzędne kolejnych wektorów z bazy $\mathcal{A}$ w bazie $\mathcal{B}$. Możemy te współrzędne znaleźć zgadując, lub rozwiązując układy równań (mają taką samą lewą stronę, więc można je zapisać w jednej macierzy).

Szczególnie będą nam się przydawać macierze zmiany bazy z bazy standardowej na daną bazę i z danej bazy na bazę standardową. Obczajmy więc, jak je policzyć.

Najprościej macierz z danej bazy na bazę standardową. Znajdźmy $M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$ (baza z przykładu powyżej). Po przemnożeniu z prawej strony przez wektor $1, 0, 0$ dostaniemy po prostu pierwszą kolumnę tej macierzy. Z drugiej strony to pierwszy wektor z bazy $\mathcal{A}$ ma w niej współrzędne $1, 0, 0$, czyli to co dostaniemy jest po prostu współrzędnymi tego wektora w bazie standardowej, czyli tym wektorem. A zatem po prostu w i -tej kolumnie tej macierzy jest i -ty wektor z naszej bazy.

Teraz w drugą stronę – z bazy standardowej na daną bazę. Policzmy $M(id)_{st}^{\mathcal{B}}$. Oczywiście tym razem, łatwo zobaczyć, że w kolumnach mają znaleźć się współrzędne wektorów z bazy standardowej w danej bazie.

7.2 Przykład

Niech $\mathcal{A} = \{(2, 3), (-1, 2)\}$, zaś $\mathcal{B} = \{(2, 1), (-1, 2)\}$. Znajdźmy najpierw $M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. W tym celu trzeba znaleźć współrzędne wektorów z bazy $\mathcal{A}$ w bazie $\mathcal{B}$. Rozwiązujemy dwa układy równań (zapisując je w jednej macierzy).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + 2w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \cdot (-1), w_2 \cdot 1/3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 8/3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 2w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 1 & 8/3 & 1 \end{array} \right].$$

Więc współrzędne to $7/3, 8/3$ oraz $0, 1$, czyli

$$M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7/3 & 0 \\ 8/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mamy także od razu, że:

$$M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Natomiast chcąc obliczyć $M(id)_{st}^{\mathcal{B}}$, musimy znaleźć współrzędne wektorów z bazy standardowej: $(1, 0) = 2/5(2, 1) - 1/5(-1, 2)$ oraz $(0, 1) = 1/5(2, 1) + 2/5(-1, 2)$, zatem:

$$M(id)_{st}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

7.3 Przykładowe zadania

Oblicz $M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, $M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$ oraz $M(id)_{st}^{\mathcal{B}}$ dla

- $\mathcal{A} = \{(1, 2, 3), (1, 1, 0), (-1, 0, 3)\}$, $\mathcal{B} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$,
- $\mathcal{A} = \{(2, 0, 1, 7), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 2), (0, 0, -1, -1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$.

8 Zmiana baz macierzy przekształcenia

8.1 Metoda

8.1.1 Metoda pierwsza: liczymy współrzędne

No dobrze, założmy zatem, że mamy wzór przekształcenia ϕ , jak wyżej (lub jego macierz w bazach standardowych) oraz bazy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

W tym celu zauważ, że jeśli wezmę pierwszy wektor z bazy standardowej i przemnożę go z prawej strony (pionowo) przez macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, to z jednej strony otrzymam po prostu pierwszą kolumnę tej macierzy. Z drugiej strony to właśnie pierwszy wektor v_1 z bazy $\mathcal{A}$ ma w tej bazie współrzędne 1,0,0. A zatem wynik mnożenia to współrzędne wektora $\phi(v_1)$ w bazie $\mathcal{B}$ i jest to pierwsza kolumna szukanej macierzy. Podobnie znajdujemy kolejne kolumny – i -ta, to współrzędne $\phi(v_i)$ w bazie $\mathcal{B}$, gdzie v_i to i -ty wektor a bazy $\mathcal{A}$.

8.1.2 Metoda druga: mnożymy przez macierz zmiany bazy

Dostaliśmy do ręki nowe narzędzie do zmieniania baz w macierzy przekształcenia, czyli macierz zmiany bazy. Ponieważ $id \circ \phi \circ id = \phi$, mamy że:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}} = M(id \circ \phi \circ id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}} = M(id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

A zatem w szczególności:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(id)_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$$

i w ten sposób mając macierz przekształcenia w bazach standardowych możemy wyliczyć jego macierz w bazach od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

W drugą stronę:

$$M(\phi)_{st}^{st} = M(id)_{\mathcal{B}}^{st} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(id)_{st}^{\mathcal{A}}.$$

Za to, gdy chcemy zmienić tylko jedną z baz, dostajemy odpowiednio

$$M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = M(id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

oraz

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

8.2 Przykład

Niech na przykład: $\mathcal{A} = ((1, 1, 1), (1, 0, -1), (1, 0, 0))$ oraz $\mathcal{B} = ((2, 3), (-1, -1))$. Chcielibyśmy wyliczyć macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Najpierw zrobmy to pierwszą metodą.

Zatem do dzieła: $\phi((1, 1, 1)) = (1 - 1, 2 + 3 - 1) = (0, 4)$ i szukamy współrzędnych tego wektora w bazie $\mathcal{B}$: $(0, 4) = 4(2, 3) + 8(-1, -1)$, a zatem szukane współrzędne to 4,8 i jest to pierwsza kolumna szukanej macierzy.

Znajdźmy drugą kolumnę – to samo tylko z drugim wektorem z bazy $\mathcal{A}$. $\phi((1, 0, -1)) = (1 - (-1), 2 - (-1)) = (2, 3)$ i jego współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ to oczywiście 1,0. I trzecia kolumna: $\phi((1, 0, 0)) = (1, 2)$ ma współrzędne w bazie $\mathcal{B}$: $(1, 2) = (2, 3) + (-1, -1)$, czyli 1,1.

A zatem:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Metodą z mnożeniem przez macierze zmiany bazy, mamy, co następuje.

$$M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Policzmy $M(id)_{st}^{\mathcal{B}}$. Oczywiście tym razem, łatwo zobaczyć, że w kolumnach mają znaleźć się współrzędne wektorów z bazy standardowej w danej bazie. Trzeba je policzyć $(1, 0) = -(2, 3) - 3(-1, -1)$ oraz $(0, 1) = (2, 3) + 2(-1, -1)$. A zatem:

$$M(id)_{st}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mamy teraz:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(id)_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\mathcal{A}}^{st},$$

czyli

$$\begin{aligned} M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Co się oczywiście zgadza z tym, co policzyliśmy wcześniej inną metodą.

8.3 Przykładowe zadania

- Niech $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $\mathcal{B} = \{(0, 1), (1, -1)\}$ oraz $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem $\varphi((a, b, c)) = (a + 2b, -a - b - 3c)$. Znajdź $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.
- Niech $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $\mathcal{B} = \{(0, 1), (1, -1)\}$ oraz $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie takie, że $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Znajdź wzór opisujący ψ .
- Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\varphi: V \rightarrow V$ przekształceniem liniowym oraz $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ pewnymi bazami przestrzeni V . Wiadomo, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ oraz macierz zmiany bazy z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$ to $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Obliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.
- Niech $\mathcal{A} = \{(1, 0, -1, 0), (3, 1, -2, 0), (2, 0, 0, 1), (-1, 2, 4, 0)\}$, $\mathcal{B} = \{(2, 1), (5, 3)\}$, $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (-2, 1, -3), (-5, 3, -9)\}$ oraz niech $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą zadane tak, iż:

$$- \phi((a, b, c, d)) = (a - c + d, 2b - d),$$

$$- M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$- M(\psi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Oblicz $M((\varphi + 2\psi) \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

9 Wyliczenie odpowiednich współrzędnych wartości mając daną macierz przekształcenia i współrzędne argumentu

9.1 Metoda

Macierz przekształcenia φ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ służy właśnie do tego, że, jeśli pomnożymy ją z prawej strony przez współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{A}$, to jako wynik dostaniemy współrzędne wektora $\varphi(v)$ w bazie $\mathcal{B}$.

9.2 Przykład

Niech $\varphi: V \rightarrow W$ oraz $\mathcal{A}$ niech będzie bazą V , $\mathcal{B}$ bazą W , oraz niech $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Niech wektor v ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne $1, 1, 2, 0$. Obliczmy współrzędne $\varphi(v)$ w bazie $\mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

Czyli współrzędne te to $-1, 2$.

9.3 Przykładowe zadania

Niech $\varphi: V \rightarrow W$ oraz $\mathcal{A}$ niech będzie bazą V , $\mathcal{B}$ bazą W . Niech wektor v ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne $1, -1, 2$. Oblicz współrzędne $\varphi(v)$ w bazie $\mathcal{B}$, gdy:

- $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$,
- $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -10 & 5 \end{bmatrix}$.

10 Liczenie wyznacznika macierzy 2×2 i 3×3

10.1 Metoda

Natychmiast z definicji wyznacznika dostajemy:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

a zatem:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ x & y & z \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} l & m \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} k & m \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} k & l \\ x & y \end{vmatrix} = \\ &= a(lz - my) - b(kz - mx) + c(ky - lx) = alz + bmx + cky - amy - bkz - clx. \end{aligned}$$

10.2 Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-3) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \cdot 0 - 3 \cdot (-2) \cdot 0 = 0 + 0 - 9 + 1 - 0 - 0 = -8.$$

10.3 Przykładowe zadania

Policzyć wyznaczniki macierzy:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

11 Liczenie wyznacznika metodą rozwinięcia Laplace’a

11.1 Metoda

Wyznacznik macierzy ma sens dla macierzy kwadratowych – i jest zdefiniowany rekurencyjnie: $\det[a] = a$ and

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{1,2} \det A_{1,2} + a_{1,3} \det A_{1,3} - \dots \pm a_{1,n} \det A_{1,n},$$

gdzie $A_{i,j}$ to macierz A z wykreślonym i -tym wierszem i j -tą kolumną. Czyli (wyznacznik oznaczamy $\det$ lub poprzez napisanie zamiast nawiasów macierzy modułów).

Definicja podana wyżej jest tylko szczególnym przypadkiem ogólnego faktu zwanego rozwinięciem Laplace’a. Zamiast korzystać z pierwszego wiersza, możemy do generowania wiersza użyć dowolnego wiersza lub kolumny (najlepiej tego z dużą liczbą zer). Czyli:

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^i (a_{i,1} \det A_{i,1} - a_{i,2} \det A_{i,2} + a_{i,3} \det A_{i,3} - \dots \pm a_{i,n} \det A_{i,n}),$$

dla dowolnego wiersza w_i . Analogiczny fakt jest oczywiście prawdziwy dla kolumn.

11.2 Przykład

Używając definicji:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ & = 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ & = 1 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 19 - 0 = 38 \end{aligned}$$

Używając rozwinięcia Laplace’a w poniższej macierzy, zdecydowanie opłaca się policzyć rozwinięcie względem trzeciej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

11.3 Przykładowe zadania

Policzyć wyznaczniki macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

12 Liczenie wyznacznika macierzy sprowadzając ją do postaci trójkątnej

12.1 Metoda

Zauważmy najpierw, że z faktu o rozwinięciu Laplace'a wynika w szczególności, że jeśli macierz ma zerowy rząd (lub kolumnę), to jej wyznacznik wynosi zero.

Rozpatrzmy teraz różne operacje na wierszach macierzy, które lubimy wykonywać. Posługując się rozwinięciem Laplace'a można udowodnić, że **zamiana dwóch wierszy ze sobą mnoży wyznacznik przez -1** – rzeczywiście licząc rozwinięcie względem pierwszej kolumny zmieniają się (być może) znaki przy sumowaniu ale i zmieniają się miejscami wiersze też wiersze w macierzach minorowych, z których coś wykreśliśmy.

Od razu widać za to z rozwinięcia Laplace'a, że **przemnożenie wiersza przez liczbę, mnoży wyznacznik macierzy przez tę liczbę** – można to zobaczyć wypisując rozwinięcie Laplace'a względem tego wiersza.

A zatem przemnożenie macierzy przez pewną liczbę mnoży wyznacznik przez tę liczbę tyle razy ile jest wierszy w macierzy, czyli:

$$\det(aA) = a^n \det A,$$

gdzie macierz A jest macierzą $n \times n$.

Zauważmy też, że wyznacznik macierzy, która ma takie same dwa wiersze, to 0, ponieważ – zamieniając te dwa wiersze ze sobą nie zmieniamy macierzy, a mnożymy wyznacznik przez -1 , czyli $\det A = -\det A$, a zatem $\det A = 0$. Zatem ze względu na regułę związaną z mnożeniem wiersza przez liczbę, jeśli dwa wiersze macierzy są liniowo zależne od siebie, to wyznacznik tej macierzy to 0.

Również z rozwinięcia Laplace'a od razu widać, że jeśli macierze A, B, C różnią się tylko i -tym wierszem w ten sposób, że ten wiersz w macierzy C jest sumą i -tych wierszy z macierzy B i A , to wyznacznik C to suma wyznaczników A i B . Uwaga! Łatwo widać, że z reguły $\det(A + B) \neq \det A + \det B$!

W końcu możemy więc zbadać, jak wyznacznik macierzy zmienia podstawowa operacja na wierszach, czyli operacja dodania do jednego wiersza innego przemnożonego przez liczbę. Wtedy mamy tak naprawdę do czynienia z właśnie opisaną sytuacją – wynikowa macierz to macierz C , w która różni się od macierzy A i B tylko wierszem, do którego dosumowujemy inny. Macierz A to oryginalna macierz, a macierz C to macierz A w której zamiast wiersza do którego sumujemy jest wiersz, który dodajemy przemnożony przez liczbę. A zatem $\det A = \det B + \det C$, ale C ma dwa liniowo zależne wiersze, a zatem $\det C = 0$ i $\det B = \det A$. A zatem **operacja dodania do danego wiersza innego przemnożonego przez liczbę nie zmienia wyznacznika**.

Na koniec mnożenie macierzy. Każda z powyższych operacji można zapisać jako mnożenie przez macierz. Np. zamiana 2 i 3 wiersza w macierzy 3×3 , to przemnożenie przez macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

przemnożenie 3-ciego wiersza przez 4, to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

dodanie do drugiego dwa razy pierwszego, to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nie trudno zauważyć, że tak się składa, że nawet w przypadku wielowymiarowym taka macierz zamiany wierszy ma wyznacznik (-1) , macierz powiązana z pomnożeniem wiersza przez liczbę a , wyznacznik a , zaś macierz dodania do wiersza innego przemnożonego przez liczbę, wyznacznik 1. A zatem mnożenie przez te macierze (nazywane elementarnymi) mnoży macierz przez ich wyznaczniki. Co więcej każdą macierz da się uzyskać przez przemnożenie przez siebie macierzy elementarnych, co daje następujący ważny wniosek:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Z rozwinięcia Laplace'a, jak się przyjrzeć, to łatwo widać, że wyznacznik macierzy w postaci schodkowej (zwanej często dla macierzy kwadratowych, postacią trójkątną), jest równy iloczynowi jej wyrazów na przekątnej.

Ponieważ wiemy, jak zmieniają wyznacznik operacje na wierszach, możemy sprowadzić macierz do postaci schodkowej, policzyć jej wyznacznik, i odtworzyć wyznacznik oryginalnej macierzy, co szczególnie dobrze się sprawdza przy dużych macierzach, np. 5×5 .

12.2 Przykład

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - w_1, w_5 - w_1} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 3w_2, w_4 \leftrightarrow w_5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A zatem wyznacznik końcowej macierzy to $1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 3 = 12$. Po drodze raz zamienialiśmy wiersze, raz mnożyliśmy przez $\frac{1}{2}$, a zatem wyznacznik początkowej macierzy, to $\frac{12 \cdot (-1)}{\frac{1}{2}} = -24$.

12.3 Przykładowe zadania

Policzyć wyznacznik sprowadzając do postaci trójkątnej

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

13 Liczenie wyznacznika macierzy w postaci blokowej

13.1 Metoda

Z tego, że wystarczy policzyć wyznacznik przez sprowadzanie do postaci schodkowej, łatwo wynika zasada o wyznaczniku macierzy w postaci blokowej, czyli macierzy składającej się z 4 bloków, z których lewy dolny to zera, czyli $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$. Wyznacznik takiej macierzy, to $\det A \cdot \det B$.

13.2 Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

13.3 Przykładowe zadania

Policzyć wyznaczniki:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2017 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 2018 \\ 1 & 0 & 1 & 2016 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2017 & 0 & 2017 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 20 & 2017 & 0 & 2017 & \\ 3 & 9 & 1 & 1 & -1 & 2017 & 0 & 2017 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 2017 & 0 & 2017 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2017 & 0 & 2017 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

14 Liczenie wyznacznika macierzy korzystając ze znanych faktów

14.1 Metoda

Wszystkie fakty, z których można korzystać wymieniliśmy wyżej, dla przypomnienia wymieniam je poniżej.

Zauważmy najpierw, że z faktu o rozwinięciu Laplace'a wynika w szczególności, że jeśli macierz ma zerowy rząd (lub kolumnę), to jej wyznacznik wynosi zero.

Rozpatrzmy teraz różne operacje na wierszach macierzy, które lubimy wykonywać. Posługując się rozwinięciem Laplace'a można udowodnić, że **zamiana dwóch wierszy ze sobą mnoży wyznacznik przez -1** – rzeczywiście licząc rozwinięcie względem pierwszej kolumny zmienia się (być może) znaki przy sumowaniu ale i zmienia się miejscami wiersze też wiersze w macierzach minorowych, z których coś wykreśliliśmy.

Od razu widać za to z rozwinięcia Laplace'a, że **przemnożenie wiersza przez liczbę, mnoży wyznacznik macierzy przez tę liczbę** – można to zobaczyć wypisując rozwinięcie Laplace'a względem tego wiersza.

A zatem przemnożenie macierzy przez pewną liczbę mnoży wyznacznik przez tę liczbę tyle razy ile jest wierszy w macierzy, czyli:

$$\det(aA) = a^n \det A,$$

gdzie macierz A jest macierzą $n \times n$.

Zauważmy też, że wyznacznik macierzy, która ma takie same dwa wiersze, to 0, ponieważ – zamieniając te dwa wiersze ze sobą nie zmieniamy macierzy, a mnożymy wyznacznik przez -1 , czyli $\det A = -\det A$, a zatem $\det A = 0$. Zatem ze względu na regułę związaną z mnożeniem wiersza przez liczbę, jeśli dwa wiersze macierzy są liniowo zależne od siebie, to wyznacznik tej macierzy to 0.

Również z rozwinięcia Laplace'a od razu widać, że jeśli macierze A , B , C różnią się tylko i -tym wierszem w ten sposób, że ten wiersz w macierzy C jest sumą i -tych wierszy z macierzy B i A , to wyznacznik C to suma wyznaczników A i B . Uwaga! Łatwo widać, że z reguły $\det(A + B) \neq \det A + \det B$!

W końcu możemy więc zbadać, jak wyznacznik macierzy zmienia podstawowa operacja na wierszach, czyli operacja dodania do jednego wiersza innego przemnożonego przez liczbę. Wtedy mamy tak naprawdę do czynienia z właśnie opisaną sytuacją – wynikowa macierz to macierz C , w która różni się od macierzy A i B tylko wierszem, do którego dosumowujemy inny. Macierz A to oryginalna macierz, a macierz C to macierz A w której zamiast wiersza do którego sumujemy jest wiersz, który dodajemy przemnożony przez liczbę. A zatem $\det A = \det B + \det C$, ale C ma dwa liniowo zależne wiersze, a zatem $\det C = 0$ i $\det B = \det A$. A zatem **operacja dodania do danego wiersza innego przemnożonego przez liczbę nie zmienia wyznacznika**.

Na koniec mnożenie macierzy. Każda z powyższych operacji można zapisać jako mnożenie przez macierz. Np. zamiana 2 i 3 wiersza w macierzy 3×3 , to przemnożenie przez macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

przemnożenie 3-ciego wiersza przez 4, to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

dodanie do drugiego dwa razy pierwszego, to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nie trudno zauważyć, że tak się składa, że nawet w przypadku wielowymiarowym taka macierz zamiany wierszy ma wyznacznik (-1) , macierz powiązana z pomnożeniem wiersza przez liczbę a , wyznacznik a , zaś macierz dodania do wiersza innego przemnożonego przez liczbę, wyznacznik 1. A zatem mnożenie przez te macierze (nazywane elementarnymi) mnoży macierz przez ich wyznaczniki. Co więcej każdą macierz da się uzyskać przez przemnożenie przez siebie macierzy elementarnych, co daje następujący ważny wniosek:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

14.2 Przykład

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Policzyliśmy wcześniej, że $\det A = -24$. Natomiast $\det B = 0$, ponieważ ma dwa takie same wiersze.

W takim razie $\det(A/2) = -24/2^5 = -24/32 = 3/4$.

A także: $\det(A \cdot B) = (-24) \cdot 0 = 0$.

14.3 Przykładowe zadania

Dla macierzy zdefiniowanych wyżej policz:

$$\det(2A),$$

$$\det(A^2).$$

15 Liczenie macierzy odwrotnej

15.1 Metoda

Macierz odwrotna do macierzy kwadratowej A , to macierz B , taka że $A \cdot B = I$, gdzie I to macierz jednostkowa (tzn. z jedynkami na przekątnej i zerami poza przekątną). Macierz odwrotną oznaczamy A^{-1} . Ponieważ $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$ oraz $\det I = 1$, dostajemy, że $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Stąd też wiemy, że macierz odwrotna może istnieć tylko gdy $\det A \neq 0$ i takie macierze nazywamy odwracalnymi.

Jak policzyć macierz odwrotną? Powiedzieliśmy ostatnio, że operacje na wierszach prowadzące do postaci schodkowej zredukowanej, to tak naprawdę przemnożenie macierzy przez jakąś macierz. Więc wyobraźmy sobie, że sprowadzamy do postaci schodkowej zredukowanej macierz złożoną z macierzy A oraz I obok siebie: $[A|I]$. Ponieważ A było macierzą kwadratową i $\det A \neq 0$, to otrzymamy po lewej stronie macierz jednostkową, czyli dostaniemy macierz $[I|B]$. Ale zauważmy, że jeśli C to macierz operacji na wierszach, które wykonaliśmy, to $C \cdot [A|I] = [I|B]$. A zatem $C \cdot A = I$ oraz $C \cdot I = B$. Z pierwszego równania wynika, że $C = A^{-1}$. Z drugiego, że $B = C = A^{-1}$. A zatem po prawej stronie otrzymaliśmy macierz odwrotną do A .

15.2 Przykład

Chcemy policzyć macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Do dzieła:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 + w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A zatem:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15.3 Przykładowe zadania

Jeśli macierz jest odwracalna, znajdź jej macierz odwrotną.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

16 Liczenie konkretnego wyrazu macierzy odwrotnej

16.1 Metoda

Chcąc wyliczyć niecałą macierz odwrotną do macierzy A , a tylko konkretny element, warto skorzystać z metody prowadzącej przez tak zwaną macierz dołączoną A^D . Otóż macierz dołączona to macierz w której w j -tym wierszu, i -tej kolumnie jest wyznacznik macierzy $A_{i,j}$, czyli macierzy A z wykreślonym i -tym wierszem i j -tą kolumną (uwaga: ten napis nie zawiera błędu, wchodzi w grę transpozycja) przemnożony przez $(-1)^{i+j}$. Prawdziwy jest następujący fakt:

$$A^{-1} = \frac{A^D}{\det A}.$$

16.2 Przykład

Niech jak poprzednio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Chcąc wyliczyć wartość w drugim wierszu, w pierwszej kolumnie macierzy A^{-1} , wykreślamy z A drugą kolumnę i pierwszy wiersz, liczymy wyznaczniki i mamy:

$$(-1)^{2+1} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = (-1) \frac{2}{1} = -2$$

co się zgadza z tym, co policzyliśmy inną metodą!

16.3 Przykładowe zadania

Używając tej metody wylicz także:

- wartość w drugim wierszu, w trzeciej kolumnie,
- wartość w trzecim wierszu, w drugiej kolumnie,

macierzy A^{-1} , dla macierzy A z powyższego przykładu.

17 Rozwiązywanie układu równań przy pomocy wzorów Cramera

17.1 Metoda

Jeśli mamy układ n równań z n niewiadomymi możemy zbadać go korzystając ze wzorów Cramera. Niech A będzie macierzą układu równań bez kolumny współczynników wolnych, zaś A_i macierzą A , w której zamiast i -tej kolumny wstawiono kolumnę wyrazów wolnych, wtedy:

- jeśli $\det A \neq 0$, to układ jest oznaczony i rozwiązanie jest dane według wzoru $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, i/li
- jeśli $\det A = 0$, ale nie wszystkie wyznaczniki $\det A_i$ są równe 0, to układ jest sprzeczny, i/li
- jeśli $\det A = 0$ oraz dla każdego i , $\det A_i = 0$, to układ może być nieoznaczony, ale też może być sprzeczny – nie wiadomo, i/li

17.2 Przykład

Rozwiążmy w ten sposób układ:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 2z = -1 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

A zatem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\det A = 1$, to układ jest oznaczony. Aby wyliczyć pierwiastki liczymy wyznaczniki:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

A zatem $x = \frac{6}{1} = 6$, $y = \frac{-3}{1} = -3$, $z = \frac{1}{1} = 1$.

17.3 Przykładowe zadania

Zbadaj następujące układy metodą wzorów Cramera. Jeśli układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, wylicz je tą metodą.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 2z = -1 \\ 3x + 7y + 3z = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x + 5y - 10z = -1 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ -x + 5z = 33 \end{cases}.$$